УДК 625.855.3

О.В.Горюнов (5 курс, каф. КТиЭТ),
А.В.Судаков, д.т.н., проф., зам. ген. дир. (НПО «ЦКТИ им. Ползунова»)

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ (ПРЕДСТАВИМОМ В ВИДЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ)

Ранее Р.И.Вейцманом была опубликована работа, посвященная данной теме, где было представлено соответствующее аналитическое решение для полубесконечной области с граничным условием первого рода: $T\big|_{z=0} = T_0 Heaviside(R-r)$, t>0. Работа Вейцмана дает мало данных для зависимости между амплитудой пульсаций и характером взаимодействия со средой. В предложенной работе рассматривается периодическое изменение температуры на поверхности посредством воздействия среды:

$$\alpha(t) = \alpha_1(t,\omega) + \alpha_2 .$$

С помощью теории рядов Фурье можно показать, что амплитуда колебаний в таком случае быстро затухает: $\exp(-z\sqrt{\frac{\pi f}{a}})$, тогда уже при частотах f>1 Гц амплитуда колебаний температуры на глубине 2 мм убывает в 20-30 раз по отношению к амплитуде на границе тела. Таким образом, можно сделать вывод, что в решение задач с подобно, можно решать как для полупространства, ошибка в таком случае не будет превышать 5%.

Рассмотрим теоретическую сторону вопроса: математическая постановка исследования имеет вид (уравнения для малых деформаций, f>1 Гц):

$$\begin{gathered}\mu\Delta\vec{U}(\vec{r},t) + (\lambda+\mu)grad(div\vec{U}(\vec{r},t)) - (3\lambda+2\mu)\beta\cdot gradT(\vec{r},t) = 0\\ \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{3\lambda+2\mu}{c\rho}\beta T(\vec{r},t)\cdot div\frac{\partial\vec{U}(\vec{r},t)}{\partial t} = a\Delta T(\vec{r},t), \vec{r}\in D = \{0<z<b\}, t>0\end{gathered} \tag{1}$$

С начальными (2) и граничными (3) условиями следующего вида:

$$T_{t=0} = T_0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{-[\alpha_1(t,\omega)+\alpha_2]}{\chi}T\big|_{z=0} + \frac{[\alpha_1(t,\omega)+\alpha_2]}{\chi}Te(t) = h(t,\omega)T\big|_{z=0} + f(t,\omega), \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=è} = 0 \tag{3}$$

После несложных преобразований получаем:

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t}\left(1 + \frac{(3\lambda+2\mu)^2}{c\rho\cdot(\lambda+2\mu)}\beta^2\cdot T(\vec{r},t)\right) \cong \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = a\Delta T(\vec{r},t), \frac{(3\lambda+2\mu)^2}{c\rho\cdot(\lambda+2\mu)}\beta^2 \approx 10^{-6} << 1 \tag{4}$$

Интерес представляла задача с $\alpha(t) = \alpha_1\cdot Heaviside(\sin(2\pi ft) - A)$. Тогда решение получается в виде:

$$\begin{gathered}\dot{\Theta}(z,Fo) = T_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{-Bi(Fo,\omega)\sin(\xi z) + \xi\cos(\xi z)}{\sqrt{Bi^2(Fo,\omega)+\xi^2}}\dot{\Theta}_F(Fo,\xi)\cdot d\xi\\ \dot{\Theta}_F(Fo,\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\xi\cdot Bi_1(\tau,\omega)\cdot(T_{e1}-T_0) + Bi_2\cdot(T_{e2}-T_0)}{\sqrt{Bi^2(\tau,\omega)+\xi^2}}\cdot\exp\left[-\xi^2\cdot(Fo-\tau)\right]d\tau\end{gathered} \tag{5}$$

Для проверки теоретического решения был проведен численный расчет с помощью МКЭ ANSYS. Рабочей областью была пластинка 2мм×50мм. Граничные условия на внешней поверхности ставились 3 – го рода: $\alpha(t) = 50000\cdot Heaviside(\sin(2\pi ft) - 0.9) + 21$ и теплоизоляция на внутренней поверхности. Температура среды также зависела от времени:

$T_e(t) = 100 Heaviside(\sin 2\pi ft - 0.9) + 21$. Рассчитанные теоретически и численно зависимости приведены на рис. 1.

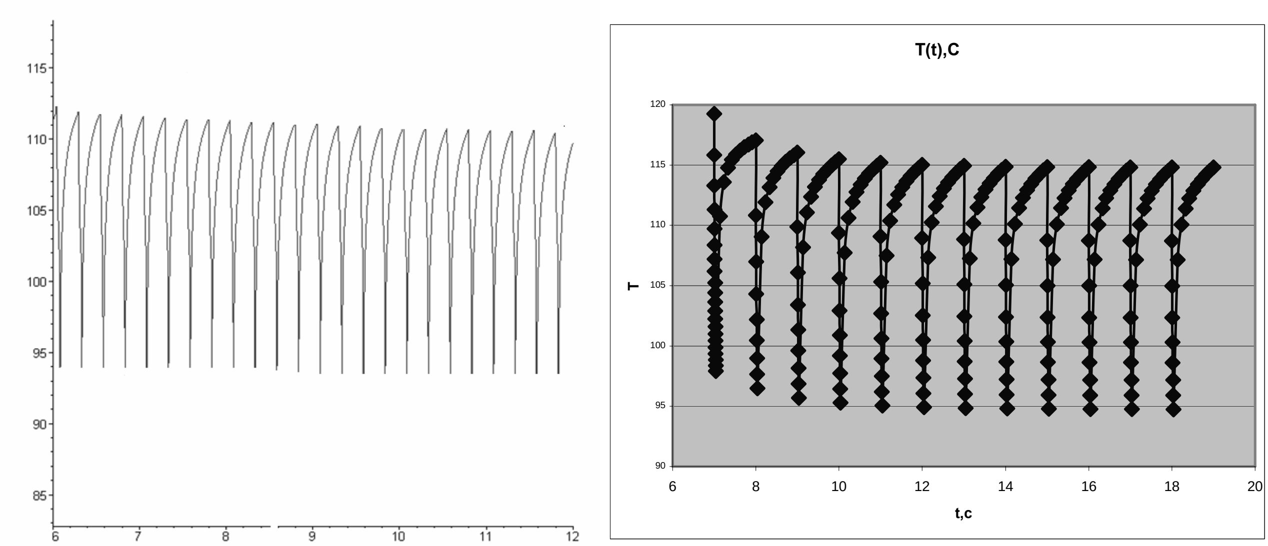

Рис. 1. Зависимость температуры (в градусах Цельсия) рассчитанной теоретически (слева) и численно (справа) на поверхности тела от критерия Фурье (Fo) при $Bi(t) = 5 \cdot Heaviside(\sin(2\pi ft) - 0.9) + 0.001$, b=2мм, f=1 Гц, T_{e1}=100 C, T_{e2}=25 C, T_0=120 C

Таким образом, в работе было получена функциональная зависимость (5) между пульсациями температур и характером внешнего воздействия: коэффициентом теплоотдачи и частотой.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.И.Вейцман, Доклад «Нестационарные тепловые напряжения в упругом полупространстве при локальном изменении температуры на поверхности», Институт механики АН УССР, 1962 г.