

Математическое введение в курс общей физики

Учебное пособие для студентов

Топтыгин И.Н.

Санкт-Петербургский Государственный технический университет

Санкт-Петербург

19 января 1999 г.

Предисловие

Физика — количественная наука, основанная на измерениях и вычислениях. Суть того или иного физического явления может быть познана достаточно глубоко лишь после установления количественных связей между характеризующими его физическими величинами. А это означает, что при описании физических явлений невозможно обойтись без математического языка, который только и позволяет находить требуемые количественные связи. Более того, многие разделы математики развивались в ответ на запросы физической науки, в первую очередь механики. Недаром в современной классификации наук до сих пор используется объединяющий термин ”физико-математические науки”, а создателями основ классического математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления — явились выдающиеся классики физической науки И.Ньютон (1643-1727) и Г.Лейбниц (1646-1716).

Перечисленные обстоятельства делают необходимым использование основ ”высшей” математики (т.е. дифференциального и интегрального исчисления) даже при изучении общего курса физики, и тем более при изучении специализированных физических курсов. Это особенно важно для студентов физических факультетов. Однако, поскольку как правило курсы математики и общей физики читаются параллельно, математических знаний студентов подчас нехватает для понимания некоторых разделов курса физики, что препятствует его достаточно глубокому усвоению. Цель настоящего учебного пособия — дать минимум математических сведений, необходимых для усвоения начальных разделов курса физики, таких, как классическая механика, термодинамика, молекулярная физика, электрические и магнитные явления, а также **научить студентов использовать эти сведения для решения физических задач**. Основные понятия классического математического анализа просты и наглядны в своей основе и адекватно отображают свойства реальных физических величин. Автор убежден, что любой добросовестный студент со средними способностями в состоянии научиться использовать математические понятия для анализа физических явлений. Трудности, которые возникают на этом пути, чаще всего бывают связаны с пробелами в понимании некоторых простых в своей основе вещей. Иногда это происходит из-за изложения математических положений на слишком формальном ”строгом” уровне, затемняющем суть дела и вызывающем у учащегося синдром боязни математики.

Предлагаемое учебное пособие, разумеется, не может служить заменой учебникам и учебным пособиям по высшей математике. В нем нет доказательств математических теорем, все формулируемые положения поясняются как правило на полуинтуитивном уровне, либо делаются отсылки к математической литературе. В то же время каждый раздел содержит значительное число примеров и задач, в том числе и физического характера, необходимых для практического освоения обсуждаемых понятий и методов. Решение этих задач абсолютно необходимо для овладения изложенными в пособии простейшими математическими приемами, используемыми в физике. В качестве начального багажа для использования настоящего пособия достаточно тех сведений по математике, которые даются в большинстве средних школ.

1 Элементы векторной алгебры

Мы познакомимся с основными понятиями векторной алгебры в основном применительно к трехмерному пространству, в котором выполняется геометрия Евклида, известная из школьного курса (в этой геометрии¹ сумма углов треугольника равна 180° или, в радианной мере, π , выполняется теорема Пифагора, параллельные прямые не пересекаются и т.д.).

Скаляры и векторы — это математические величины, абстракции, отражающие общие свойства реальных физических величин — таких, как масса, плотность, сила, скорость и др. **Скалярной физической величиной** называется такая величина, которая задается только своим численным значением (в соответствующих единицах). Таковы масса, плотность, температура и многие другие величины. **Векторной физической величиной \mathbf{A}** называется такая величина, для задания которой кроме численного значения нужно определить также направление в пространстве. Наглядным образом векторной величины может служить направленный отрезок, "стрелка" (рис. 1.1). Таковы сила, скорость, радиус-вектор некоторой точки, отложенный из выбранного начала отсчета, и другие аналогичные величины. Численное значение (длина, или модуль) $|\mathbf{A}| = A \geq 0$ действительного (не комплексного) вектора может быть положительным числом или нулем. Направление нулевого вектора не определено. Мы будем изучать преимущественно свободные векторы, точка приложения которых не определена (их можно перемещать произвольным образом параллельно самим себе). Но не все векторы обладают таким свойством. Например, сила \mathbf{F} бывает приложена к определенной частице (материальной точке) или к определенной точке твердого тела.

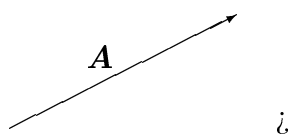


Рис. 1.1.

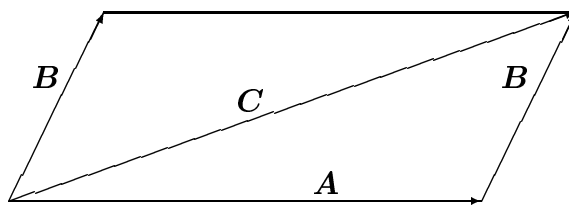


Рис. 1.2.

Векторы складываются **по правилу параллелограмма**. Это означает, что сумма двух векторов $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ равна третьему вектору \mathbf{C} , который изображается диагональю параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{A} и \mathbf{B} . По-другому можно сказать, что вектор \mathbf{C} образует третью сторону треугольника, двумя сторонами которого являются векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} (рис. 1.2). Это правило легко обобщается на сумму любого числа векторов: начало каждого последующего вектора "пристраивается" к концу предыдущего, в результате чего получается некоторая пространственная конструкция, вообще говоря, достаточно сложная. Суммарный вектор изображается стрелкой, начало которой совпадает с началом первого вектора суммы, а конец — с концом последнего вектора. От порядка слагаемых сумма

¹Из курса физики вы узнаете, что геометрия Евклида справедлива лишь для ограниченных областей пространства. В окрестностях компактных тел большой массы или на расстояниях, сравнимых с размером Метагалактики, геометрия становится более сложной.

векторов не зависит. Как и в случае скаляров, складывать можно только векторы **одинаковой размерности**.

Проекцией A_x вектора на ось называется длина отрезка, который отсекают на оси два перпендикуляра, опущенные из начала и конца вектора на ось (рис. 1.3). Эта длина берется со знаком плюс, если направление проекции от начала к концу вектора совпадает с направлением оси, и со знаком минус в противоположном случае. Поскольку мы рассматриваем свободные векторы, всегда можно совместить начало вектора с некоторой точкой на оси. Из рис. 1.3 очевидно, что проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между направлениями вектора и оси:

$$A_x = A \cos(\mathbf{A}, 0x). \quad (1.1)$$

Произведением скаляра на вектор $s\mathbf{A}$ называется вектор \mathbf{B} , длина которого равна произведению длины вектора A на модуль скаляра $|s|$, а направление совпадает с направлением вектора \mathbf{A} при $s > 0$ и противоположно ему при $s < 0$: $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$.

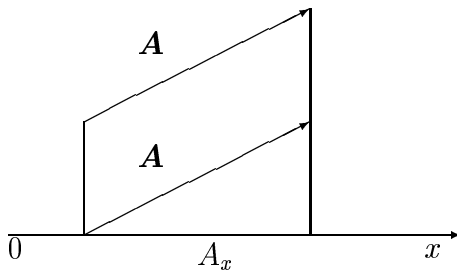


Рис. 1.3.

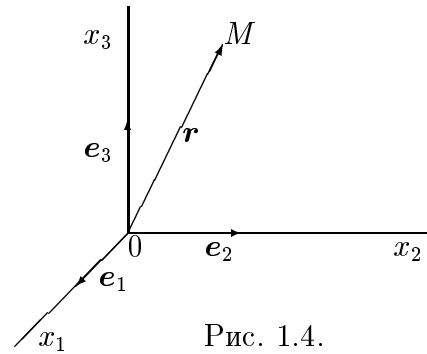


Рис. 1.4.

Выберем в трехмерном пространстве прямоугольную декартову систему координат, на осях которой будем откладывать координаты x_1, x_2, x_3 (унифицированное обозначение для x, y, z). Определим базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичной длины (орты), указывающие направления выбранных осей (рис. 1.4). Определим также проекции A_1, A_2, A_3 произвольного вектора \mathbf{A} на координатные оси. Если теперь составить три вектора $A_1\mathbf{e}_1, A_2\mathbf{e}_2, A_3\mathbf{e}_3$, то их сумма согласно приведенному выше правилу суммирования векторов как раз составит исходный вектор (рис. 1.5):

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3. \quad (1.2)$$

Мы получили разложение произвольного вектора по ортам выбранного базиса. Очень важным частным случаем является разложение радиуса-вектора:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \quad (1.3)$$

Перейдем теперь к различным способам умножения векторов. Определим **скалярное произведение двух векторов $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$** как скаляр, равный произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (1.4)$$

Скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Из определения скалярного произведения следует, что проекцию вектора на любую ось можно записать в виде его скалярного произведения на орт этой оси: $A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату его длины: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$.

Вычислим скалярные произведения базисных ортов. Поскольку орты взаимно перпендикулярны, то $\cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$, если $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$. К тому же $e_1 = e_2 = e_3 = 1$. Таким образом, согласно (1.3)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (1.5)$$

Величина, стоящая в правой части предыдущего равенства, возникает очень часто, поэтому она получила собственное имя — символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}, \text{ где } i, k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Теперь нетрудно, пользуясь разложением (1.3), результатом (1.4) и определением (1.5), записать скалярное произведение двух произвольных векторов через их декартовы компоненты:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i \cdot \sum_{k=1}^3 B_k \mathbf{e}_k = \sum_{i,k} A_i B_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i,k} A_i B_k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (1.7)$$

Обращаем внимание читателя на то, что под знаком суммы символ Кронекера "снимает" суммирование по одному из своих значков. Запись становится более компактной, если принять правило суммирования по повторяющемуся значку:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^3 A_i B_i.$$

Приведем два примера использования скалярного произведения в физике. Элементарная работа dR , производимая силой \mathbf{F} при малом перемещении $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 dx_3$ материальной точки, записывается в виде

$$dR = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.8)$$

Изменение кинетической энергии T той же материальной точки в единицу времени получится делением элементарной работы на малый промежуток времени dt :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость материальной точки.

Пример 1.1 В трехмерной цилиндрической системе координат положение точки M задается тремя числами (ρ, φ, z) , где координата z совпадает с соответствующей декартовой координатой, ρ — длина двумерного вектора, соединяющего ось Oz с точкой

M , φ — угол между проекцией вектора \vec{r} на плоскость xOy и осью Ox . Требуется: а) выразить цилиндрические координаты через декартовы; б) построить в точке M базисные цилиндрические орты \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z и выразить их через декартовы орты, рассмотренные выше. Каждый базисный орт должен определять направление, в котором увеличивается одноименная с ним координата при неизменных значениях двух других координат.

Решение. Координата z и орт \mathbf{e}_z ничем не отличаются от соответствующих декартовых величин. В частности, направление орта \mathbf{e}_z одинаково во всех точках пространства. Остальные две координаты и соответствующие орты принадлежат плоскостям, перпендикулярным оси Oz . Изобразим их на рис. 1.6. Линии, вдоль которых изменяется φ — окружности, координатные линии ρ — лучи. Из рисунка находим:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x). \quad (1.10)$$

Проецируя орты \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ на оси Ox , Oy , получаем:

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi. \quad (1.11)$$

Обращаем внимание на то, что направления ортов \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ меняются от точки к точке, тогда как декартовы орты всюду одинаковы. ■

Пример 1.2 В трехмерной сферической системе координат положение точки M задается тремя числами (r, ϑ, φ) , где координата r представляет собой расстояние от точки до начала координат, ϑ — угол между радиусом-вектором и осью Oz , φ — угол между проекцией радиуса-вектора на плоскость xOy и осью Ox . Требуется: а) выразить сферические координаты через декартовы; б) построить в точке M базисные сферические орты \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_ϑ и выразить их через декартовы орты.

Решение. Рисуем координатные линии сферической системы (лучи, исходящие из начала координат, на которых $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; окружности с общим центром в начале координат, проходящие через ось Oz , на которых $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; окружности с центрами на оси Oz в плоскостях, перпендикулярных этой оси, на которых $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, рис. 1.7). Действуя, как в предыдущем примере, находим:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}; \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta, \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{e}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \vartheta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При проецировании \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ на оси Ox , Oy следует сначала найти составляющие этих векторов в плоскости xOy , т.е. спроецировать их на эту плоскость, а после этого проецировать на оси. ■

Кроме скалярного (внутреннего) из двух векторов можно составить векторное (внешнее) произведение. По определению, **векторным произведением** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ называется вектор \mathbf{C} , длина которого $C = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq 0$, а направление перпендикулярно плоскости

векторов \mathbf{A}, \mathbf{B} и определяется **правилом правого винта**, т.е. вектор \mathbf{C} направлен по движению винта с обычной правой нарезкой, если его поворачивать по часовой стрелке от \mathbf{A} к \mathbf{B} . Абсолютная величина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{A}, \mathbf{B} . Обращаем внимание читателя на то, что векторы, получающиеся как векторные произведения, отличаются от обычных векторов, таких, как радиус-вектор \mathbf{r} или скорость \mathbf{v} , тем, что их направление определяется по соглашению (можно было бы принять правило левого винта, и проверяемые на опыте следствия такого выбора не изменились бы). Фактически векторное произведение задает только ось, вдоль которой вектор можно расположить в любую сторону. Такие векторы называются **аксиальными**. Их более строгое определение будет дано в разделе о тензорах.

Согласно определению векторного произведения, перестановка сомножителей меняет знак:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (1.14)$$

Условие параллельности двух векторов можно записать как равенство нулю их векторного произведения: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$; в частности, $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$. Легко сообразить, что векторные произведения декартовых ортов правой системы координат подчиняются правилам

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_l, \quad (1.15)$$

где числа i, k, l образуют последовательность 1,2,3 или любую их перестановку, не меняющую порядок следования (а при изменении порядка возникает знак минус). Это позволяет выразить векторное произведение через компоненты векторов-сомножителей:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \times (B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Запись компонентов векторного произведения становится более компактной, если использовать многокомпонентную величину ("тензор") с тремя индексами,² e_{ikl} , сходную с символом Кронекера и определяемую условиями:

$$\begin{aligned} e_{123} &= e_{231} = e_{312} = -e_{213} = -e_{321} = -e_{132} = 1, \\ e_{ikl} &= 0 \text{ при всех прочих сочетаниях значков.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Определение тензора e_{ikl} легко запомнить: его компоненты равны +1 при "правильном" сочетании значков 1,2,3 и равны -1 при их "неправильном" сочетании. Если же хотя бы два значка совпадают, то соответствующий компонент обращается в нуль. Компоненты векторного произведения записываются в виде

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = e_{ikl} A_k B_l \quad (1.18)$$

(суммы по повторяющимся значкам k, l !).

Примером векторного произведения может служить момент импульса частицы относительно начала отсчета системы координат:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

²Его иногда называют символом Леви-Чивиты, или единичным антисимметричным тензором III ранга.

где \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{p} — импульс частицы.

Рассмотрим теперь произведения трех векторов. Имеется три качественно различные возможности. Произведение $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ сводится к произведению скаляра на вектор, рассмотренному выше, и является вектором. **Смешанное произведение** $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C}$ представляет собой скаляр, т.е. величину, не имеющую направления³. Нетрудно понять его геометрический смысл. Смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, взятому со знаком плюс, если указанная тройка векторов — правая, и со знаком минус, если она левая. Отсюда вытекает возможность круговой перестановки сомножителей без изменения величины смешанного произведения:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} = [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} = [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] \cdot \mathbf{A}. \quad (1.19)$$

В этих трех выражениях различны только грани, принимаемые за основание параллелепипеда, а его объем остается неизменным. Если же порядок перестановки нарушается, то возникает знак минус. Смешанное произведение равно нулю, если векторы компланарны, т.е. все три вектора, если совместить их начала, располагаются в одной плоскости. В частности, смешанное произведение обращается в нуль, если два вектора одинаковы.

Двойное векторное произведение $\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$ представляет собой вектор. Оно допускает только перестановку сомножителей внутри каждого из двух векторных произведений, и каждая такая перестановка вносит знак минус. Перестановка вектора \mathbf{A} с любым из векторов \mathbf{B} и \mathbf{C} недопустима. Но можно разложить двойное векторное произведение по входящим в него векторам, используя их в качестве базисных. Очевидно, что таковыми могут выступать лишь \mathbf{B} и \mathbf{C} , так как проекция двойного векторного произведения на \mathbf{A} равна нулю. В соответствии с изложенным запишем

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = p\mathbf{B} + q\mathbf{C}, \quad (1.20)$$

где p и q — некоторые неизвестные скаляры, и попытаемся их определить. Поскольку в каждом слагаемом необходимо присутствие всех трех векторов, а p и q — скаляры, то искомые коэффициенты должны иметь вид $p = \lambda_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $q = \lambda_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, где λ_1, λ_2 — некоторые числа. Подставив эти коэффициенты в (1.20) и умножив затем скалярно обе части равенства на \mathbf{A} , получим $\lambda_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \lambda_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, откуда $\lambda_2 = -\lambda_1$. Последнее равенство можно сохранить в силе и в том случае, когда одно из скалярных произведений или оба равны нулю, так как сомножители при них можно выбрать произвольно. Неизвестное число λ_1 можно определить, придав векторам частные значения. Положим, например, в (1.20) $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{e} \perp \mathbf{B}$, где \mathbf{e} — единичный вектор. Пользуясь дважды правилом правого винта, находим $\mathbf{e} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{e}] = \mathbf{B}$, откуда следует $\lambda_1 = 1$. Тем самым мы вывели часто применяемую в практических расчетах формулу "бац минус цаб":

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.21)$$

Задачи

1.1 В примере 1.1 выразить декартовы координаты и орты через соответствующие величины цилиндрической системы координат.

³Точнее такие величины называются псевдоскалярами, если все три вектора — обычные, т.е. полярные.

1.2 В примере 1.2 выразить декартовы координаты и орты через соответствующие величины сферической системы координат.

1.3 Два направления \mathbf{n} , \mathbf{n}' определяются в сферической системе координат углами ϑ , φ и ϑ' , φ' . Найти косинус угла Θ между ними.

Ответ: $\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$.

1.4 Путем перебора значений индексов убедиться в эквивалентности формул (1.11) и (1.13).

1.5 Доказать тождество $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} = e_{ikl} A_i B_k C_l$.

1.6 Доказать тождества

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}); \\(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})] \mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \mathbf{D} \\ &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \mathbf{A}.\end{aligned}$$

1.7 Доказать тождество

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0.$$

1.8 Доказать тождество

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0.$$

1.9 Твердое тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения, его длина ω дает угловую скорость вращения в радианах в секунду. Записать в векторной форме линейную скорость \mathbf{v} произвольной точки твердого тела.

Ответ: $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, который отсчитывается от произвольного начала, лежащего на оси вращения. Почему результат не зависит от положения начала отсчета на оси вращения?

Рекомендуемая литература

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Высшая школа:М., 1966, 252 с.
2. Курбатова Г.И., Филиппов В.Б. Элементы тензорного исчисления. Изд-во С.-Петербургского университета:Санкт-Петербург, 1998, 233 с.

2 Производные

Производной от некоторой функции $y(x)$ в заданной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной, когда последнее приращение стремится к нулю:

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Слева приведены употребительные обозначения производной, а правое тождество дает определение приращения функции Δy . Для существования производной необходимо существование указанного выше предела *независимо от способа стремления* Δx к 0. Необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции является ее непрерывность. Однако, например, непрерывные функции, графики которых имеют изломы, не имеют производных в точках излома (в таких точках можно определить только левосторонние и правосторонние производные). В физических задачах функции, как правило, дифференцируемы, за исключением, быть может, отдельных точек.

Приращение функции, вызванное бесконечно малым приращением ее аргумента, называется ее (первым) дифференциалом:

$$dy = y'(x)dx. \quad (2.2)$$

Для сложной функции $y(u(x))$ имеем $dy = y'(u)du = y'(u)u'(x)dx$. Дифференциал можно использовать для приближенной оценки изменения функции при малом изменении аргумента: $\Delta y \approx y'(x)\Delta x$.

Производная функции в данной точке имеет простой и наглядный геометрический смысл:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

— это тангенс угла наклона к оси Ox касательной, построенной к графику функции в рассматриваемой точке. Производная характеризует скорость изменения функции. Если, например, материальная точка движется вдоль оси Ox и ее координата $x(t)$ изменяется со временем, то производная

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

— отношение малого пути dx , пройденного за малое время dt , к этому промежутку времени дает мгновенную скорость материальной точки. Эта скорость, в свою очередь, может зависеть от времени, и производная от скорости дает ускорение $w(t)$ материальной точки:

$$\frac{dv}{dt} = w(t).$$

Ускорение можно рассматривать как вторую производную от координаты (скорость — ее первая производная):

$$w(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Аналогичным образом можно определить производные высших порядков:

$$y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots; \quad y^{(n+1)} = \frac{dy^{(n)}(x)}{dx}. \quad (2.3)$$

Каждому изучающему физику *необходимо знать на память* производные основных элементарных функций, а также уметь дифференцировать суммы, $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$, произведения $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, сложные функции $F'(y(x)) = F'_y(y)y'_x(x)$ (индексы обозначают переменные, по которым берутся производные) и дроби: $(u(x)/v(x))' = u'(x)/v(x) - u(x)v'(x)/v^2(x)$.

Производные всех порядков нужны при разложении функций в степенные ряды:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots \quad (2.4)$$

— ряд Тейлора;

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (2.5)$$

— ряд Маклорена. Последний является частным случаем ряда Тейлора и получается из него, если в (2.4) сделать замены $x \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow x$. Для каждой функции $f(x)$ существует свой интервал значений x и Δx , в котором справедливы такие разложения (интервал сходимости соответствующего ряда). Разложения функций в степенные ряды практически очень важны, например, при оценке сложной функции для малых значений аргумента (или при его малом отклонении от заданного значения), когда достаточно учесть несколько первых членов ряда.

Задачи

2.1 Записать разложение в степенной ряд показательной функции $\exp(x)$.

Ответ:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

(ряд сходится и представляет функцию $\exp(x)$ при всех, в том числе и комплексных, значениях x).

2.2 То же для a^x , $a > 0$.

Ответ:

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}.$$

2.3 То же для $\sin x$.

Ответ:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \text{ — любое}$$

2.4 То же для $\cos x$.

Ответ:

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \text{ — любое.}$$

2.5 То же для $\ln(1+x)$.

Ответ:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad -1 < x \leq +1.$$

2.6 То же для $(1+x)^p$.

Ответ:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^p x^n, \quad C_n^p = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}, \quad |x| < 1, \quad p \text{ — действительное.}$$

3 Частные производные

В физике часто приходится иметь дело с функциями нескольких независимых переменных — например, координат точки на плоскости или в трехмерном пространстве. **Частной производной** функции нескольких аргументов называется производная по одному из аргументов при постоянном значении всех остальных:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \equiv U'_x(x, y) = \frac{d}{dx} U(x, y)|_{y=const} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \equiv U'_y(x, y) = \frac{d}{dy} U(x, y)|_{x=const} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{\Delta y}. \quad (3.2)$$

Аналогичным образом определяются вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \equiv U''_{xx}(x, y) = \frac{d^2}{dx^2} U(x, y)|_{y=const}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \equiv U''_{yy}(x, y) = \frac{d^2}{dy^2} U(x, y)|_{x=const}. \quad (3.3)$$

Здесь, однако, возникает новый объект — **смешанная производная**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \equiv U''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d}{dx} U(x, y)|_{y=const} \right) = \frac{d}{dy} U'_x(x, y)|_{x=const}. \quad (3.4)$$

Следует запомнить ее важное свойство: если смешанная производная существует и непрерывна, то она **не зависит от порядка дифференцирования**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \text{или} \quad U''_{xy}(x, y) = U''_{yx}(x, y). \quad (3.5)$$

Полный дифференциал (первый) функции нескольких переменных представляет собой приращение функции, линейно выражающееся через приращения всех ее аргументов:

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (3.6)$$

Все предыдущие формулы очевидным образом обобщаются на произвольное число независимых аргументов.

Дифференциальное выражение $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ в общем случае не равно полному дифференциалу какой-либо функции $U(x, y)$. Это будет иметь место лишь при выполнении равенства

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}, \quad (3.7)$$

что является следствием условия (3.5). Если (3.7) выполняется, то можно отождествить $A(x, y) = U'_x$, $B(x, y) = U'_y$ и $A dx + B dy = dU(x, y)$.

Разложение функции двух переменных в степенной ряд:

$$U(x, y) = U(0, 0) + xU'_x(00) + yU'_y(00) + \frac{x^2}{2}U''_{xx}(00) + xyU''_{xy}(00) + \frac{y^2}{2}U''_{yy}(00) + \dots \quad (3.8)$$

Задачи

3.1 Проверить равенство $f''_{xy} = f''_{yx}$ для следующих функций:

- a) $f(x, y) = 5x^2 + 8xy^2 + y^3$;
- b) $f(x, y) = \ln[(x + y)/(x - y)]$;
- c) $f(x, y) = y \exp(x) + x^2 y^3$.

3.2 Сделать то же самое для сложной функции $f(x, y) = \ln[(u + v)/(u - v)]$, где $u(x, y) = x$, $v(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

3.3 Треугольник имеет периметр s . Каковы должны быть его стороны x и y , чтобы его площадь S была наибольшей? Найти наибольшую площадь.

Указание. $S(x, y) = \sqrt{s(s - x)(s - y)(x + y - s)}$.

4 Первообразная функция и неопределенный интеграл

Первообразной функцией $F(x)$ для некоторой заданной функции $f(x)$ на заданном интервале (конечном или бесконечном) называется функция, удовлетворяющая в каждой точке интервала условию

$$F'(x) = f(x). \quad (4.1)$$

Поскольку при $C = \text{const}$ имеем $(F(x) + C)' = F'(x)$, то существует целое семейство первообразных для заданной $f(x)$, отличающихся на постоянную.

Совокупность всех первообразных для заданной $f(x)$ обозначается символом $\int f(x) dx$, который называется **неопределенным интегралом**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (4.2)$$

В силу определения (4.1) имеем

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad (4.3)$$

т.е. вычисление неопределенного интеграла — действие, обратное дифференцированию (вычислению производной). Отсюда следует, что интеграл от суммы равен сумме интегралов от каждого из слагаемых, а постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx, \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \quad (4.4)$$

Неопределенные интегралы в простейших случаях вычисляются с помощью таблицы производных:

$$\begin{aligned} \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1; \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln x + C, \quad x > 0; \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln(-x) + C, \quad x < 0; \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C, \quad x - \text{любого знака}; \\ \int \exp(x) dx &= \exp(x) + C; \\ \int \cos x dx &= \sin x + C; \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C; \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C; \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C; \\ \int \cosh x dx &= \sinh x + C. \end{aligned}$$

В более сложных случаях используются специальные приемы интегрирования. Не всегда интегралы от комбинаций элементарных функций выражаются через элементарные функции. Основные приемы вычисления интегралов:

1. Метод подстановки

1.1.

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b} \int t^n dt = \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{b(n+1)} + C = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, & n \neq -1; \\ \frac{1}{b} \ln|t| + C = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C, & n = -1. \end{cases}$$

Делаем подстановку $a+bx = t$, $b dx = dt$, $dx = dt/b$.

1.2.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+x+1| + C.$$

Подстановка: $t = x^2 + x + 1$, $dt = (2x + 1)dx$.

1.3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |\sqrt{x^2 + a} + x| + C.$$

Подстановка:

$$\sqrt{x^2 + a} + x = t, \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} + 1 \right) = dt, \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{dt}{t}.$$

2. Интегрирование по частям Пусть заданный интеграл можно представить в виде

$$\int f(x)dx = \int u(x)dv(x) = \int u(x)v'(x)dx,$$

где $f(x)$ содержит несколько множителей, часть из которых обозначена через $u(x)$, а другая вошла в $dv(x)$. Воспользовавшись тождеством $udv = d(uv) - vdu$, находим

$$\int f(x)dx = \int d(uv) - \int vdu = u(x)v(x) - \int vdu;$$

u и v подбираются так, чтобы последний интеграл можно было взять.

2.1.

$$\int x \exp(x)dx = x \exp(x) - \int \exp(x)dx = x \exp(x) - \exp(x) + C.$$

Выбираем $u(x) = x$, $\exp(x)dx = dv(x)$, $v(x) = \int \exp(x)dx = \exp(x)$; $vdu = \exp(x)dx$. Почему при вычислении $v(x)$ не написана произвольная постоянная? Что получится, если ее написать?

2.2.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

$u = \ln x$, $dv = dx$, $uv = x \ln x$, $du = dx/x$.

2.3.

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Выбираем $u = \arcsin x$, $du = dx/\sqrt{1-x^2}$, $dv = dx$, $v = x$. В последнем интеграле делаем подстановку

$$1 - x^2 = t, -2xdx = dt, -\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C.$$

В итоге

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Задачи

Взять следующие интегралы:

$$4.1. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a}x + C.$$

$$4.2. \int \frac{3x^2 - 6x + 1}{x^3 - 3x^2 + x - 1} dx = \ln |x^3 - 3x^2 + x - 1| + C.$$

$$\begin{aligned}
4.3. \quad & \int x \sin(x^2 + 1) dx = -\frac{\cos(x^2 + 1)}{2} + C. \\
4.4. \quad & \int \cos ax \cos bxdx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C. \\
4.5. \quad & \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C. \\
4.6. \quad & \int \exp(ax) \sin x dx = \frac{\exp(ax)(a \sin x - \cos x)}{1 + a^2} + C. \\
4.7. \quad & \int \frac{\tan x dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} = \frac{1}{2b} \ln |a + b \tan^2 x| + C.
\end{aligned}$$

5 Определенный интеграл

Определенным интегралом называется предел интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \quad (5.1)$$

При этом $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$ для любого n и любой отрезок $\Delta x_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Величина $f(x_i)$ — значение функции в произвольной точке отрезка Δx_i . Геометрический смысл интегральной суммы вполне ясен — в пределе это площадь, ограниченная графиком подынтегральной функции, поскольку каждое слагаемое $f(x_i) \Delta x_i$ дает площадь закрашенного прямоугольника (рис. 5.1). Площадь под осью абсцисс (на интервалах оси Ox , на которых $f(x) < 0$) войдет в интеграл со знаком минус. Определение (5.1) интеграла через интегральную сумму дает способ приближенного вычисления определенного интеграла (например, на компьютере):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \quad (5.2)$$

Чем больше n , тем точнее будет вычислен интеграл. Из (5.1) также следует, что интеграл по данному отрезку можно разбить на сумму интегралов

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5.3)$$

и что постоянную можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b \text{const} f(x) dx = \text{const} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.4)$$

Определенный интеграл вычисляется через первообразную функцию. Убедимся в том, что определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C \quad (5.5)$$

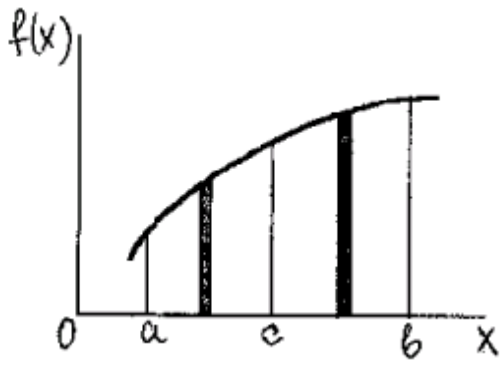


Рис. 5.1

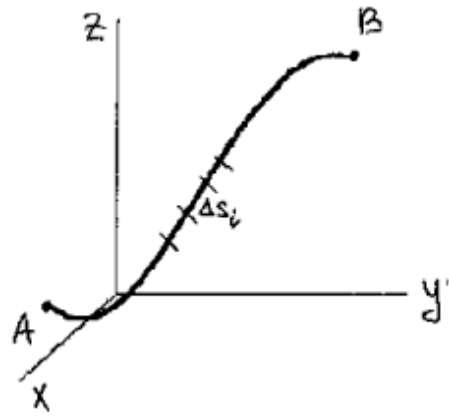


Рис 6.1.

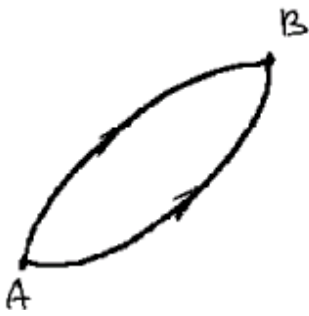


Рис. 6.2.



Рис. 6.3.

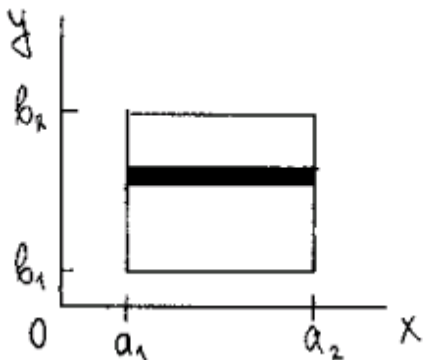


Рис 7.1.

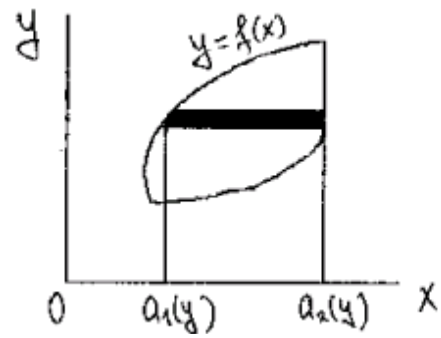


Рис. 7.2.

выражается через первообразную функцию $F(x)$ при некотором специальном выборе постоянной C . Для этого дадим переменной x приращение Δx и составим с помощью (5.5) приближенное выражение для производной $\Delta F/\Delta x$:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x)dx,$$

т.е. $dF/dx = f(x)$, что и является определением первообразной. Для определения постоянной в (5.5) положим $x = a$. Имеем $\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C$, $C = -F(a)$. Полагая в (5.5) $x = b$, находим общую формулу для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5.6)$$

Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования, а только от пределов и вида функции:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

Задачи

Вычислить следующие определенные интегралы (a, b — действительные числа):

$$5.1. \quad \int_0^{a/b} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{\pi}{4ab}. \quad 5.2. \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 + 2x}} = \frac{9}{5}\sqrt{6} - \frac{64}{15}.$$

$$5.3. \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}. \quad 5.4. \quad \int_0^1 \arcsin x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$5.5. \quad \int_0^3 f(x)dx = \frac{5}{6}, \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{если } 1 < x \leq 2; \\ (2 - x)^2, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

$$5.6. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1. \quad 5.7. \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$5.8. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}. \quad 5.9. \quad \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$5.10. \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n \end{cases} \quad (m, n - \text{целые, положительные}).$$

6 Контурные интегралы

Определенный интеграл можно рассматривать как интеграл, вычисленный по отрезку $[a, b]$ прямой линии — оси абсцисс. В физике часто встречаются интегралы по произвольному криволинейному контуру (линии) в трехмерном пространстве, замкнутому или незамкнутому. Для такого случая нужно несколько обобщить понятие определенного интеграла. Пусть в трехмерном пространстве задана непрерывная гладкая кривая AB (рис. 6.1). Назовем **интегралом по контуру** AB предел интегральной суммы, аналогичной (5.1), в которой лишь малые отрезки Δx_i оси абсцисс заменены элементами Δs_i длины рассматриваемого контура:

$$\int_A^B f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i, \quad \sum_{i=1}^n \Delta s_i = s_{AB}, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \Delta s_i = 0. \quad (6.1)$$

Точка (x_i, y_i, z_i) должна лежать на отрезке Δs_i .

Вычисление контурного интеграла сводится к вычислению некоторого определенного интеграла и особенно просто производится для плоского контура, заданного в декартовых координатах уравнением $y = y(x)$. Элемент длины контура можно записать в виде $dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$, а контурный интеграл сводится к интегралу по dx :

$$\int_A^B f(x, y) ds = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (6.2)$$

При вычислении контурного интеграла в трехмерном пространстве удобно задать уравнение контура в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ таким образом, чтобы при изменении параметра в заданных пределах $t_A \leq t \leq t_B$ координаты пробежали интересующий нас интервал значений: $x_A \leq x \leq x_B$, $y_A \leq y \leq y_B$, $z_A \leq z \leq z_B$. Тогда $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ и контурный интеграл

$$\int_A^B f(x, y, z) ds = \int_{t_A}^{t_B} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (6.3)$$

сводится к однократному интегралу по dt .

Особый и важный для физики случай — контурный интеграл от скалярного произведения некоторой векторной функции на векторный элемент длины контура:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (6.4)$$

где вектор $d\mathbf{s}$ имеет составляющие dx, dy, dz , т.е. дифференциалы координат не независимы, а представляют собой приращения **вдоль контура**. Такими интегралами выражается работа силы \mathbf{F} над материальной точкой, которая движется по заданной траектории от A до B , и многие другие физические величины. В общем случае значение такого интеграла определяется не только подынтегральной функцией, но и формой контура, и для двух разных контуров, соединяющих точки A и B (рис. 6.2), значения интеграла будут различны. Но есть очень важный частный случай.

Пусть существует дифференцируемая функция $U(x, y, z)$, такая, что ее частные производные равны компонентам вектора $\mathbf{F}(x, y, z)$:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{или } \mathbf{F} = -\nabla U(x, y, z), \quad (6.5)$$

где

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6.6)$$

— **оператор Гамильтона** (набла). Такой вектор называется **потенциальным**. Вектор $\nabla U \equiv \text{grad}U$ называется **градиентом** скалярной функции $U(x, y, z)$. Чтобы такое представление вектора было возможным, необходимо и достаточно, как уже было указано в разделе 3, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (6.7)$$

Имеем

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -dU \quad (6.8)$$

— полный дифференциал функции $U(x, y, z)$. Вычисляя интеграл, получаем

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = -\int_A^B dU = U_A - U_B, \quad (6.9)$$

где dU — приращение функции на малом отрезке $d\mathbf{s}$, $\int_A^B dU$ — полное приращение на пути AB . В этом случае интеграл вдоль контура не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек интегрирования.

Интегрируя вдоль замкнутого контура (рис. 6.3), будем иметь: $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_A - U_B$, $\int_B^A \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = U_B - U_A$,

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (6.10)$$

Интеграл по замкнутому контуру от $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ называется **циркуляцией вектора \mathbf{F}** вдоль контура. Циркуляция **потенциального вектора** вдоль любого замкнутого контура равна нулю (но произвольный вектор таким свойством не обладает!).

Пример 6.1 Показать, что производная от скалярной функции по направлению, определяемому единичным вектором \mathbf{l} , равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad}_l U \equiv (\mathbf{l} \cdot \nabla) U$$

.

Решение. Обозначим производную вдоль заданного направления \mathbf{l} через $\partial U / \partial l$. При смещении из точки с радиусом-вектором \mathbf{r} на расстояние s вдоль направления \mathbf{l} функция примет значение $U(x + l_x s, y + l_y s, z + l_z s)$. Производная в заданном направлении — это производная по s :

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial s} U(x + l_x s, y + l_y s, z + l_z s)|_{s=0} = \frac{\partial U}{\partial x} l_x + \frac{\partial U}{\partial y} l_y + \frac{\partial U}{\partial z} l_z = (\mathbf{l} \cdot \nabla) U(\mathbf{r}). \quad (6.11)$$

Задачи

6.1 Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 2px$ от вершины ($x = y = 0$) до точки (a, b) .

Решение. Полагаем $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + x'_y} dy$, где $x'_y = y/p$, и вычисляем определенный интеграл

$$s = \int_A^B ds = \int_0^b \sqrt{1 + (y/p)^2} dy = p \int_0^{b/p} \sqrt{1 + t^2} dt = pt\sqrt{1 + t^2} \Big|_0^{b/p} -$$

$$-p \int_0^{b/p} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 + t^2}} = -p \int_0^{b/p} \sqrt{1 + t^2} dt + b\sqrt{1 + (b/p)^2} + p \ln \left(\sqrt{1 + (b/p)^2} + \frac{b}{p} \right).$$

Отсюда находим интеграл $\int_0^{b/p} \sqrt{1 + t^2} dt$ и определяем длину дуги

$$s = \frac{b}{2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{p^2}} + \frac{p}{2} \ln \left(\frac{b}{p} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{p^2}} \right).$$

6.2 Вычислить длину дуги винтовой линии $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = at$ в пределах от $t = 0$ до $t = 2\pi$. Здесь r — радиус цилиндра, на который намотана линия, $2\pi a$ — длина одного шага вдоль оси Oz .

Ответ: $s = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2}$.

6.3 То же для цепной линии $y(x) = a \cosh(x/a)$ в пределах от $x = 0$ до $x = a$.

Ответ: $s = a \sinh(1)$.

6.4 Сила, действующая в плоскости xy , имеет компоненты $F_x(x, y) = x^2 + y$, $F_y(x, y) = 0$. Будет ли работа этой силы зависеть от формы пути? Почему?

Ответ: Да.

6.5 Найти потенциальную энергию, отвечающую силе $F_x(x, y) = x + y$, $F_y(x, y) = x - y^2$. Вычислить работу этой силы R между точками $(0, 0)$ и (a, b) .

Ответ: $R = \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{3}b^3$.

6.6 Записать оператор Гамильтона ∇

а) в цилиндрической системе координат; б) в сферической системе координат.

Ответ:

$$a) \quad \nabla = e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad (6.12)$$

$$b) \quad \nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (6.13)$$

7 Интегралы по поверхности и по объему

В физике часто требуется вычислять интегралы по некоторой поверхности S в трехмерном пространстве, замкнутой или незамкнутой. Интеграл по поверхности определяется по аналогии с определенным интегралом по контуру. Разделим поверхность S на малые участки ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Определим интеграл по поверхности следующим образом:

$$\int f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i, \quad \sum_i \Delta S_i = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta S_i \rightarrow 0, \quad (7.1)$$

где $f(x, y, z)$ — значение интегрируемой функции в некоторой точке элемента площади ΔS_i , а поверхность в пределе дробится на все меньшие элементы. Условия существования предела исследуются в курсе математики. Вполне достаточно, чтобы функция f была непрерывной, а поверхность S гладкой, т.е. в каждой ее точке можно было построить касательную плоскость. Фактически интеграл существует и при значительно более слабых ограничительных условиях, например, при конечном числе ребер на поверхности.

Вычисление такого интеграла обычно производится путем введения на поверхности некоторой локальной двумерной системы координат (u, v) . Особенно просто произвести такое вычисление, если поверхность плоская и имеет форму прямоугольника. Выбирая ее в качестве плоскости (x, y) , имеем $dS = dxdy$ и

$$\int_S f(x, y) dS = \int_S f(x, y) dxdy = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right) dy = \int_{b_1}^{b_2} f_1(y, a_1, a_2) dy. \quad (7.2)$$

Зафиксировав некоторое значение y , интегрируем сначала функцию $f(x, y)$ с постоянным y по x в заданных пределах. Полученная величина будет зависеть от y (и от пределов интегрирования по x), но не от x , см. (7.2)). После этого остается однократный интеграл по y , вычисляемый обычным образом (см. рис. 7.1). Например, для функции $f(x, y) = x \exp(y)$ находим

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) \exp(y); \quad \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dxdy = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) (\exp(b_2) - \exp(b_1)).$$

Если форма области интегрирования более сложная и задается уравнением $y = y(x)$, то пределы внутреннего интеграла будут зависеть от y (рис. 7.2).

Часто приходится вычислять интеграл по поверхности от векторной функции $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\int_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(x, y, z) dS, \quad (7.3)$$

где поверхность может быть замкнутой или незамкнутой, \mathbf{n} — орт внешней нормали. Такой интеграл называется потоком вектора \mathbf{A} через поверхность (на основе гидродинамической аналогии: если $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z)$ — скорость жидкости, то $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ — объем жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени).

Интеграл по трехмерному объему V представляет собой естественное обобщение двумерного интеграла (7.1). Трехмерный интеграл, подобно (7.2), вычисляется путем трехкратного повторного интегрирования.

Задачи

7.1 Вычислить интегралы по площади:

а) по квадрату $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $\int \cos^2 y dS$;

б) по треугольнику $0 \leq y \leq 5$, $0 \leq x \leq 5 - x$, $\int \sqrt{4 + x + y} dS$.

Ответ: $\pi^2/16$, $56/15$.

7.2 Вычислить интеграл $\int (1-x^2)\sqrt{1-y^2} dV$ по объему прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

Ответ: $4\pi/3$.

7.3 Вычислить путем интегрирования площадь эллипса и объем эллипсоида, задаваемые соответственно уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a , b , c — полуоси.

Решение. Для вычисления площади эллипса можно использовать формулу (7.2), положив в ней $f(x, y) = 1$. Но в данном случае удобнее ввести безразмерные декартовы координаты u и v и обобщенные полярные координаты r , φ по формулам $x = au = ar \cos \varphi$, $y = bu = br \sin \varphi$, где $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Производим вычисления:

$$S = \int_S dS = \int_S dx dy = ab \int_{S'} du dv = ab \int_{S'} r dr d\varphi = \pi ab.$$

Здесь S' — площадь единичного круга на плоскости u , v , в который переходит исходный эллипс. Величина $r dr d\varphi$ представляет собой элемент площади в полярных координатах.

Вычисляя аналогичным образом объем эллипсоида, находим $V = 4\pi abc/3$.

7.4 Определить центр тяжести одной восьмой части однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

расположенной в первом октанте.

Ответ: $x_c = 3a/8$, $y_c = 3b/8$, $z_c = 3c/8$.

7.5 Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) c$$

и плоскостью $z = c > 0$.

Ответ: $\pi abc/2$.

8 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется равенство, связывающее неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные (или дифференциалы) с независимой переменной x . Именно присутствие в уравнении производных или дифференциалов и делает его дифференциальным, а термин "обыкновенное" показывает, что имеется всего одна независимая переменная. При наличии нескольких независимых переменных и производных от них получаем дифференциальное уравнение в частных производных. В этой главе мы рассмотрим несколько простых методов, позволяющих решать некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y(x)$, которая обращает уравнение в тождество. Поскольку процесс решения включает интегрирование, а каждый неопределенный интеграл содержит произвольную постоянную, то **общее решение дифференциального уравнения содержит несколько независимых произвольных постоянных**. Их число равно порядку старшей производной в уравнении. **Частным решением** называется то, которое соответствует некоторым конкретным значениям постоянных интегрирования. В физических задачах требуется как правило находить частные решения, удовлетворяющие определенным **начальным и (или) граничным условиям**. Это означает, что значения искомой функции и ее производных (за исключением старшей) должны быть заданы при некоторых значениях независимой переменной. Число таких условий должно быть равно числу независимых постоянных интегрирования, и они позволяют определить эти постоянные. В частности, в классической механике задаются обычно значения координат и скоростей в начальный момент времени (начальные условия). При решении конкретных задач сначала находят общее решение, а затем конкретизируют его, находя постоянные интегрирования из начальных условий. Кроме общих и частных решений, уравнение может иметь **особые решения**, не содержащие произвольных постоянных.

1. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Это — уравнения вида

$$p(x)q(y)dy + r(x)s(y)dx = 0 \quad (8.1)$$

или приводящиеся к такому виду в результате тождественных преобразований. Деление обеих частей уравнения на $p(x)s(y)$ позволяет разделить переменные:

$$\frac{q(y)dy}{s(y)} + \frac{r(x)dx}{p(x)} = 0, \quad (8.2)$$

после чего можно проинтегрировать оба слагаемых и получить общее решение в виде

$$\int \frac{q(y)dy}{s(y)} + \int \frac{r(x)dx}{p(x)} = C, \quad (8.3)$$

где имеется одна постоянная интегрирования. Если интегралы берутся в элементарных функциях, то из этого соотношения можно найти явный вид функции $y(x, C)$.

2. Линейные уравнения первого порядка имеют вид

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (8.4)$$

(искомая функция и ее производная входят **линейно**). Введение новой неизвестной функции $u(x)$,

$$y(x) = u(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right), \quad (8.5)$$

позволяет получить для нее простое уравнение и найти его общее решение (автор просит читателя выполнить эти простые вычисления самостоятельно):

$$u(x) = \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + C. \quad (8.6)$$

Общее решение исходного уравнения определяется с помощью (8.5) и (8.6):

$$y(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx + C \exp\left(-\int p(x)dx\right). \quad (8.7)$$

Заметим, что оно является суммой общего решения **однородного** (с нулевой правой частью) уравнения и частного решения **неоднородного** уравнения, соответствующего заданной правой части. Частное решение неоднородного уравнения не содержит произвольных постоянных и линейно зависит от неоднородного члена $q(x)$, обращаясь в нуль при $q \equiv 0$. В виде такой суммы можно представить решение линейного уравнения любого порядка.

3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (8.8)$$

где коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) мы будем считать вещественными постоянными числами (в общем случае они комплексны). Частное решение уравнения ищем в виде $y(x) = \exp(kx)$, где k — неизвестная постоянная, и для ее определения получаем **характеристическое** алгебраическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (8.9)$$

(читателю необходимо в этом убедиться, подставив частное решение в уравнение (8.8)). Уравнение (8.9) имеет n корней k_1, k_2, \dots, k_n , действительных или попарно комплексно сопряженных, причем среди тех и других могут быть кратные. Каждому корню k_l отвечает частное решение $\exp(k_l x)$, но вид общего решения зависит от кратности корней. Если все корни различны, то общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x) + \dots + C_n \exp(k_n x). \quad (8.10)$$

Если среди корней есть комплексные, а общее решение должно быть действительным, то вклад каждой пары комплексно сопряженных корней $k = \alpha + i\beta$ и $k^* = \alpha - i\beta$ в общее решение можно записать в виде $A \exp(\alpha x) \cos \beta x + B \exp(\alpha x) \sin \beta x$. Если же некоторый корень k имеет кратность s , то он порождает s частных решений вида

$$\exp(kx), x \exp(kx), x^2 \exp(kx), \dots, x^{s-1} \exp(kx),$$

которые войдут в общее решение с произвольными коэффициентами.

Пример 8.1 Записать действительное общее решение уравнения $y'' + \kappa y = 0$, $\kappa > 0$.

Решение. В данном случае корни характеристического уравнения чисто мнимые: $k_1 = i\sqrt{\kappa}$, $k_2 = -i\sqrt{\kappa}$. Общее решение можно записать в разных формах:

$$y(x) = \operatorname{Re}(C \exp(k_1 x)) = |C| \cos(\sqrt{\kappa}x + \alpha) = A \cos(\sqrt{\kappa}x) + B \sin(\sqrt{\kappa}x).$$

Здесь постоянная C комплексна, $|C|$ — ее модуль, α — аргумент (фаза), постоянные A и B действительны. Они определяются из начальных условий.

4. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Этим методом можно решить в квадратурах (т.е. свести к вычислению интегралов) **линейное неоднородное** уравнение, если известно общее решение соответствующего **однородного** уравнения. Продемонстрируем этот метод на примере уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (8.11)$$

Пусть общее решение однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ имеет вид $y(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$, где φ и ψ — частные решения, удовлетворяющие однородному уравнению, а A и B — постоянные. Ищем общее решение **неоднородного** уравнения в виде $y(x) = A(x)\varphi(x) + B(x)\psi(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ теперь неизвестные функции. Дифференцируя это решение, получим

$$y'(x) = (A\varphi' + B\psi') + (A'\varphi + B'\psi).$$

Поскольку неизвестных функций две, а уравнение одно, то эти функции можно подчинить дополнительному условию. Выберем его в виде

$$A'\varphi + B'\psi = 0. \quad (8.12)$$

Подставив искомое решение в уравнение (8.11), получим

$$A(\varphi'' + p\varphi' + q\varphi) + B(\psi'' + p\psi' + q\psi) + A'\varphi' + B'\psi' = f(x).$$

Выражения в скобках обращаются в нуль в силу того, что φ и ψ удовлетворяют однородному уравнению. Остается простое уравнение вида

$$A'\varphi' + B'\psi' = f(x). \quad (8.13)$$

Уравнения (8.12), (8.13) представляют собой алгебраическую систему относительно производных A' и B' , которые вычисляются элементарным методом:

$$A'(x) = \frac{\psi(x)f(x)}{W(x)}, \quad B'(x) = -\frac{\varphi(x)f(x)}{W(x)}, \quad (8.14)$$

где $W(x) = \varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)$. Комбинация частных решений и их производных, образующая $W(x)$, называется **определителем Вронского (вронскианом)** данного уравнения. Функции $A(x)$ и $B(x)$ находятся из (8.14) интегрированием.

Рекомендуемая литература к разделам 2 – 8:

Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. М.: Наука, 1979.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.

Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.

В качестве практических занятий по решению дифференциальных уравнений рекомендуем читателю прорешать приведенные ниже задачи по механике. Математический материал, изложенный ранее, вполне достаточен для решения указанных задач. Механика Ньютона во многом стимулировала создание дифференциального и интегрального исчисления.

Задачи по механике для тренировки

8.1 Частица с массой m и зарядом e движется в электрическом поле $\mathbf{E}(z) = e_x E_0 \sin(z/a)$, где E_0 и a — постоянные. Начальные условия: $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = v_0 e_z$. Найти зависимость координат от времени $\mathbf{r}(t)$.

8.2 Та же частица движется во взаимно перпендикулярных полях $E_1 \cos \omega t$ и $E_2 \sin \omega t$. При каких начальных условиях и значениях амплитуд E_1 , E_2 траекторией частицы будет обыкновенная циклоида? (Уравнение циклоиды в параметрической форме: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, a — постоянная, t — параметр).

8.3 На частицу с зарядом e и массой m действуют однородное магнитное поле \mathbf{B} и сила трения $\mathbf{f} = -\mu \mathbf{v}$. Начальная кинетическая энергия частицы T_0 . Вычислить зависимость кинетической энергии от времени.

8.4 Две частицы с одинаковыми массами m но с разными зарядами $+e$ и $-e$ в начальный момент покоились на расстоянии $2h$ друг от друга. Через какой промежуток времени Δt они столкнутся?

8.5 Материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x(t) = a \cosh(kt)$, $y(t) = b \sinh(kt)$. Найти действующую на нее силу как функцию координат. Указать сохраняющиеся в этом случае динамические величины.

8.6 Частица с зарядом e и массой m попадает в однородное тормозящее электрическое поле \mathbf{E} со скоростью \mathbf{u} , параллельной направлению поля. Определить время, за которое частица вернется в начальную точку.

8.7 Материальная точка с массой m движется в потенциальном поле $U(x) = -ax$ при $x < 0$, $U(x) = bx^2/2$ при $x > 0$. Вычислить период колебаний как функцию полной энергии E .

8.8 При $t = 0$ частица с массой m и зарядом e влетает в полупространство с однородным магнитным полем \mathbf{B} . Начальная скорость частицы \mathbf{u} перпендикулярна \mathbf{B} . Найти ее траекторию.

8.9 Сделать то же самое для случая, когда начальная скорость частицы параллельна магнитному полю.

8.10 Сделать то же самое для случая, когда частица влетает в однородное электрическое поле \mathbf{E} с начальной скоростью \mathbf{u} , перпендикулярной полю.

8.11 Начальная скорость частицы \mathbf{u} ориентирована произвольным образом в однородном магнитном поле \mathbf{B} . Путем решения уравнения движения найти зависимость скорости от времени $\mathbf{v}(t)$.

8.12 На заряженную частицу действуют однородные поля — электрическое \mathbf{E} , направленное вдоль оси $0x$ и магнитное \mathbf{B} , направленное по оси $0z$. Найти закон движения частицы при начальных условиях общего вида. Возможно ли решение задачи в рамках классической механики при произвольном соотношении между \mathbf{E} и \mathbf{B} ?

8.13 Частица с массой m совершает плоское движение в поле $U(x, y) = k(x^2 + y^2)/2$, $k = const$. Начальные условия: при $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = b\sqrt{k/m}$. Найти траекторию движения.

8.14 Орудие установлено на холме высотой h . Начальная скорость снаряда \mathbf{u} направлена под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α дальность полета снаряда максимальна (сопротивлением воздуха пренебречь).

8.15 Шарик массы m падает с высоты h и упруго отскакивает от горизонтальной плоскости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти высоту подъема шарика после удара о плоскость.

8.16 Линейный осциллятор с собственной частотой ω в начальный момент $t = 0$ покоится в состоянии равновесия. В этот момент на него начинает действовать постоянная сила $F = const$. Найти движение осциллятора в последующие моменты.

8.17 На покоящийся линейный осциллятор при $t = 0$ начинает действовать вынуждающая сила $F(t) = f \exp(-at)$, где f и a — постоянные. Найти амплитуду колебаний A , которая установится при $t \gg 1/a$.

8.18 На линейный осциллятор с частотой ω действует вынуждающая сила $F(t) = f \cos \Omega t$. Найти общее решение уравнения колебаний осциллятора.

8.19 На линейный осциллятор с собственной частотой ω действует сила трения $-m\gamma\dot{x}$. Начальные условия: $x(0) = a$, $\dot{x} = 0$. Исследовать колебания осциллятора при $\omega > \gamma/2$. Определить, в частности, в пределе $\gamma \ll \omega$ добротность осциллятора $Q = 2\pi\bar{E}/\Delta\bar{E}$, где E и ΔE — полная энергия осциллятора и ее диссипация за период колебаний. Чертой обозначено усреднение по периоду.

8.20 На осциллятор с трением предыдущей задачи, первоначально покоившийся, начинает действовать сила $F(t) = f \cos \Omega t$. Исследовать установившиеся колебания осциллятора при разных соотношениях между собственной частотой и частотой вынуждающей силы.

ОТВЕТЫ

8.1

$$z = v_0 t, \quad x = -\frac{eE_0 a^2}{m v_0^2} \sin \frac{v_0 t}{a}.$$

8.2 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0, \quad E_1 = E_2.$

8.3 $T(t) = T_0 \exp(-2\mu t/m).$

8.4 $\Delta t = (\pi h/e)\sqrt{mh/2}.$

8.5 $\mathbf{F} = mk^2 \mathbf{r}; \quad \mathbf{M} = kabe_z, \quad E = mk^2(b^2 - a^2)/2.$

8.6 $\Delta t = 2mu/eE.$

8.7 $T(E) = \pi\sqrt{m/b} + \sqrt{8mE/a^2}.$

8.8 *В полупространстве, занятом полем, траектория представляет собой полуокружность радиуса $R = \tau c u/eB$, где c — электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме).*

8.9 *Прямая линия вдоль первоначального направления движения частицы.*

8.10 $x(z) = (eE/2m)(z/u)^2$, где z — координата в направлении начальной скорости, x — координата вдоль электрического поля.

8.11 $v_x = u_\perp \cos(\Omega t - \alpha), \quad v_y = -u_\perp \sin(\Omega t - \alpha), \quad v_z = u_z, \quad \Omega = eB/mc.$

8.12 *При $E < B$ имеем*

$$v_x = u_\perp \cos(\Omega t - \alpha), \quad v_y = -u_\perp \sin(\Omega t - \alpha) - cE/B, \quad v_z = u_z, \quad \Omega = eB/mc.$$

При $E \geq B$ скорость частицы со временем превысит предельную возможную скорость (скорость света c), что указывает на неприменимость ньютоновской механики в этом случае.

8.13 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$

8.14

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2(1 + gh/u^2)}}$$

8.15

$$\text{Высота подъема} = \frac{m}{2k} \ln \left[2 - \exp \left(-\frac{2kh}{m} \right) \right].$$

Уравнение движения имеет вид $\ddot{x} \mp k\dot{x}^2/m + g = 0$, где знак минус соответствует движению вверх, а плюс - вниз. Умножая обе части уравнения на dt/dz , и вводя обозначение $dz/dt = u$, находим $du/dz \mp ku/m + g/u = 0$. Еще раз вводим новую независимую переменную $w(z) = u^2(z)$ и получаем для нее простое уравнение с разделяющимися переменными $dw/dz = \pm 2kw/m - 2g$. Разделяем переменные,

$$\frac{dw}{\pm 2kw/m - 2g} = dz$$

и после этого берем неопределенные интегралы от обеих частей равенства по dw и по dz соответственно, не забывая написать постоянную интегрирования, что дает после возвращения к исходной переменной $z(t)$

$$z^2 \mp \frac{mg}{k} = C_{\pm} \exp \left(\pm \frac{2kz}{m} \right).$$

Дальнейший расчет состоит в правильном определении постоянных интегрирования и других необходимых величин на двух этапах движения (вниз и вверх).

$$8.16 \quad x(t) = (F/m\omega^2)(1 - \cos\omega t).$$

$$8.17 \quad A = \frac{af}{m(\omega^2 + a^2)^{3/2}}.$$

8.18

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t,$$

где A , α — произвольные постоянные.

8.19 $x(t) = ae^{-\lambda t} \cos \omega' t$, $\lambda = \gamma/2m$, $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$, $Q \approx \omega/2\lambda$. При усреднении по периоду ввиду малости затухания можно считать множитель $\exp(-\lambda t)$ постоянным: $\overline{\Delta E} \approx (2\pi\lambda ka^2/\omega) \exp(-2\lambda t)$, $\overline{E} \approx (ka^2/2) \exp(-2\lambda t)$.

8.20 Установившиеся колебания осциллятора происходят с частотой вынуждающей силы:

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{(\omega^2 - \Omega^2) \cos \Omega t - 2\lambda\Omega \sin \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}.$$

Наибольшего значения амплитуда колебаний достигает при резонансе, $\omega = \Omega$:

$$x(t) = -A \sin \Omega t, \quad A = \frac{Qf}{m\Omega^2}, \quad Q = \frac{\Omega}{2\lambda}.$$

Здесь Q — добротность осциллятора (см. предыдущую задачу). Чем выше добротность осциллятора, тем больше резонансное значение амплитуды.

9 Элементы векторного анализа

Скалярные или векторные функции, изображающие распределение различных физических величин в трехмерном пространстве, подчас называют полями соответствующих величин. Так, можно говорить о поле температур $T(x, y, z)$ или давлений $p(x, y, z)$ в атмосфере, поле скоростей движущейся жидкости или газа $\mathbf{u}(x, y, z)$ и т.д. Производные и интегралы от таких скалярных и векторных функций обладают некоторыми общими математическими свойствами, очень важными для физических приложений. С этими свойствами нужно познакомиться и усвоить их заранее. Только в этом случае можно будет успешно изучить и понять до конца такие разделы физики, как теория электромагнитных явлений, механика жидкостей, газов и твердых тел, квантовая физика и квантовая теория поля.

Градиент и производные по направлению от скалярной и векторной функций. Векторные линии. Все дифференциальные операции над скалярными и векторными полями выражаются с помощью оператора ∇ , введенного в разделе 6. Мы уже познакомились там с градиентом скалярной функции

$$\mathit{grad} U(x, y, z) \equiv \nabla U(x, y, z) = \mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (9.1)$$

который представляет собой, таким образом, потенциальный вектор. Важно понять, что градиент направлен всегда в сторону возрастания U по нормали к поверхности постоянного значения скалярного поля $U(x, y, z) = \mathit{const}$. Это следует из того, что при дифференцировании последнего равенства получим $d\mathbf{r} \cdot \nabla U = 0$. Поскольку здесь $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к поверхности $U = \mathit{const}$, градиент перпендикулярен этой поверхности. Проекция же градиента на направление \mathbf{l} , как было показано в примере 6.1, дает **производную от U в заданном направлении**:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \mathbf{l} \cdot \nabla U(x, y, z), \quad |\mathbf{l}| = 1. \quad (9.2)$$

Последнее выражение имеет смысл и в применении к произвольному вектору $\mathbf{A}(x, y, z)$: величина $(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{A}(x, y, z)$ представляет собой **производную от вектора \mathbf{A} в направлении \mathbf{l}** . Это следует из того, что оператор $(\mathbf{l} \cdot \nabla)$ должен быть применен к каждой проекции \mathbf{A} и даст соответствующую производную, а их совокупность будет иметь смысл производной от всего вектора в заданном направлении.

Наглядное представление о структуре векторного поля \mathbf{A} дают **векторные линии** — это такие линии, касательные к которым в каждой точке показывают направление вектора \mathbf{A} в этой точке. Нетрудно записать систему уравнений, из которой можно найти векторные линии заданного поля $\mathbf{A}(x, y, z)$. Условие параллельности малого элемента $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ векторной линии и вектора \mathbf{A} можно записать в виде $\mathbf{A} \times d\mathbf{l} = 0$. Записав это векторное равенство в проекциях на соответствующие оси, получим дифференциальные уравнения для двух семейств поверхностей, линии пересечения которых и представляют собой искомые векторные линии. Например, в декартовых координатах будем иметь

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}. \quad (9.3)$$

Векторные линии любого потенциального вектора перпендикулярны поверхностям равного потенциала $U(x, y, z) = \mathit{const}$. Это следует из свойств градиента скалярной функции.

Дивергенция и ротор. Интегральные теоремы. Рассмотрим теперь действие векторного оператора ∇ на произвольный вектор \mathbf{A} без участия какого-либо третьего вектора. Как мы знаем, из двух векторов можно составить произведения двух типов: скалярное

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (9.4)$$

и векторное

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (9.5)$$

Обе эти величины играют важнейшую роль в векторном анализе и носят название **дивергенции** (скаляр!) и **ротора** (вектор!). В левых частях равенств приведены их буквенные обозначения. В правых частях указаны их явные выражения, которые имеют приведенный вид **только в декартовых координатах**. Чтобы лучше осознать их математический и физический смысл, рассмотрим прежде всего другие определения этих важных величин, менее формальные и более наглядные, хотя и несколько более сложные. Но последний недостаток искупается тем, что определения, о которых пойдет речь, в отличие от (9.4), (9.5), не зависят от выбора системы координат. Начнем с дивергенции.

Выберем точку M , в которой мы хотим определить дивергенцию векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Окружим эту точку замкнутой гладкой поверхностью S , внутри которой заключен некоторый объем ΔV , и определим в каждой точке поверхности внешнюю нормаль \mathbf{n} . Векторным элементом поверхности $d\mathbf{S}$ будем называть произведение $\mathbf{n}dS$. Интеграл по замкнутой поверхности $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, как уже отмечалось в главе 7, дает поток вектора \mathbf{A} через поверхность S . Дадим теперь определение дивергенции (по-русски — расходимости), отличное от (9.4):

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.6)$$

Здесь предполагается, что объем ΔV стягивается в точку M ; кружок на знаке интеграла означает замкнутую поверхность.

Убедимся в том, что определения (9.4) и (9.6) при использовании декартовых координат эквивалентны. Для этого выберем объем $\Delta V = dV = dxdydz$ в виде малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz . Воспользовавшись малостью граней параллелепипеда, запишем приближенное выражение для поверхностного интеграла:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &\approx [A_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) - A_x(x, \bar{y}, \bar{z})]dydz \\ &+ [A_y(\bar{x}, y+dy, \bar{z}) - A_y(\bar{x}, y, \bar{z})]dxdz + [A_z(\bar{x}, \bar{y}, z+dz) - A_z(\bar{x}, \bar{y}, z)]dxdy \\ &\approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (9.7)$$

При оценке интегралов по шести отдельным граням использована теорема о среднем, величины \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} — это значения координат в некоторой точке соответствующей грани. Учтено также, что нормаль имеет противоположные направления на противоположных гранях, а при стягивании объема в точку M все координаты принимают значения, соответствующие этой точке. Используя результат (9.7) и подставляя его в (9.6), убеждаемся,

что определение дивергенции (9.6) при использовании декартовых координат приводит к формуле (9.4). Таким образом, дивергенция в некоторой точке отлична от нуля, если существует ненулевой поток вектора через малую замкнутую поверхность, окружающую данную точку. Внутри поверхности должен существовать источник векторного поля, создающий поток. Поэтому дивергенция характеризует плотность источников поля.

Важно подчеркнуть, что выражение дивергенции в инвариантной форме $\nabla \cdot \mathbf{A}$ является универсальным, применимым в любых криволинейных координатах, если только оба вектора, ∇ и \mathbf{A} , правильно записаны в соответствующих координатах. Примененный выше прием вычисления интеграла по малой поверхности можно использовать для получения явных выражений дивергенции в наиболее употребительных сферических и цилиндрических координатах. Следует выбирать форму объема каждый раз таким образом, чтобы на каждой из его боковых поверхностей оставалась постоянной одна из координат.

Выведем теперь важную интегральную теорему, которая позволяет преобразовывать интеграл по поверхности в интеграл по объему и наоборот. Выберем произвольный конечный объем V , ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S . Разобьем его на малые ячейки ΔV_i , каждая из которых ограничена соответствующей поверхностью ΔS_i . У ячеек, примыкающих к внешней поверхности S , часть ограничивающих их поверхностей будет совпадать с S . Все остальные участки поверхностей S_i будут общими для двух соседних ячеек. Пользуясь малостью каждой из ячеек, воспользуемся соотношением (9.6), придав ему приближенную форму

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i. \quad (9.8)$$

Просуммируем теперь левую и правую части последнего приближенного равенства по i и перейдем к пределу, устремляя объем каждой ячейки к нулю, а их число — к бесконечности. Левая часть равенства перейдет при этом в интеграл по полному объему V от дивергенции \mathbf{A} : $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$. В правой части равенства интегралы по внутренним участкам поверхностей S_i взаимно сократятся, так как внешние нормали для двух соседних ячеек имеют прямо противоположные направления. Останется лишь интеграл по внешней поверхности S , которая ограничивает полный объем V . В итоге мы получим точное интегральное соотношение

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (9.9)$$

которое называется в русскоязычной литературе **теоремой Остроградского-Гаусса** (в западных изданиях фамилия Остроградского опускается).

Ротор (вихрь) векторного поля допускает определение, аналогичное определению (9.6) дивергенции. Задаем в точке M некоторое направление единичным вектором \mathbf{n} . Построим маленькую плоскую площадку ΔS , содержащую точку M и перпендикулярную \mathbf{n} , и определим направление обхода по ограничивающему эту площадку контуру l , согласованное с направлением \mathbf{n} правилом правого винта. Проекция ротора на направление \mathbf{n} в точке M определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (9.10)$$

где интеграл представляет собой циркуляцию вектора \mathbf{A} вдоль замкнутого контура l .

В тождественности определений (9.5) и (9.10) можно убедиться, вычислив циркуляцию в (9.10). Направим \mathbf{n} вдоль оси $0z$ и выберем прямоугольную площадку $\Delta S = dS = dxdy$.

Используя, как и при вычислении выше интеграла по поверхности, теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &\approx [A_y(x + dx, \bar{y}, z) - A_y(x, \bar{y}, z)]dy + [A_x(\bar{x}, y, z) - A_x(\bar{x}, y + dy, z)]dx \\ &\approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Подставив этот результат в (9.10) и перейдя к пределу, получим точное выражение для $rot_z \mathbf{A}$ в декартовых координатах, совпадающее с (9.5). Аналогичным образом можно найти другие проекции вихря. Вихрь будет отличен от нуля, если линии вектора \mathbf{A} закручиваются — имеют замкнутую или спиралеобразную форму.

Из определения вихря (9.10) можно вывести интегральное соотношение, аналогичное теореме Остроградского-Гаусса. Определим произвольную трехмерную незамкнутую поверхность S , ограниченную контуром l , и в каждой точке поверхности нормаль \mathbf{n} . Разделим поверхность на малые части ΔS_i , каждая из которых ограничена контуром l_i . Для каждой такой площадки можно записать на основе (9.10) приближенное соотношение

$$rot_n \mathbf{A} \Delta S_i \approx \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i. \quad (9.12)$$

Суммируя обе части приближенного равенства по i и переходя к пределу бесконечно малых площадок, получаем точное равенство (**теорему Стокса**):

$$\int_S rot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (9.13)$$

В правой части остается интеграл по внешнему контуру, ограничивающему поверхность S . Все интегралы по внутренним контурам сокращаются. Теорема Стокса связывает интеграл от потока ротора через поверхность с циркуляцией вектора вдоль контура, ограничивающего эту поверхность.

Соленоидальные и потенциальные (безвихревые) векторы. Пусть векторное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ во всем пространстве удовлетворяет условию

$$div \mathbf{H} = 0 \quad (9.14)$$

(вектор \mathbf{H} в этом случае называется **соленоидальным**). Таким свойством обладает, например, магнитное поле. Можно доказать (мы этого делать не будем), что условие (9.14) необходимо и достаточно для того, чтобы вектор \mathbf{H} можно было представить в виде вихря другого вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H} = rot \mathbf{A}. \quad (9.15)$$

Легко убедиться с использованием правил векторного дифференцирования, что условие (9.14) выполняется при любом \mathbf{A} :

$$div \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla] \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Потенциальным вектором, как уже отмечалось в разделе 6, называется вектор, представимый в форме градиента некоторой скалярной функции:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}) \equiv -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (9.16)$$

Необходимыми и достаточными условиями потенциальности вектора являются равенства вида (6.7), которые в векторной форме дают

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (9.17)$$

Используя определение потенциального вектора (9.16) и выражая операцию *rot* через оператор ∇ , убеждаемся, что равенство (9.17) выполняется тождественно для любой функции $U(\mathbf{r})$.

Дифференциальные операции второго порядка. Они возникают, если оператор ∇ применяется к выражениям, уже содержащим этот оператор, т.е. к ∇U , $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$. Пользуясь правилами векторной алгебры, находим

$$\nabla \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = (\nabla \cdot \nabla)U(\mathbf{r}) = \nabla^2 U(\mathbf{r}) = \Delta U(\mathbf{r}), \quad (9.18)$$

где **оператор Лапласа** $\Delta = \nabla^2$ имеет в декартовых координатах вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (9.19)$$

Это — очень важный оператор, возникающий почти во всех задачах, когда требуется описать на математическом языке достаточно сложное физическое явление.

Далее,

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A}. \quad (9.20)$$

Хотя такая комбинация производных возникает нередко, для нее не придумано более компактного буквенного обозначения.

Последняя операция такого рода носит название двойного вихря. Она преобразуется с помощью формулы векторной алгебры (1.21) "бац минус цаб" (не забывая ставить дифференцируемую векторную функцию правее всех действующих на нее операторов):

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (9.21)$$

Задачи

9.1 Воспользовавшись декартовыми, сферическими и цилиндрическими координатами (см. (6.6), (6.12), (6.13)), вычислить $\text{div } \mathbf{r}$, $\text{rot } \mathbf{r}$, $\text{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{l} — постоянный вектор.

Ответ: 3, 0, \mathbf{l} , \mathbf{l} .

9.2 Показать, что

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

9.3 Вычислить

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \text{const.}$$

Решение. Поскольку градиент содержит первые производные по координатам, можно записать

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{\text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \text{grad} \frac{1}{r^3}.$$

Используя результаты примеров (9.1), (9.2), получим окончательно

$$\text{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

9.4 Вычислить

$$\text{rot} \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Ответ:

$$\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

9.5 Пользуясь правилами векторной алгебры и анализа и не переходя к проекциям на оси координат, доказать важные тождества, которыми приходится часто пользоваться в практических расчетах:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi; \quad (9.22)$$

$$\text{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad} \varphi; \quad (9.23)$$

$$\text{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{grad} \varphi; \quad (9.24)$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{B}; \quad (9.25)$$

$$\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}; \quad (9.26)$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (9.27)$$

Здесь φ, ψ — скалярные, а \mathbf{A}, \mathbf{B} — векторные функции координат.

9.6 Доказать, что $(\mathbf{A} \cdot \nabla) = -\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{A}$, если $\mathbf{A}^2 = \text{const.}$

9.7 Пользуясь сферическими координатами, построить семейство линий, касательных к вектору

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Решение. Направляем полярную ось вдоль вектора \mathbf{m} и прецируем вектор \mathbf{H} на орты сферических координат:

$$H_r = \frac{2m \cos \vartheta}{r^3}, \quad H_\vartheta = \frac{m \sin \vartheta}{r^3}, \quad H_\varphi = 0.$$

Векторные линии в сферических координатах определяются из системы уравнений

$$\frac{dr}{H_r} = \frac{r d\vartheta}{H_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta d\varphi}{H_\varphi}.$$

Обращение в нуль компонента H_φ означает, что должен обратиться в нуль и дифференциал $d\varphi = 0$, т.е. $\varphi = const$ и, таким образом, все векторные линии лежат в плоскостях, проходящих через вектор \mathbf{m} . Подставляя ненулевые проекции \mathbf{H} в оставшееся единственное уравнение и сокращая общие множители, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $dr/r = 2 \cot \vartheta d\vartheta$. Почленное интегрирование правой и левой частей дает $\ln r - \ln r_0 = 2 \ln \sin \vartheta$ или $r(\vartheta) = r_0 \sin^2 \vartheta$, где r_0 — постоянная интегрирования, имеющая смысл расстояния от векторной линии до начала координат в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{m} .

9.8 Выразить интегралы по замкнутой поверхности

$$\oint \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \oint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS$$

через объем, ограниченный этой поверхностью. \mathbf{a} — постоянный вектор, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

Указание. Домножить подынтегральные выражения на постоянный вектор. **Ответ:** $\mathbf{a}V$, $\mathbf{a}V$.

9.9 Доказать интегральные тождества:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{n} \varphi dS &= \int_V \text{grad } \varphi dV; \\ \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) dS &= \int_V \text{rot } \mathbf{A} dV; \\ \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{A} dS &= \int_V (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{A} dV. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{n} — орт нормали к поверхности, \mathbf{a} — постоянный вектор.

9.10 Доказать интегральные тождества:

$$\begin{aligned} \oint_l \varphi d\mathbf{l} &= \int_S (\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi) dS; \\ \oint_l u df &= \int_S (\text{grad } u \times \text{grad } f) \times \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{n} — орт нормали к поверхности, φ , u , f — скалярные функции координат, l — замкнутый контур, S — незамкнутая поверхность, ограниченная этим контуром.

9.11 Доказать тождество:

$$\int_V (\mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A}) dV = \oint_S [(\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S}.$$

9.12 Вычислить $\text{grad } \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(r)$, $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$, $\text{div } \varphi(r) \mathbf{A}(r)$, $\text{rot } \varphi(r) \mathbf{A}(r)$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi(r) \mathbf{A}(r)$.

Ответ:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}') \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}') \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'), \quad \frac{\varphi'}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}'), \quad \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}{r} (\varphi' \mathbf{A} + \varphi \mathbf{A}').$$

Рекомендуемая литература к разделу 9

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Высшая школа: М., 1966, 252 с.
2. Курбатова Г.И., Филиппов В.Б. Элементы тензорного исчисления. Изд-во С.-Петербургского университета: Санкт-Петербург, 1998, 233 с.

10 Дельта-функция Дирака

Определение и общие свойства. К понятию дельта-функции мы приходим, например, при попытке описать плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$ точечной частицы. Пусть частица находится в начале координат и имеет заряд e . Тогда, очевидно, функция $\rho(\mathbf{r})$ должна обладать следующими свойствами:

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0. \quad (10.1)$$

Но при $r \rightarrow 0$ плотность $\rho(\mathbf{r})$ должна возрастать столь быстро, чтобы

$$\int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) dV = e, \quad (10.2)$$

т.е. чтобы интеграл, взятый по любому объему ΔV , включающему точку, где находится частица, имел конечное значение, равное заряду e .

Записав $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$, мы получим из (10.1) – (10.2) условия, определяющие трехмерную дельта-функцию:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad r \neq 0; \quad \delta(\mathbf{r}) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0. \quad (10.3)$$

$$\int_{\Delta V} \delta(\mathbf{r}) dV = 1. \quad (10.4)$$

Аналогичными соотношениями определяется одномерная дельта-функция:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \delta(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0; \quad \int_{\Delta} \delta(x) dx = 1, \quad (10.5)$$

где Δ — отрезок оси x , включающий точку $x = 0$.

Дельта-функция относится к классу сингулярных обобщенных функций. Она приобретает точный смысл под интегралом. Рассмотрим интеграл от произведения дельта-функции на произвольную непрерывную и ограниченную функцию $f(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx,$$

где $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Поскольку $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, то вклад в интеграл дает только малая окрестность ϵ точки $x = 0$, в которой $f(x)$ постоянна и равна $f(0)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (10.6)$$

Далее, путем замены переменной x на $x - a$ в аргументе дельта-функции, повторяя предыдущие рассуждения, находим:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (10.7)$$

если промежуток (x_1, x_2) включает точку $x = a$.

Равенства (10.5) и (10.6) показывают, что $\delta(x)$ — четная функция своего аргумента:

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (10.8)$$

С помощью последнего свойства, вводя переменную $|\alpha|x = y$, убеждаемся в справедливости соотношения

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(0). \quad (10.9)$$

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx,$$

в котором в аргументе дельта-функции стоит некоторая гладкая функция $g(x)$. Вклад в интеграл дают только точки, в которых $g(x) = 0$, т.е. действительные корни функции $g(x)$. Обозначив их через a_i , можем написать

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \int_{a_i - \epsilon}^{a_i + \epsilon} \delta(g(x)) f(x) dx,$$

где ϵ — малое число. Если $f(x)$ — непрерывна, то на отрезке $[a_i - \epsilon, a_i + \epsilon]$ можно заменить $f(x)$ на $f(a_i)$, а $g(x)$ аппроксимировать первым членом разложения: $g(x) = g'(a_i)(x - a_i)$. В итоге, используя (10.9), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} f(a_i). \quad (10.10)$$

Это свойство дельта-функции можно записать в виде символического равенства

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} \delta(x - a_i). \quad (10.11)$$

Если $g'(a_i) = 0$, т.е. a_i — кратный корень, то соотношения (10.10) и (10.11) теряют смысл. Точно так же не имеет смысла произведение $\delta(x)f(x)$, если функция $f(x)$ обладает особенностью при $x = 0$.

Можно определить также производную от дельта-функции. Точный ее смысл содержится в формуле

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{\partial \delta(x - a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a}, \quad (10.12)$$

которая получается интегрированием по частям. Аналогично определяются производные высших порядков:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta^{(n)}(x - a) dx = (-1)^n f^{(n)}(a). \quad (10.13)$$

Функция $\delta(x)$ может рассматриваться как производная от ступенчатой функции $\Theta(x)$. Это следует из очевидного соотношения

$$\int_{x_1}^x \delta(x) dx = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (10.14)$$

где нижний предел интегрирования x_1 — любое отрицательное число. Дифференцируя это равенство по x , получаем

$$\Theta'(x) = \delta(x). \quad (10.15)$$

В равенстве (10.14) при совпадении предела интегрирования с точкой, в которой аргумент дельта-функции обращается в нуль, мы взяли **половину** значения гладкой функции $f(x) = 1$, т.е. воспользовались правилом интегрирования

$$\int_{x_1}^a f(x)\delta(x-a)dx = \frac{1}{2}f(a). \quad (10.7')$$

Это правило находится в согласии со свойством (10.8) — четностью дельта-функции.

Трехмерную дельта-функцию можно рассматривать как произведение трех одномерных дельта-функций:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z). \quad (10.16)$$

Поэтому все рассмотренные выше свойства одномерных дельта-функций легко обобщаются на трехмерный случай.

Некоторые представления дельта-функции. Наглядное представление о дельта-функции и ее производных можно получить, рассматривая график некоторой непрерывной функции $\delta_\epsilon(x-a)$, такой, что $\int_{\Delta} \delta_\epsilon(x-a)dx = 1$. Параметр ϵ характеризует ширину интервала, в котором рассматриваемая функция отлична от нуля (рис. 10.1). Дельта-функция и ее производные определяются как пределы

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x-a), \quad \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \delta_\epsilon(x-a)}{\partial x}$$

и т.д.

Свойства дельта-функции приобретают многие несингулярные функции, зависящие от параметра, при определенных предельных значениях этого параметра. Наиболее употребительны такие представления дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right). \quad (10.17)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}. \quad (10.18)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Kx}{Kx^2}. \quad (10.19)$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon}. \quad (10.20)$$

Из (10.18) получают следующие представления:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos kx dk. \quad (10.21)$$

Их можно рассматривать как разложение дельта-функции в интеграл Фурье⁴. Иногда формулы (10.21) записывают, опуская знак предельного перехода и интегрируя в бесконечных пределах.

⁴Об интегралах Фурье см. следующий раздел.

Легко убедиться в том, что любое из представлений (10.17) – (10.21) согласуется со всеми свойствами (10.5) – (10.9), а также с определением (10.12) производной от дельта-функции. **При вычислении интегралов с дельта-функциями с помощью представлений типа (10.17) – (10.21) нужно производить предельный переход после интегрирования.** Например, при использовании (10.18) имеем

$$\int_{-a}^b \delta(x)f(x)dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y} dy = f(0), \quad (10.22)$$

тогда как предел (10.18) сам по себе не существует.

Представление дельта-функции через контурные интегралы в комплексной плоскости. Воспользуемся формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a), \quad (10.23)$$

где $f(z)$ — функция, не имеющая особенностей внутри области, ограниченной замкнутым контуром C , и на самом контуре в плоскости комплексного переменного z , интегрирование по которому производится против часовой стрелки. Из сравнения (10.23) с (10.7) следует, что величину

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-a}$$

можно рассматривать как представление $\delta(z-a)$, если условиться производить интегрирование по замкнутому контуру, окружающему точку $z=a$, такому, внутри которого и на самом контуре другие особенности подынтегрального выражения отсутствуют. В частности, контур C может представлять собой окружность малого радиуса.

В приложениях нередко возникает интеграл по действительной оси вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx,$$

где $f(x)$ не имеет особенностей на отрезке $[x_1, x_2]$, а пределы x_1, x_2 могут быть бесконечными. Такой интеграл при a действительном не имеет определенного значения, так как подынтегральное выражение имеет полюс на контуре интегрирования. При вычислении интеграла необходима дополнительная информация, которая должна состоять в указании правила обхода особой точки. Правило обхода устанавливается обычно на основе физических аргументов:

$$\int_{C_{Re+C_r}} \frac{f(x)}{x-a} dx = \int_{C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{C_{Re}} \frac{f(x)}{x-a} dx.$$

Это означает, что стоящий в левой части приведенного выше соотношения интеграл, в котором интегрирование проводится по всему контуру, может быть представлен (см. рис. 10.2) в виде суммы двух интегралов. В первом из них интегрирование ведется либо по верхней, либо по нижней полуокружности малого радиуса C_r , во втором — по всему остальному, идущему вдоль действительной оси участку контура (эта часть контура обозначена символом C_{Re}).

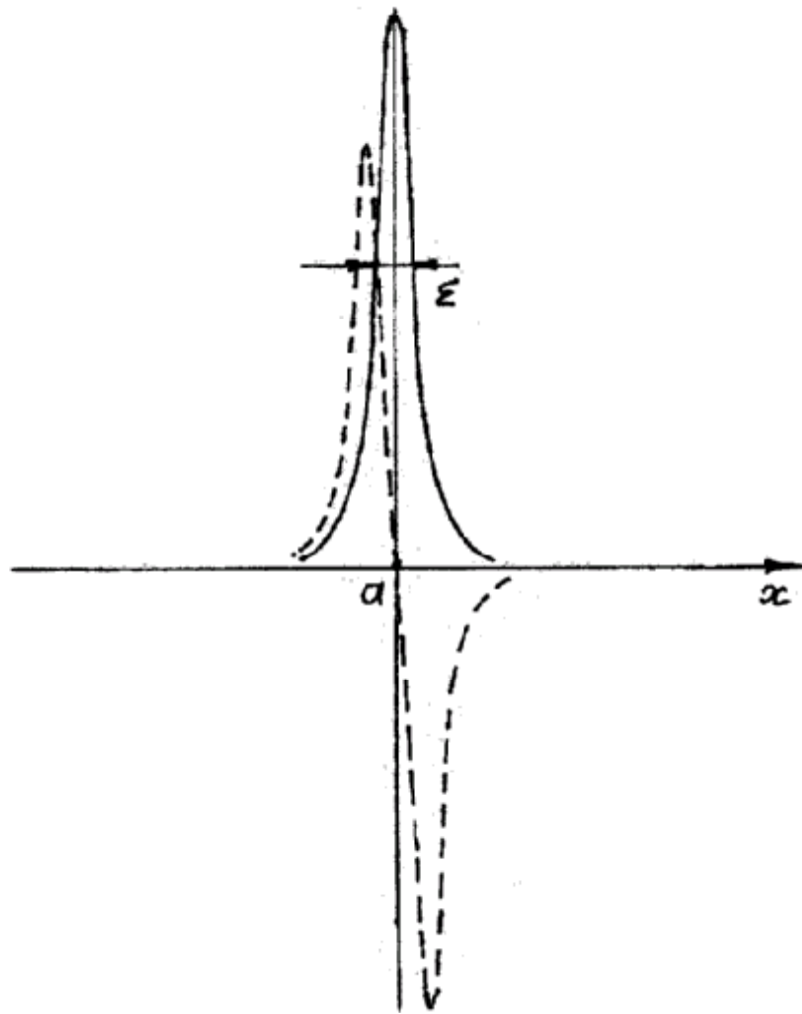


Рис. 10.1.

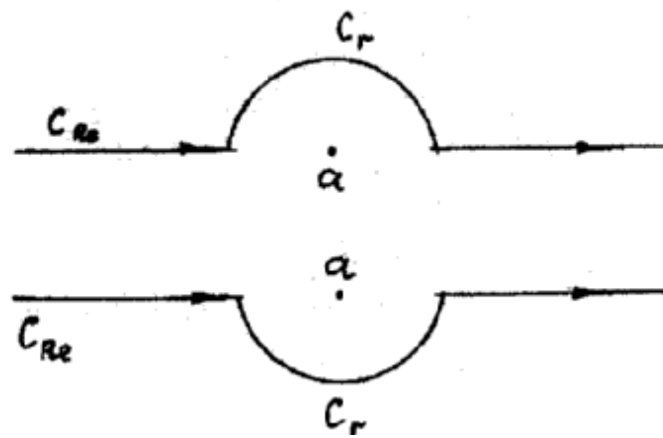


Рис 10.2.

Интеграл по полуокружности радиуса $\epsilon \rightarrow 0$ дает половину вычета (со знаком минус для верхнего контура на рис. 10.2, поскольку обход полюса — по часовой стрелке):

$$\int_{C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx = -i\pi f(a);$$

интеграл по действительной оси с исключенной особой точкой вычисляется в смысле главного значения:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{x_1}^{a-\epsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\epsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx \right\} \equiv \mathcal{P} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx.$$

При обходе полюса по нижней полуокружности меняется знак полувывчета. В итоге мы получаем следующие правила вычисления интеграла:

$$\frac{1}{x-a} = \mp i\pi\delta(x-a) + \mathcal{P} \frac{1}{x-a}. \quad (10.24)$$

Символ \mathcal{P} обозначает главное значение (верхний знак — для верхнего контура, нижний — для нижнего на рис. 10.2).

Вместо деформации контура интегрирования можно сместить положение полюса на малое расстояние от действительной оси. Это достигается путем добавления к числу a малой мнимой части: $a \rightarrow a \mp i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. При такой замене тождество (10.24) примет следующую форму:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-a \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x-a) + \frac{\mathcal{P}}{x-a}. \quad (10.25)$$

Оба тождества, (10.24) и (10.25), носят символический (операторный) характер и должны пониматься в том смысле, что интегрирование правой и левой частей с любой непрерывной функцией дает один и тот же результат.

Отделив в левой части равенства (10.25) действительную и мнимую части комплексного выражения, получим для $\delta(x-a)$ представление (10.17) (с заменой $x \rightarrow x-a$), а для главного значения

$$\frac{\mathcal{P}}{x-a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x-a}{(x-a)^2 + \epsilon^2}. \quad (10.26)$$

Задачи

10.1 Вычислить интегралы

$$\int_{-2}^3 (x^2-x-5)\delta(-3x)dx, \int_{-10}^{-3} (x+3)\delta(x+5)dx, \int_0^5 (x+5)\delta(x+5)dx, \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha x)\delta(x^2+x-2)dx, \alpha = const.$$

Ответ: $-5/3$, -2 , 0 , $\exp(\alpha) + \exp(-2\alpha)$.

10.2 Упростить выражения $(x-a)\delta(x-a)$, $f(x)\delta(x-a)$, $(3x^3-7x)\delta(2x^2-6x-4)$.

Ответ: 0 , $f(a)\delta(x-a)$, $82\delta(x-4) + 2\delta(x+1)$.

10.3 Доказать, что представления (10.17), (10.19), (10.20) изображают дельта-функцию. Для этого вычислить интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$, подставляя вместо $\delta(x)$ правую часть соответствующего представления, и убедиться в том, что после перехода к пределу указанные интегралы дают $f(0)$.

10.4 Записать трехмерные дельта-функции $\delta(\mathbf{r})$, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ в цилиндрических координатах, где $\mathbf{a} = (a_{\perp}, \alpha_0, a_z)$ — постоянный вектор, заданный своими цилиндрическими координатами.

Ответ:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r_{\perp}} \delta r_{\perp}, \quad \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \frac{1}{a_{\perp}} \delta(r_{\perp} - a_{\perp}) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(z - a_z).$$

Чтобы осуществить предельный переход $\mathbf{a} \rightarrow 0$, нужно не только устремить к нулю величины a_{\perp}, a_z , но и усреднить правую часть по азимутальному углу α_0 , так как нулевой вектор не имеет направления.

10.5 Сделать то же самое в сферических координатах, $\mathbf{a} = (a, \vartheta_0, \alpha_0)$.

Ответ:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r), \quad \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \frac{1}{a^2} \delta(r-a) \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \delta(\alpha - \alpha_0).$$

10.6 Записать с помощью дельта-функции первую производную от разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } x = 1, \\ x^2 + 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$f'(x) = g(x) + 2\delta(x-1), \quad \text{где } g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x < 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература к разделу 10

1. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики, гл. VI. М.: Наука, 1972.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

11 Разложение по полным системам ортонормированных функций. Ряды и интегралы Фурье

Общее рассмотрение. Пусть имеется некоторая система линейно независимых функций, $\varphi(x, \lambda_n) \equiv \varphi_n(x)$, в общем случае комплекснозначных, которые определены на некотором интервале $[a, b]$ действительной переменной x и зависят от действительного параметра λ , принимающего дискретный ряд значений: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Такие системы функций часто возникают при решении обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями, и число функций в них обычно

бесконечно велико: $n = 0, 1, \dots$. Пусть функции обладают следующими свойствами: а) они нормированы на единицу, т.е.

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1; \quad (11.1)$$

б) они взаимно ортогональны, т.е.

$$\int \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (11.2)$$

Здесь звездочкой сверху φ^* обозначена комплексно сопряженная величина. Такие системы функций называются **ортонормированными**, а равенства (11.1) и (11.2) можно записать единым образом с помощью символа Кронекера:

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn}. \quad (11.3)$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т.е. такую, для которой интеграл $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ конечен. В случае конечного интервала $[a, b]$ этому условию будет удовлетворять любая кусочно-непрерывная функция, имеющая ограниченное число конечных скачков на этом интервале. Выясним возможность разложения такой функции в ряд по функциям $\varphi_n(x)$. Для этого сначала аппроксимируем рассматриваемую функцию линейной суперпозицией, включающей n базисных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) + R_n(x), \quad (11.4)$$

где через $R_n(x)$ обозначен остаток ряда. Коэффициенты c_n суперпозиции выберем таким образом, чтобы погрешность аппроксимации была наименьшей. За меру погрешности примем величину

$$G_n = \int_a^b |R_n(x)|^2 dx = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx. \quad (11.5)$$

Раскрывая квадрат модуля и используя условие ортонормированности (11.3), будем иметь

$$G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b f^*(x)\varphi_k(x)dx - \sum_{k=0}^n c_k^* \int_a^b f(x)\varphi_k^*(x)dx + \sum_{k=0}^n c_k^* c_k. \quad (11.6)$$

Необходимое условие минимума величины G_n , рассматриваемой как функция коэффициентов c_k , дает

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n^*(x)dx, \quad (11.7)$$

а погрешность разложения принимает вид

$$G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2. \quad (11.8)$$

Поскольку $G_n \geq 0$ по определению, то при любом n имеет место неравенство:

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (11.9)$$

Если для всякой функции с интегрируемым квадратом в пределе имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0, \quad (11.10)$$

или, в другой форме,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \quad (11.11)$$

(**равенство Парсеваля**), то система функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ называется **полной** или **замкнутой**. Эти термины означают, что других функций, которые были бы линейно независимы от $\varphi_n(x)$ и ортогональны к ним, кроме нулевой функции, не существует: любая функция рассматриваемого класса разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (11.12)$$

где коэффициенты разложения даются формулами (11.7). Отметим, что приведенные выше условия обеспечивают сходимость ряда (11.12) "в среднем", т.е. обращение в нуль интеграла (11.5). Это означает, что сходимость ряда к рассматриваемой функции $f(x)$ может нарушаться в отдельных точках, число которых конечно. Если система функций $\varphi_n(x)$ ортонормированная, но не полная, то вместо равенства Парсеваля (11.11) выполняется **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (11.13)$$

Пример 11.1 Показать, что полная ортонормированная система функций удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x') \varphi_k^*(x) = \delta(x - x'), \quad (11.14)$$

которое можно рассматривать как другую, отличную от (11.11), форму условия полноты (замкнутости). Здесь $\delta(x - x')$ — дельта-функция Дирака, рассмотренная в разделе 10.

Решение. Подставив в (11.12) коэффициенты разложения (11.7) и поменяв порядок операций суммирования и интегрирования, будем иметь

$$f(x) = \int_a^b dx' f(x') \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) = \int_a^b K(x, x') f(x') dx', \quad (11.15)$$

где

$$K(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x). \quad (11.16)$$

Поскольку равенство (11.15) должно выполняться для любой функции $f(x)$ из широкого класса, то ядро $K(x, x')$ интегрального преобразования (11.15) должно обладать свойством

дельта-функции. В этом можно убедиться, вычислив коэффициенты разложения $\delta(x - x')$ по системе функций $\varphi_k(x)$ согласно (11.7)⁵:

$$c_n = \int \delta(x - x') \varphi^*(x) dx = \varphi^*(x').$$

Следовательно, равенство (11.14) имеет место и представляет собой разложение дельта-функции по функциям $\varphi_k(x)$. ■

В некоторых физических задачах, особенно в квантовой механике, в полную систему входит не только дискретный ряд функций $\varphi_n(x)$, но также функции $\varphi(x, \lambda)$, которые зависят от параметра λ , принимающего непрерывные значения из некоторого интервала, либо только функции с непрерывным параметром. В этих случаях в разложение произвольной функции будут входить и сумма, и интеграл по непрерывным значениям λ либо только интеграл, а условие замкнутости примет вид

$$\delta(x - x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x') \varphi_k(x) + \int \varphi^*(x', \lambda) \varphi(x, \lambda) d\lambda. \quad (11.17)$$

Ряд Фурье. Доказательство полноты конкретных систем функций представляет собой нетривиальную математическую задачу, решение которой можно найти в специальных руководствах (см., например, [1 – 3]). Одной из наиболее употребительных ортонормированных на интервале $[-\pi, +\pi]$ и полных систем функций является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.18)$$

Ортонормированность этой системы функций нетрудно проверить непосредственно. Разложение некоторой функции в ряд по тригонометрическим функциям образует ее **ряд Фурье**. Впрочем, иногда рядом Фурье (в широком смысле) называют и общее разложение (11.12) по любой полной ортонормированной системе функций.

Поскольку тригонометрические функции (11.18) периодичны, то разлагаемая функция будет представлена рядом Фурье при всех τ лишь в том случае, если она периодична с тем же периодом 2π , т.е. $f(\tau) = f(\tau + 2n\pi)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, либо задана на конечном промежутке $b - a = 2L > 0$. В последнем случае в (11.18) нужно заменить переменную τ на $\pi x/L$ и сдвинуть начало отсчета координаты x на середину интервала $[a, b]$, т.е. ввести $x' = x - a - L$, $-L \leq x' \leq +L$. Рассматриваемая функция, если для нее построить ряд Фурье, будет продолжена в этом случае периодически на всю действительную ось Ox . Непериодическая функция, заданная на бесконечном интервале, правильно представляется рядом Фурье лишь на конечном отрезке $2L$. Для ее представления на всей оси Ox нужно использовать интеграл Фурье (см. ниже).

Если ряд Фурье представляет функцию, имеющую разрывы первого рода (конечные скачки), то в точке скачка $x = x_0$ он сходится к полусумме значений функции, взятых по обе стороны скачка:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]. \quad (11.19)$$

⁵Здесь мы выходим за пределы класса обычных функций с интегрируемым квадратом и используем обобщенные функции.

Пример 11.2 Записать разложение Фурье на интервале $[-L, +L]$, выбрав в качестве полной системы функций⁶ экспоненты с мнимым показателем $\exp(in\pi x/L)$, $n = 0, \pm 1, \dots$

Решение. Убеждаемся в том, что рассматриваемые экспоненты взаимно ортогональны на интервале $[-L, +L]$:

$$\int_{-L}^L \exp\left\{\frac{i(m-n)\pi x}{L}\right\} dx = 2L\delta_{mn}.$$

Записываем искомое разложение в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp\left\{\frac{in\pi x}{L}\right\}. \quad (11.20)$$

Для определения коэффициентов разложения F_n умножаем обе части (11.20) на $\exp(im\pi x/L)$ и интегрируем по рассматриваемому интервалу. В силу ортогональности экспонент после интегрирования в сумме по n останется только один член с $n = m$, что позволяет найти коэффициенты ряда Фурье:

$$F_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp\left\{\frac{im\pi x}{L}\right\} dx. \quad (11.21)$$

Как следует из (11.21), если $f(x)$ — действительная функция, то коэффициенты Фурье (11.21), будучи в общем случае комплексными величинами, удовлетворяют условию $F_{-n} = F_n^*$. Это условие обеспечивает действительность суммы ряда (11.20). ■

Разложение Фурье очевидным образом обобщается на случай функций, зависящих от нескольких переменных.

Задачи

11.1 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $[-\pi, +\pi]$ условиями $f(x) = x$ для $0 \leq x \leq \pi$, $f(-x) = f(x)$.

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

11.2 Сделать то же самое для функции $f(x) = a$ при $0 \leq x \leq \pi$, $f(-x) = -f(x)$.

Ответ:

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

11.3 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $[-L, +L]$ условиями $f(x) = a$ при $0 \leq x < L/2$, $f(x) = 0$ при $L/2 < x \leq L$, $f(-x) = f(x)$.

⁶Полнота системы следует из того, что использовавшиеся ранее $\sin n\tau$, $\cos n\tau$ линейно выражаются через $\exp(in\tau)$. Поэтому запись через экспоненты означает другую форму тригонометрического ряда.

Ответ:

$$f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)\pi x/L)}{2k+1}.$$

Ряд Фурье четной на интервале $[-L, +L]$ функции, $f(-x) = f(x)$, содержит только косинусы. Нечетная функция, $f(-x) = -f(x)$, разлагается по синусам. Функция, не имеющая определенной четности, содержит в своем разложении Фурье и синусы, и косинусы.

Интеграл Фурье. Рассмотрим систему функций, зависящих от действительного параметра λ , который принимает непрерывный ряд значений:

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (11.22)$$

Эти функции определены и ограничены при любых действительных значениях координаты x , т.е. на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$. Пользуясь представлением дельта-функции (10.21), вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) \varphi^*(x', \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(x-x')} = \delta(x-x').$$

Полученное соотношение совпадает с (11.17) (в отсутствие дискретных значений λ) и свидетельствует о полноте системы функций $\varphi(x, \lambda)$. Поэтому любую функцию из весьма широкого класса, определенную на всей действительной оси Ox , можно разложить по функциям $\varphi(x, \lambda)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (11.23)$$

Функция $F(\lambda)$ называется **Фурье-образом** исходной функции $f(x)$ или ее **амплитудой Фурье**. Ее можно найти тем же способом, каким были найдены коэффициенты ряда Фурье в примере 11.2: умножаем обе части равенства (11.23) на $\varphi^*(x, \mu)$ и интегрируем по координате x . Имеем, меняя порядок интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^*(x, \mu) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\lambda-\mu)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \delta(\lambda-\mu) = F(\mu). \quad (11.24)$$

Это равенство и позволяет вычислить амплитуду Фурье заданной функции $f(x)$.

Прямое и обратное преобразования Фурье часто удобнее записывать в несимметричной форме:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{2\pi}, \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (11.25)$$

Действительность интеграла Фурье обеспечивается соотношением

$$F(-\lambda) = F^*(\lambda) \quad (11.26)$$

при действительных λ и $f(x)$.

Разложение в интеграл Фурье легко обобщается на случай нескольких измерений. Например, в трехмерном пространстве фурье-преобразование можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (11.27)$$

В обоих интегралах интегрирование производится по всему пространству.

Пример 11.3 Получить разложение в интеграл Фурье для бесконечного интервала $-\infty < x < \infty$ путем предельного перехода $L \rightarrow \infty$ в формулах (11.20), (11.21).

Решение. При $L \rightarrow \infty$ соседние члены в сумме (11.20) почти одинаковы, поэтому суммирование можно заменить интегрированием по $dn = (L/\pi)d\lambda$ в пределах $-\infty, +\infty$. Обозначив $\lim_{L \rightarrow \infty} 2LF_n$ через $F(\lambda)$, получим из (11.20), (11.21) соотношения (11.25). ■

Задачи

11.4 Выразить фурье-образ производной $f'(x)$ через фурье-образ $F(\lambda)$ функции $f(x)$. Предполагается, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ сходится.

Ответ: $i\lambda F(\lambda)$.

11.5 Сделать то же самое для функции $f(ax) \exp(ibx)$.

Ответ:

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda - b}{a}\right).$$

11.6 Вычислить фурье-образ функции $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

Указание. Рассматривая x как комплексную переменную, замкнуть контур интегрирования дугой бесконечного радиуса и применить теорему о вычетах.

Ответ: $\pi \exp(-|\lambda|)$.

11.7 Вычислить фурье-образ функции $\exp(-\alpha^2 x^2)$.

Ответ:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}\right).$$

11.8 Вычислить трехмерный фурье-образ функции $f(r) = \exp(-\alpha^2 r^2)$.

Ответ:

$$\frac{\pi^{3/2}}{\alpha^3} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha^2}\right),$$

где \mathbf{k} — радиус-вектор трехмерного пространства переменных Фурье (см. (11.27)).

11.9 Вычислить трехмерный фурье-образ функции $f(r) = r^{-1}$.

Решение. Для вычисления интеграла Фурье (11.27) используем сферические координаты и выберем ось Oz вдоль вектора \mathbf{k} . Выполняя сначала интегрирование по углам, а затем по r , находим

$$F(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{k^2} [1 - \cos(kR)].$$

Формально функция, стоящая в правой части, не имеет предела. Но легко понять, что предел косинуса можно считать эффективно равным нулю, так как при выполнении обратного преобразования Фурье член с бесконечно осциллирующим косинусом даст нулевой вклад. В итоге имеем $F(k) = 4\pi/k^2$.

Рекомендуемая литература к разделу 11

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973.
2. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. М.: Мир, 1965.
3. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.