УДК 519.632.4

С.В.Березин (4 курс, каф. ПМ), И.Е.Ануфриев, к.ф.-м.н., доц.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КУБЕ МЕТОДОМ FACR (FOURIER ANALYSIS AND CYCLIC REDUCTION)

В работе [1] предложен быстрый метод решения уравнения Пуассона в квадрате с использованием преобразования Фурье, метода циклической редукции и метода прогонки «не до конца». В настоящей работе представлено обобщение этого метода на случай куба.

Построим конечно-разностную аппроксимацию однородной задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u = f$ в кубе $K=[0,1]^3$. Разобьем куб по трем направлениям сеткой с шагами $h_x = 1/N$, $h_y = 1/M$, $h_z = 1/K$, соответственно (для простоты считаем что N, M, K – целые степени двойки). Значения функций в узлах сетки обозначим нижними индексами (i, j, k). Для нахождения приближенного решения в узлах сетки получим систему уравнений:

$$-\frac{u_{i-1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i+1,j,k}}{h_x{}^2}-\frac{u_{i,j-1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j+1,k}}{h_y{}^2}-\frac{u_{i,j,k-1}-2u_{i,j,k}+u_{i,j,k+1}}{h_z{}^2}=f_{i,j,k},$$

где $i=1,...,N-1$, $j=1,...,M-1$, $k=1,...,K-1$, причем из однородности условий Дирихле следует, что: $u_{0,j,k}=u_{i,0,k}=u_{i,j,0}=u_{N,j,k}=u_{i,M,k}=u_{i,j,K}=0$, $i=0,...,N$, $j=0,...,M$, $k=0,...,K$. Для решения системы применим преобразование Фурье [2] по направлениям y, z. Иными словами, рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля:

$$-\frac{\psi_{j-1,k}-2\psi_{j,k}+\psi_{j+1,k}}{h_y{}^2}-\frac{\psi_{j,k-1}-2\psi_{j,k}+\psi_{j,k+1}}{h_z{}^2}+\lambda\psi_{j,k}=0$$

где $j=1,...,M-1$, $k=1,...,K-1$, а $\psi_{0,k}=\psi_{j,0}=\psi_{j,K}=\psi_{M,k}=0$, для $j=0,...,M$, $k=0,...,K$. Она имеет следующее решение (для удобства собственные числа пронумерованы двумя индексами):

$$\psi^{s,t}_{j,k}=\sin\left(\frac{\pi j s}{M}\right)\sin\left(\frac{\pi k t}{K}\right),\ \lambda_{s,t}=-\frac{4}{h_y^2}\sin^2\left(\frac{\pi s h_y}{2}\right)-\frac{4}{h_z^2}\sin^2\left(\frac{\pi t h_z}{2}\right),\ s=1,...,M-1,\ t=1,...,K-1.$$

Решение исходной системы уравнений будем искать в виде $u=\sum_{s=1}^{M-1}\sum_{t=1}^{K-1}c_i^{s,t}\psi^{s,t}_{j,k}$, что приводит к серии систем вида: $-c_{i-1}^{s,t}+(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})c_i^{s,t}-c_{i+1}^{s,t}=h_x{}^2F_i^{s,t}$, где $s=1,...,M-1$, $t=1,...K-1$, $i=1,...,N-1$, в правой части которых стоят коэффициенты разложения сеточной функции f по функциям $\psi^{s,t}$. На практике для получения коэффициентов используется алгоритм быстрого синус-преобразования Фурье [3].

Опишем более подробно решение этих систем, матрица каждой из которых является трехдиагональной с диагональным преобладанием. Можно решать эти системы классическим методом прогонки, однако поступим иначе — применим метод циклической редукции [1] и перейдем к совокупности систем меньшей размерности. Рассмотрим соседние уравнения одной из систем:

$$-c_{i-2}^{s,t}+(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})c_{i-1}^{s,t}-c_i^{s,t}=h_x{}^2F_{i-1}^{s,t},$$

$$-c_{i-1}^{s,t}+(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})c_i^{s,t}-c_{i+1}^{s,t}=h_x{}^2F_i^{s,t},$$

$$-c_i^{s,t}+(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})c_{i+1}^{s,t}-c_{i+2}^{s,t}=h_x{}^2F_{i+1}^{s,t}.$$

Складывая первое, третье и второе, умноженное на $(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})$, уравнения, получим

$$-c_{i-2}^{s,t}+((2-h_x{}^2\lambda_{s,t})^2-2)c_i^{s,t}-c_{i+2}^{s,t}=h_x{}^2(F_{i-1}^{s,t}+(2-h_x{}^2\lambda_{s,t})F_i^{s,t}+F_{i+1}^{s,t}),\ i=2,4,...,N-2.$$

Повторяя этот процесс l раз, придем к системе меньшей размерности. Её, следуя [1], решим методом прогонки «не до конца». Поясним его идею на примере трехдиагональной матрицы $(d>2)$, которая вместе с множителями ее LU-разложения приведена ниже

$$T=\begin{pmatrix} d & -1 & & & \\ -1 & d & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & d & -1 \\ & & & -1 & d \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-1} & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} u_1 & -1 & & & \\ & u_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & -1 \\ & & & & u_n \end{pmatrix},$$

где $u_i=-1/l_i$ для всех i. Как показано в [1], $u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \rho$, $\rho>1$ и $\forall\varepsilon>0$ и $\forall i>N$, где $N=\lfloor \log(\varepsilon)/\log(\rho^{-2})\rfloor$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа), верно, что $|(u_i-\rho)/u_i|<\varepsilon$, при $\rho^{-2}<<1$. Это и позволяет делать прогонку не до конца. Итак, решив систему с помощью двукратного преобразования Фурье, получим решение исходной системы. В итоге получен так называемый алгоритм FACR(l). Следуя [1], можно выбрать оптимальный по количеству арифметических операций параметр l= log(log(min{N, M, K})). Сложность всего алгоритма решения системы конечно-разностных уравнений при таком выборе параметра составляет O(NMK log(log(min{N, M, K}))).

Численный эксперимент подтвердил, что ошибка решения методом прогонки «не до конца», не зависит от размера системы (см. рис. 1), а также, что решение исходной системы методом FACR занимает меньше времени, чем метод Фурье и классическая прогонка (см. рис. 2).

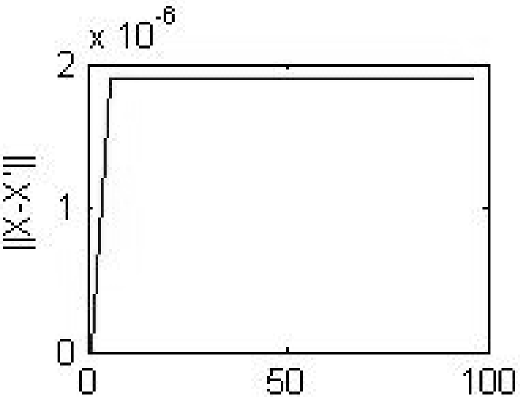

Рис. 1. Зависимость точности решения от размера системы

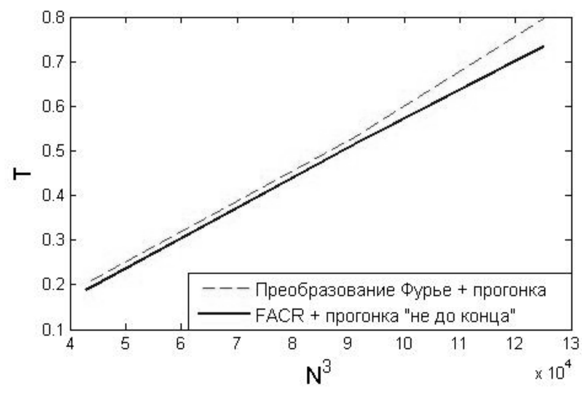

Рис. 2. Зависимость времени работы от размера матрицы

ЛИТЕРАТУРА:

1. S. Lennart Jonson and Nikos P. Pitsianis. Load-balance in parallel FACR. Department of Computer Science, University of Houston, TX 77204-3475.
2. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. «Наука», М., 1971.
3. Ben-Shan Liao. FFT-based Fast Poisson Solver. Department of Mathematics, UC Davis, 2003.