

УДК 539.3

А.А.Прядко (5 курс, каф. МиПУ), И.Б.Войнов, соиск., А.И.Боровков, к.т.н., проф.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Цель работы – получение аналитических решений некоторых задач вязкоупругости и выполнение сравнительного анализа аналитических результатов с результатами конечно-элементного (КЭ) моделирования, выполненного с помощью системы КЭ моделирования ANSYS.

Для получения аналитического решения задач вязкоупругости использовалось соотношение, описывающее линейную интегральную связь между напряжениями и деформациями в изотермических условиях. В тензорной форме данное соотношение имеет следующий вид [1]:

$$\sigma(t) = \int_0^t {}^4G(t-\tau) \cdot \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

Здесь ${}^4G(t)$ – тензор функций релаксации, тензор 4-го ранга. В рассматриваемых задачах функция релаксации принималась в следующем виде

$$G(t) = G_0(\alpha_\infty + \alpha_1 e^{-\frac{t}{T}}), \quad (2)$$

где $G_0 = G(0)$, T , α_∞ , α_1 – параметры, определяемые релаксационными свойствами материала.

Наиболее простыми и наглядными задачами являются задачи об одноосном растяжении-сжатии прямолинейного стержня из вязкоупругого материала. В работе получены решения нескольких подобных задач для различных условий нагружения.

В качестве примера приведем решение, полученное для случая кусочно-линейного осевого растяжения-сжатия консольного стержня (рис. 1). Стержень сначала равномерно растягивается, затем равномерно сжимается (рис. 2).

Аналитическое решение, полученное для осевого напряжения в стержне, имеет вид:

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{5u_0 E_0}{L} \left(\alpha_\infty t + 2\alpha_1 T e^{-\frac{t}{2T}} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2T}\right) \right) & t < 0.2 \\ \frac{u_0 E_0}{L} \left(2\alpha_\infty - 5\alpha_\infty t + 10\alpha_1 T \left(e^{-\frac{t}{2T}} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2T}\right) + e^{-\frac{5t-1}{5T}} - 1 \right) \right) & 0.2 < t < 0.4 \\ \frac{5u_0 E_0}{L} \alpha_1 T \left(2e^{-\frac{t}{2T}} \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2T}\right) + 2e^{-\frac{5t-1}{5T}} - e^{-\frac{5t-2}{5T}} - 1 \right) & t > 0.4 \end{cases} \quad (3)$$

Графическое представление аналитического и численного решений представлено на рис. 3. Сравнение результатов свидетельствует, что относительная погрешность КЭ решения не превышает 0.1%

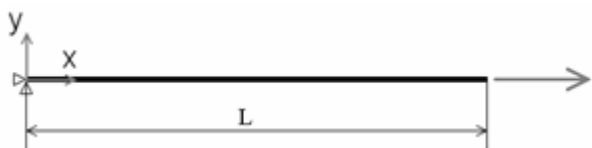


Рис. 1

Получены решения задач об определении напряженно-деформированного состояния полого шара, находящегося под действием внутреннего давления (вязкоупругий аналог задачи Ламе), плоскости,

ослабленной малым круговым отверстием (вязкоупругий аналог задачи Кирша) и диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Наиболее интересной с практической точки зрения является последняя задача – задача о вращающемся диске. Приведем полученное аналитическое решение для радиального компонента вектора перемещения u_r :

$$u_r = \frac{(1-\nu)(3b^2 - r^2 + \nu b^2 - \nu r^2)\gamma\omega^2}{8gE_0\alpha_\infty} \left(1 - \alpha_1 e^{-\frac{\alpha_\infty t}{T}} \right), \quad (4)$$

где b – радиус диска, ω – угловая скорость вращения, γ – удельный вес материала, g – ускорение силы тяжести, T , α_∞ , α_1 – параметры, определяемые релаксационными свойствами материала.

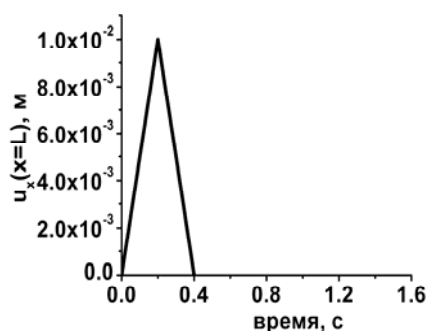


Рис. 2

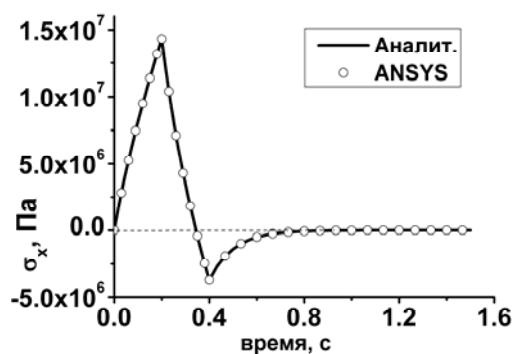
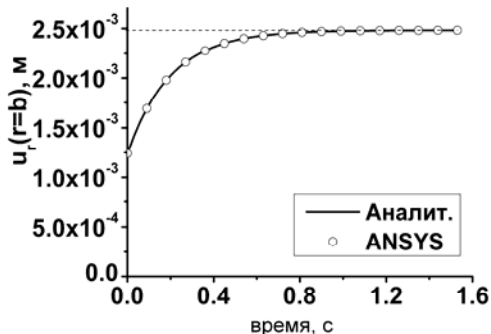
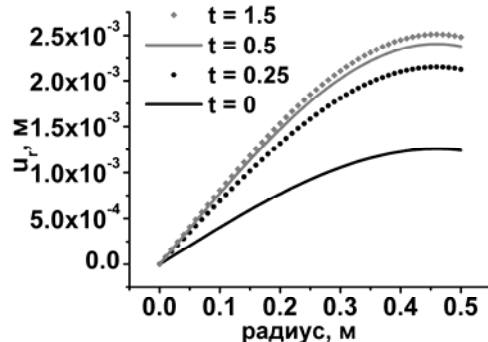


Рис. 3



На рис. 4 представлены графики изменения во времени радиального перемещения u_r точек на внешнем радиусе диска, как для аналитического решения, так и для КЭ решения. На рис. 5 представлены графики изменения радиального перемещения u_r вдоль радиуса в различные моменты времени.

Результаты сравнительного анализа свидетельствуют о высокой степени точности КЭ решений задач вязкоупругости, полученных с помощью программной системы КЭ анализа ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974.