

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА И ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК С НАНОТРУБКАМИ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ПРИЦИПА ГАМИЛЬТОНА

Цель работы: вывод дифференциальных уравнений и граничных условий для задачи о колебании системы «балка Тимошенко и одна нанотрубка» и рассмотрение граничной задачи для стержневой модели «большой системы», состоящей из горизонтальной балки Тимошенко с многими вертикальными нанотрубками.

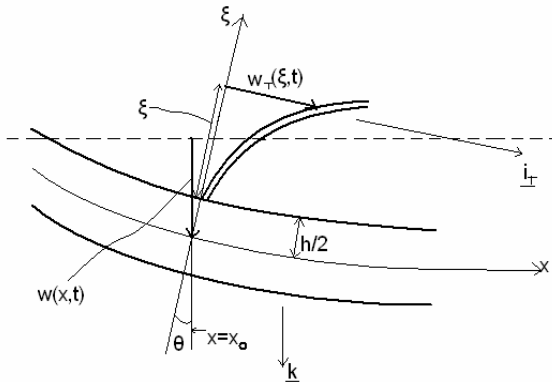


Рис. 1

Сначала рассматривается простейшая модель системы, состоящей из подложки, моделируемой балкой Тимошенко, и одной нанотрубки в виде балки Бернулли-Эйлера. Рассматривается балка Тимошенко длины  $l$ , толщины  $h$ . Прогиб балки обозначен  $w(x,t)$ , угол поворота поперечных сечений  $\theta(x,t)$ , где  $x$  — продольная координата балки, а  $t$  — время.

В сечении  $x=x_0$  закреплена маленькая нанотрубка типа балки Бернулли-Эйлера. Нанотрубка имеет длину  $l_T$ . Прогиб

нанотрубки обозначен  $w_T(\xi,t)$ , где  $\xi$  — продольная координата нанотрубки (рис. 1).

В соответствии с принципом Гамильтона в этой системе всего 3 независимых координаты:  $w(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$ ,  $w_T(\xi,t)$ , откуда следует, что  $\delta w, \delta \theta, \delta w_T$  — независимые вариации.

Получили выражение вариации действия для всей системы  $\delta S$  в виде:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_0^l \left[ -\rho A \ddot{w} - C(\theta' - \dot{w}') + q \right] \delta w + \left[ -\rho I \ddot{\theta} + C(\dot{w}' - \theta) + N\theta' + m \right] \delta \theta \right\} dx + \\ & \int_0^{l_T} \left[ -(E_T I_T \ddot{w}_T)' - \rho_T A_T \ddot{w}_T - \rho_T A_T \left( \xi \ddot{\theta}_0 + \frac{h}{2} \ddot{\theta}_0 + \sin \theta_0 \ddot{w}_0 + \dot{w}_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 \right) \right] \delta w_T d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \rho_T A_T \left[ \int_0^{l_T} \left[ -2 \sin \theta_0 \ddot{w}_T - 2 \dot{w}_T \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 \right] d\xi - \left[ 2 l_T \ddot{w}_0 + Q \left( \sin \theta_0 \ddot{\theta}_0 + \dot{\theta}_0^2 \cos \theta_0 \right) \right] \right] \delta w_0 + \\ & + \frac{1}{2} \rho_T A_T \left[ \int_0^{l_T} \left[ -2 \xi \ddot{w}_T - h \ddot{w}_T + 2 \cos \theta_0 \dot{w}_0 \dot{w}_T \right] d\xi - \left[ \frac{2}{3} P \dot{\theta}_0 + Q \left( \ddot{w}_0 \sin \theta_0 + \dot{w}_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 \right) \right] \right] \delta \theta_0 + \\ & + \left[ C(\theta - \dot{w}') \right] \delta w \Big|_0^l - \left[ N\theta' \right] \delta \theta \Big|_0^l + \left( E_T I_T \ddot{w}_T \right)' \delta w_T \Big|_0^{l_T} - E_T I_T \ddot{w}_T \delta \dot{w}_T \Big|_0^{l_T} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Тогда вариационный принцип Гамильтона  $[...] = 0$  в первом и втором интегралах соответственно дает дифференциальные уравнения для балки Тимошенко и нанотрубки, последнее слагаемое  $[...] = 0$  дает граничные условия.

Рассмотрим стержневую модель «большой системы» (рис. 2), состоящей из горизонтальной балки Тимошенко длины  $l$ , моделирующей подложку, и  $N$  вертикальных балок типа Бернулли-Эйлера длиной  $l_T$ , моделирующих нанотрубки. Вертикальные балки

нижними концами жестко закреплены на горизонтальной балке и расположены на одинаковом расстоянии  $\eta$  друг от друга, так что  $l = (N+1)\eta$ . Верхние концы вертикальных балок свободны.

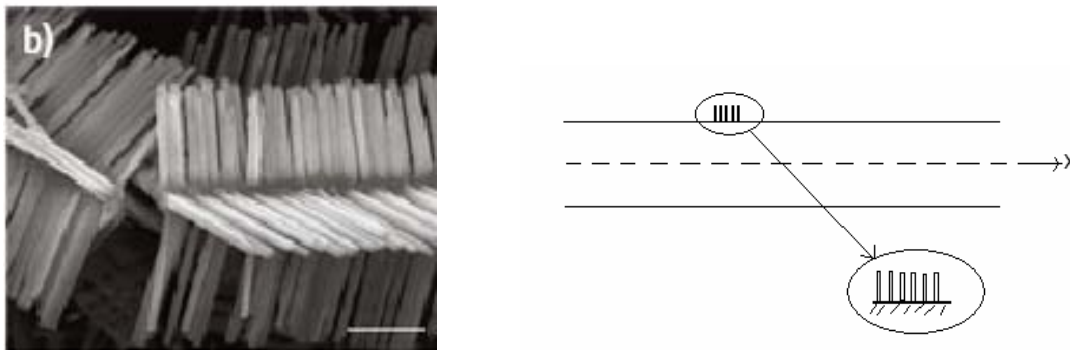


Рис. 2. Балка- подложка с четырьмя системами нанотрубок

Прогиб нанотрубки с номером  $n$  обозначен  $w_T^n(\xi, t)$ , где  $\xi$  — продольная координата нанотрубки.

В соответствии с принципом Гамильтона в этой системе всего  $(N+2)$  независимых координат:  $w(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$ ,  $w_T^n(\xi, t)$ ,  $n=1,2,\dots,N$ .

Используем верхний результат, из которого можем немедленно получить:

1. Уравнения движения вертикальных балок с номером  $n$  :

$$(5.1) \quad \left( E_T I_T (w_T^n)'' \right)' + \rho_T A_T \ddot{w}_T^n + B \Big|_{x=n\eta} = 0$$

$$\text{где } B \Big|_{x=n\eta} = \rho_T A_T \left( \xi \ddot{\theta} \Big|_{x=n\eta} + \frac{h}{2} \ddot{\theta} \Big|_{x=n\eta} + \sin \theta \Big|_{x=n\eta} \ddot{w} \Big|_{x=n\eta} + \dot{w} \Big|_{x=n\eta} \cos \theta \Big|_{x=n\eta} \dot{\theta} \Big|_{x=n\eta} \right)$$

для всех  $\xi \in (0, l_T)$  и  $n=1,2,\dots,N$ .

2. Уравнения движения горизонтальной балки:

$$(5.2) \quad \begin{cases} C(w'' - \theta') + \sum_{n=1}^N F_n \delta(x - n\eta) + q = \rho A \ddot{w} \\ N\theta'' + C(w' - \theta) + \sum_{n=1}^N L_n \delta(x - n\eta) + m = \rho I \ddot{\theta} \end{cases}$$

для всех  $x \in (0, l)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. А.И.Лurie. Analytical Mechanics. 2001.
2. В.А.Еремеев, Е.А.Иванова, Н.Ф.Морозов, А.Н.Соловьев. Об определении собственных частот нанообъектов // Докл. РАН. 2006.