

СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ АЛГОРИТМА РАППЕРТА ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ МИНИМАЛЬНОГО УГЛА

Построение сетки для метода конечных элементов является довольно важной задачей, поскольку численное решение может существенно зависеть от сетки. Сетка влияет на ошибку конечно-элементного решения и на обусловленность матрицы жесткости. Для обеспечения эффективности вычислений сетка должна удовлетворять ряду требований: ограничение длин сторон сверху и значений углов треугольников снизу, желательно при возможно меньшем числе элементов для дальнейшего их измельчения в адаптивном режиме. Формализацией понятия треугольной сетки является триангуляция. Наибольшее значение для метода конечных элементов имеет триангуляция Делоне (см., например, [0]), в которой окружности, описанные вокруг каждого треугольника, не содержат внутри себя вершин триангуляции. Одним из свойств триангуляции Делоне, важным для метода конечных элементов, является то, что среди всех триангуляций, построенных по заданному набору точек, триангуляция Делоне имеет наибольший минимальный угол.

Триангуляция Делоне используется, кроме вычислительной математики, в различных областях, например, в компьютерной графике и геодезии, поэтому существует большое число алгоритмов её построения [0,0]. Метод конечных элементов выдвигает собственные требования к сетке. Из всего множества алгоритмов построения триангуляции Делоне для построения конечно-элементной сетки был выбран алгоритм Рапперта [0], поскольку он строит сетку, удовлетворяющую заданным требованиям, и дает меньшее число элементов по сравнению с другими (известно из экспериментов и асимптотической оценки числа элементов). Также для алгоритма Рапперта построено теоретическое обоснование. Сам Рапперт предложил лишь идею алгоритма, требующую привлечения и анализа вспомогательных алгоритмов, поэтому здесь имеется широкий простор для исследования.

Алгоритм Рапперта реализован в функции `initmesh` приложения PDE Toolbox пакета MATLAB. Была написана собственная функция `myTriang` в MATLAB, использующая структуру данных PDE Toolbox, но на основе других алгоритмов и подходов.

Основная идея алгоритма Рапперта заключается в следующем: строится очень грубая триангуляция Делоне, затем производится добавление новых точек для уменьшения длин ребёр и увеличения углов. Добавляются центры описанных окружностей треугольников. Здесь возникает первая альтернатива — каким способом добавлять новую точку. Добавление можно производить с помощью итеративного алгоритма вставками [0]. В `initmesh` используется алгоритм Боуе–Уотсона [0]. В нашей работе использован алгоритм Лаусона [0], его работа в меньшей степени зависит от ошибок округления, и скорость зависит от формы элементов только в некоторой окрестности добавляемой точки, а не от общего числа элементов, как в алгоритме Боуе–Уотсона. Если центр лежит вне области, то его нельзя добавлять, а во избежание таких ситуаций нужно разбить границу области на сегменты. Для учёта границы нами была применена триангуляция Делоне с ограничениями, а в функции `initmesh` используется суперструктура, что требует дополнительных построений и затрат памяти. При разбиении сегментов были специально обработаны особые случаи, могущие приводить к закликиванию алгоритма (например, если между двумя сегментами границы угол меньше 60° , то при разбиении сегмента на две равные части получается бесконечный цикл).

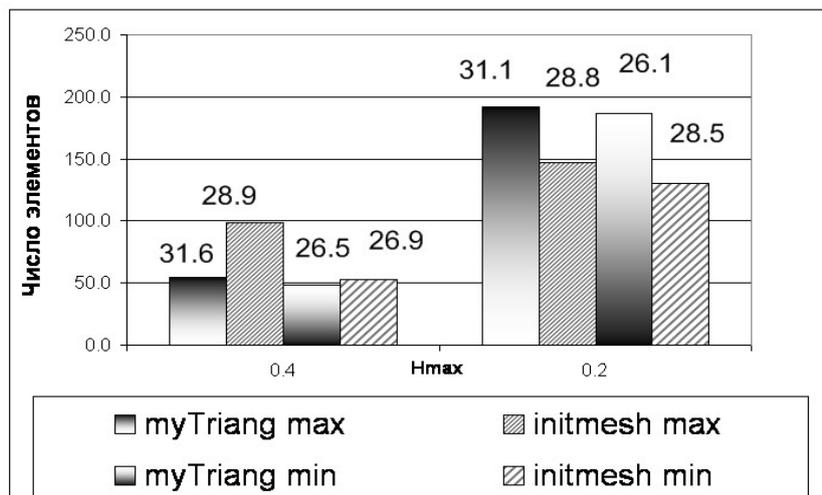


Рис. 1

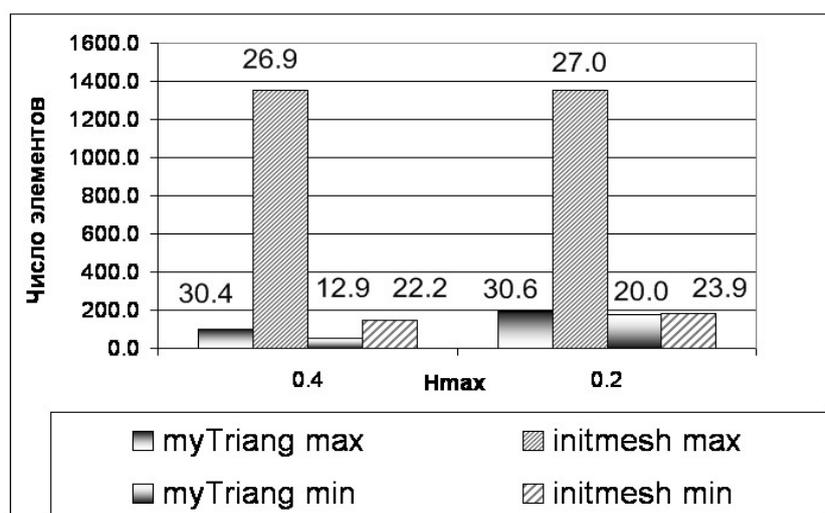


Рис. 2

Сравнение собственной функции с `initmesh` проводилось на последовательностях случайных областей. Случайным образом выбиралось число вершин и их положение. В общей сложности было построено 1500 односвязных областей, 100 неодносвязных и более 8000 триангуляций. Некоторые результаты приведены соответственно на рис. 1 (для односвязных областей) и рис. 2 (для неодносвязных областей). По вертикальной оси отложены средние значения числа элементов, над ними написано значение минимального угла, результаты представлены для различных ограничений на длину рёбер (H_{max}) и форму элементов (`max` и `min`).

Из проведенных тестов следует, что наша функция строит сетки с большим минимальным углом и для областей со сложной геометрией дает меньшее число элементов, чем `initmesh`. Кроме того, из-за суперструктуры стандартная функция `initmesh` требует в среднем на 25% больше памяти, чем наша функция.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Shewchuk J. Computational Geometry: Theory and Applications, 22(1-3), 2002, p. 21-74.
2. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-в Томского университета, 2002. – 128 с. ISBN 5-7511-1501-5.
3. Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation, NASA Ames Research Center, Submission to Journal of Algorithms, 1994.