Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.П.Аксёнов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1997

УДК 517.38
517.3821

Аксёнов А.П. Математический анализ. Теория рядов. Учебн. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997, 123 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины "Математический анализ" направления бакалаврской подготовки 510200.

Содержится изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам "Числовые ряды", "Функциональные последовательности и ряды". Рассмотрено большое количество примеров. Особое внимание уделено приложениям к вычислению приближённых значений сумм рядов, функций и интегралов.

Предназначено для студентов факультетов физико-механического, физико-технического, радиофизического, технической кибернетики, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Библиогр. 2 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Теория рядов - один из важнейших разделов математики. В ней исследуются вопросы, связанные с перенесением свойств элементарных алгебраических операций, а также правил дифференцирования и интегрирования (хорошо известных, когда число слагаемых конечно) на случай бесконечного числа слагаемых.

Теория рядов широко используется в приближенных вычислениях. С ее помощью составляются таблицы значений функций, вычисляются определенные интегралы от функций, у которых первообразные неэлементарны, находятся решения широкого и весьма важного для физики и техники класса дифференциальных уравнений.

Глава 1. Числовые ряды с вещественными членами

§1. Определение ряда и его сходимость. Простейшие свойства сходящихся рядов

1°. Пусть имеется бесконечная последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (\text{или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n) \tag{1}$$

называется числовым рядом, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - членами ряда.

Величины

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad \ldots$$

называются частичными суммами ряда (1) (s_n - n-я частичная сумма ряда (1)). Очевидно, что частичные суммы ряда составляют бесконечную последовательность

$$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}. \tag{2}$$

Определение. Если существует конечный или бесконечный, но определенного знака, предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{3}$$

то этот предел s называют суммой ряда (1) и пишут:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если s - число конечное, то говорят, что ряд (1) сходится. Если $s=\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд (1) расходится.

Пример 1. Для ряда

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots \tag{4}$$

имеем $s_n = n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \;\Rightarrow\;$ ряд (4) расходится.

Пример 2. Для ряда

$$1-1+1-1+\ldots \tag{5}$$

имеем $s_1=1,\ s_2=0,\ s_3=1,\ s_4=0,\ \ldots$, т.е. $s_{2n-1}=1,\ s_{2n}=0,\ n=1,2,3,\ldots \;\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует $\Rightarrow$ ряд (5) расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}. \tag{6}$$

▶ В этом примере $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. Поэтому

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s_n=1-\frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (6) сходится, и его сумма s равна 1. ◀

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (a\neq 0).$$

Это - так называемый геометрический ряд.

▶ Составим n-ю частичную сумму данного ряда

$$s_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$$

Если предположить, что $q\neq 1$, то по известной формуле из элементарной алгебры находим

$$s_n=a\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\cdot q^n.$$

1) Пусть $|q|<1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\dfrac{a}{1-q}$ (существует, конечный).

2) Пусть $|q| > 1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

3) Пусть $q = 1$. Тогда $s_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ ñëàãàåìûõ}} = na \Rightarrow s_n \to \begin{cases} +\infty, & \text{åñëè} \quad a > 0 \\ -\infty, & \text{åñëè} \quad a < 0 \end{cases}$.

4) Пусть $q = -1$. Тогда будем иметь ряд

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$$

Легко видеть: если частичная сумма содержит четное число слагаемых, то она равна нулю:

$$s_{2n} = \underbrace{(a-a) + (a-a) + \ldots + (a-a)}_{n \text{ ñêîáîê}} = 0;$$

если частичная сумма содержит нечетное число слагаемых, то она равна a: $s_{2n+1} = a$.

Частичная сумма нашего ряда s_n поочередно принимает только два значения: 0 и a и, следовательно, предела не имеет. Таким образом, геометрический ряд сходится лишь тогда, когда $|q| < 1$ или, иначе, при $-1 < q < 1$. ◀

2°. Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{7}$$

▶ Обозначим через s сумму данного ряда. Имеем:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n \;\Rightarrow\; a_n = s_n - s_{n-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \;◀$$

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то это вовсе *не означает*, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В самом деле, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Здесь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$, т.е. условие (7) выполнено. Имеем, однако,

$$s_n = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty \ \Rightarrow$ ряд (8) расходится.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является *необходимым условием* сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится).

3°. Простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

сходится и его сумма равна s. Пусть c - определенное число. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \tag{9}$$

тоже сходится, и его сумма равна $c \cdot s$.

▶ Обозначим через s_n и σ_n n-ые частичные суммы рядов (1) и (9) соответственно. Имеем:

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \cdot s_n. \tag{10}$$

По условию, ряд (1) сходится и его сумма равна s. Значит, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot s_n) = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c\cdot s$ (существует, конечный) $\Rightarrow$ ряд (9) сходится, и его сумма равна $c \cdot s$. ◀

2. Пусть имеются два сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{12}$$

Пусть A и B - суммы рядов (11) и (12) соответственно. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \tag{13}$$

тоже сходится, и его сумма равна $A \pm B$.

▶ Обозначим n-е частичные суммы рядов (11), (12), (13) через A_n, B_n, σ_n соответственно. Имеем

$$\sigma_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ (существуют, конечные). Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(A_n \pm B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B$$

- существует, конечный. Значит, ряд (13) сходится, и его сумма равна $A \pm B$. ◀

3. Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, объединять в группы. От этого сходимость ряда не нарушится, и величина его суммы не изменится.

Иначе: пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{14}$$

сходится, и его сумма равна s; пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ - произвольная, строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда ряд

$$\begin{gathered}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \ldots + a_{p_2}) + \ldots + \\ +(a_{p_{k-1}+1} + a_{p_{k-1}+2} + \ldots + a_{p_k}) + \ldots\end{gathered} \tag{15}$$

тоже сходится, и его сумма равна s.

▶ Обозначим p-ю частичную сумму ряда (14) через s_p, а k-ю частичную сумму ряда (15) - через σ_k. Имеем

$$\begin{gathered}\sigma_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \ldots + a_{p_2}) + \ldots + \\ +(a_{p_{k-1}+1} + a_{p_{k-1}+2} + \ldots + a_{p_k}) = s_{p_k}\end{gathered}.$$

Видим, что $\left\{s_{p_k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ есть подпоследовательность, выделенная из последовательности $\left\{s_p\right\}_{p\in\mathbf{N}}$. По условию, ряд (14) сходится и его сумма равна s. Это означает, что $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$ (s - конечное число). Известно, что любая подпоследовательность, выделенная из сходящейся последовательности, тоже сходится, и притом к тому же самому пределу. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} s_{p_k}$ существует и равен s, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = s$ (существует, конечный) $\Rightarrow$ ряд (15) сходится, и его сумма равна s. ◄

Замечание. Раскрывать скобки в сходящемся ряде, вообще говоря, нельзя. Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

сходится, и его сумма $s=0$; если же раскрыть скобки, то получится расходящийся ряд: $1-1+1-1+\ldots$ (см. п. 1°, пример 2).

4°. Ряд и его остаток.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (16)$$

Пусть m - произвольное фиксированное натуральное число. Ряд

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots \qquad (17)$$

называется остатком ряда (16) после m-го члена.

Теорема. Ряд (16) и его остаток после m-го члена (17) сходятся и расходятся одновременно.

► Обозначим n-ю частичную сумму ряда (16) через s_n, а k-ю частичную сумму ряда (17) - через σ_k. Имеем

$$s_{m+k} = \underbrace{a_1+a_2+\ldots+a_m}_{=s_m} + \underbrace{a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}}_{=\sigma_k} = s_m+\sigma_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sigma_k = s_{m+k}-s_m \qquad (18)$$

Так как m фиксировано, то s_m в (18) - определенное число.

α) Пусть ряд (16) сходится, и его сумма равна s. Из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_{m+k} = s$ (существует, конечный). Но тогда из (18) следует, что существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k$, причем $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = \lim\limits_{k\to\infty} s_{m+k} - s_m = s - s_m$. Последнее означает, что ряд (17) сходится и его сумма σ равна $s-s_m$. Таким образом, из сходимости ряда (16) следует сходимость ряда (17).

β) Пусть ряд (17) сходится и его сумма равна σ. Это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = \sigma$ (существует, конечный). У нас $s_{m+k} = s_m+\sigma_k$. Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = \lim_{k\to\infty}(s_m+\sigma_k) = s_m + \lim_{k\to\infty}\sigma_k = s_m+\sigma \quad \text{(существует, конечный)}$$

$\Rightarrow$ ряд (16) сходится, и его сумма s равна $s_m+\sigma$. Итак, из сходимости ряда (17) следует сходимость ряда (16).

γ) Пусть ряд (16) расходится. Требуется доказать, что тогда расходится и ряд (17).

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (17) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться ряд (16), а это не так. Значит, расходимость ряда (16) влечет за собой расходимость ряда (17).

δ) Пусть ряд (17) расходится. Нужно показать, что расходится тогда и ряд (16).

И здесь рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (16) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться ряд (17), а это не так. Следовательно, расходимость ряда (17) влечет за собой расходимость ряда (16).

Вывод: ряды (16) и (17) либо оба сходятся, либо оба расходятся. ◄

Замечание. Из доказательства теоремы следует: если ряды (16) и (17) сходятся, то между их суммами s и σ существует следующая связь:

$$\sigma = s - s_m. \tag{19}$$

В (19) m фиксированное, но произвольное. Станем неограниченно увеличивать m. Тогда $s_m \xrightarrow[m\to\infty]{} s$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma = 0$. Таким образом, приходим к выводу:

Сумма остатка ряда после m-го члена у сходящегося ряда стремится к нулю при $m \to \infty$.

§2. Положительные ряды. Признаки сравнения

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется положительным, если $a_n \geq 0$, для всех $n \in \mathbf{N}$.

Если ряд (1) положительный, то ясно, что

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq \ldots ,$$

т.е. что последовательность частичных сумм ряда (1) $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ - неубывающая. Мы знаем, что для сходимости таких последовательностей необходима и достаточна ограниченность их сверху, т.е. необходимо и достаточно существование числа $M > 0$ такого, что $s_n \leq M$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Так как сходимость ряда (1) равносильна сходимости последовательности $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, то получаем:

Теорема 1. Для сходимости положительного ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $M > 0$ такое, что $s_n \le M$, для всех $n \in \mathbf{N}$.

Для исследования сходимости положительных рядов существует большое число достаточных признаков сходимости. Некоторые из них позволяют сводить выяснение вопроса о сходимости данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или поведение которого уже выяснено. Такие признаки называются признаками сравнения.

Теорема 2 (первый признак сравнения).

Пусть имеются два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{2}$$

причем члены первого, начиная с некоторого места, не превосходят соответствующих членов второго:

$$a_n \le b_n, \quad n = m+1,\ m+2,\ \ldots \quad (m \ge 0\text{, целое}). \tag{3}$$

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

▶ 1. Докажем сначала утверждения теоремы для случая, когда $m = 0$, т.е. когда неравенство (3) выполняется для $n = 1, 2, 3, \ldots$ (т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$).

Обозначим n-е частичные суммы рядов (1) и (2) через A_n и B_n соответственно. Ясно, в силу (3), что

$$A_n \le B_n . \tag{4}$$

α) Пусть ряд (2) сходится. Но тогда (см. теорему 1) существует число $M > 0$ такое, что $B_n \le M$ для всех $n \in \mathbf{N}$. В силу (4) и подавно будет $A_n \le M$, для всех $n \in \mathbf{N}$. А, следовательно, по теореме 1 ряд (1) сходится. Итак, показано: из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

β) Пусть ряд (1) расходится. Нужно показать, что ряд (2) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (2) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться ряд (1), а это не так. Таким образом, из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

2. Обсудим теперь случай, когда $m > 0$ ($m \in \mathbf{N}$).

Вместо рядов (1) и (2) рассмотрим их остатки после m-го члена. Это будут ряды

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \qquad (\tilde{1})$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\,. \qquad (\tilde{2})$$

В рядах $(\tilde{1})$, $(\tilde{2})$ уже все члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда. Поэтому, по доказанному в пункте 1, из сходимости ряда $(\tilde{2})$ следует сходимость ряда $(\tilde{1})$, а из расходимости ряда $(\tilde{1})$ следует расходимость ряда $(\tilde{2})$.

Ранее было установлено, что ряд и его остаток после m-го члена сходятся или расходятся одновременно. Значит, для рядов (1) и (2) будет справедливо то же, что доказано для рядов $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$, а именно: из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2). ◄

Пример. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\,.$$

Рассмотрим остаток этого ряда после 1-го члена:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

Ранее был изучен ряд (см. §1, п. 1°, пример 3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots\,.$$

Имеем $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$, т.е. $a_n < b_n$, для всех $n \in \mathbf{N}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится, то по теореме 2 заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ сходится. Значит, по теореме 1, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Теорема 3 (второй признак сравнения).

Пусть имеются два строго положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (5)$$

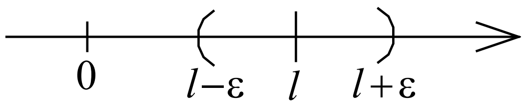
и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{6}$$

($a_n > 0$, $b_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$). Пусть существует конечный, отличный от нуля, предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (l \neq 0,\ l \neq \infty).$$

Тогда ряды (5) и (6) сходятся или расходятся одновременно.



▶ По условию, $l \neq 0$. Значит, $l > 0$, ибо $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое, но такое, что $l - \varepsilon > 0$. У нас $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что будет $l - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$, если $n > N$. Положим $p = l - \varepsilon$, $q = l + \varepsilon$ ($p > 0$, $q > 0$ - определенные числа). Предыдущее неравенство может быть записано теперь в виде:

$$pb_n < a_n < qb_n, \quad \text{если} \quad n > N. \tag{7}$$

α) Пусть ряд (5) сходится. Но тогда по теореме 2 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p \cdot b_n$, а значит, сходится ряд (6), ибо ряд (6) получается из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p \cdot b_n$ умножением всех его членов на число $\dfrac{1}{p}$. Итак, из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (6).

β) Пусть ряд (6) сходится. Но тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q \cdot b_n$, а значит, по теореме 2 сходится ряд (5). Таким образом, из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5).

γ) Пусть ряд (5) расходится. Нужно показать, что ряд (6) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (6) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться и ряд (5), а это не так. Видим, что из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

δ) Пусть ряд (6) расходится. Нужно доказать, что ряд (5) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (5) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться и ряд (6), а это не так. Значит, из расходимости ряда (6) следует расходимость ряда (5). ◀

Пример. Пусть имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (это - так называемый гармонический ряд). Известно, что $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$. Значит ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Было показано ранее, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится. Следовательно, гармонический ряд есть ряд расходящийся.

*** Теорема 4** (третий признак сравнения).

Пусть имеются два строго положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,. \tag{9}$$

($a_n>0,\ b_n>0$ для всех $n\in\mathbf{N}$). Пусть, начиная с некоторого места, т.е. для $n\ge m$ ($m\in\mathbf{N}$) оказывается

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{10}$$

Тогда из сходимости ряда (9) следует сходимость ряда (8), а из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9).

▶ 1. Рассмотрим сначала случай, когда неравенство (10) выполняется для $n=1,2,3,\ldots$, т.е. для любого $n\in\mathbf{N}$. Но тогда

$$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1},\quad \frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2},\quad \ldots\ ,\quad \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\le\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}},\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив соответствующие части этих соотношений, получим

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N}. \qquad (11)$$

Заметим, что в (11) отношение $\frac{a_1}{b_1}$ - определенное число.

α) Пусть ряд (9) сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$ сходится $\Rightarrow$ по первому признаку сравнения, ряд (8) сходится.

β) Пусть ряд (8) расходится. Нужно доказать, что ряд (9) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (9) сходится. Но тогда по пункту α) ряд (8) должен сходиться, а это не так. Следовательно, из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9).

2. Обсудим теперь случай, когда неравенство (10) выполняется для $n > m$ ($m \in \mathbf{N}$). В этом случае вместо рядов (8) и (9) рассмотрим их остатки после m-го члена. Это будут ряды

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \qquad (\tilde{8})$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\,. \qquad (\tilde{9})$$

В рядах $(\tilde{8})$, $(\tilde{9})$ уже все члены, начиная с первого, будут удовлетворять неравенству (10). А тогда, по доказанному в пункте 1, из сходимости ряда $(\tilde{9})$ следует сходимость ряда $(\tilde{8})$, а из расходимости ряда $(\tilde{8})$ следует расходимость ряда $(\tilde{9})$. Так как ряд и его остаток сходятся и расходятся одновременно, то для рядов (8) и (9) будет справедливо то же, что доказано для рядов $(\tilde{8})$, $(\tilde{9})$, а именно: из сходимости ряда (9) следует сходимость ряда (8), а из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9). ◄

Замечание. Признаки сравнения для успешного их применения нуждаются в большом арсенале “эталонных рядов”, как сходящихся, так и расходящихся, с которыми затем сравниваются исследуемые ряды. Поэтому мы при всякой появляющейся возможности будем стремиться пополнять этот арсенал.

§3. Интегральный признак Коши

Для исследования сходимости положительного ряда с монотонно убывающими членами часто оказывается полезным так называемый интегральный признак Коши.

Теорема (интегральный признак Коши).

Пусть имеется числовой положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{1}$$

члены которого монотонно убывают.

Пусть $f(x)$ - функция, определенная в промежутке $[1, +\infty)$, непрерывная, положительная и монотонно убывающая там. Пусть, далее, $f(x)$ такая, что $f(x)\big|_{x=n} = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ (в этом случае $f(x)$ называется производящей функцией для ряда (1)). Тогда ряд (1) и несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Начальным значением номера *n*, вместо 1, может быть и любое другое натуральное число n_0. Тогда и функцию $f(x)$ следует рассматривать при $x \geq n_0$.

▶ Вспомним, что сходимость несобственного интеграла $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильна существованию конечного предела

$$J = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} f(x)\,dx .$$

У нас по условию $f(x)$ - положительная $\Rightarrow$ $\int_{1}^{A} f(x)\,dx$ представляет собой функцию от *A*, возрастающую вместе с *A*. Поэтому для существования конечного предела $J = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\int_{1}^{A} f(x)\,dx$ была ограниченной сверху при любом $A > 1$.

По условию, $f(x)$ - монотонно убывающая в промежутке $[1, +\infty)$. Поэтому из соотношения $k \leq x \leq k+1$ $(k \in \mathbf{N})$ следует $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Интегрируя последнее неравенство по *x* от *k* до $k+1$, получаем

$$\int_{k}^{k+1} f(k)\,dx \geq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx .$$

$\Rightarrow$ принимая во внимание, что $f(k) = a_k$, $f(k+1) = a_{k+1}$, находим

$$a_k \geq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geq a_{k+1}. \tag{3}$$

Рассмотрим левое неравенство из (3) при $k = 1, 2, \ldots, n$. Будем иметь

$$a_1 \geq \int_{1}^{2} f(x)\,dx, \quad a_2 \geq \int_{2}^{3} f(x)\,dx, \quad \ldots , \quad a_n \geq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx .$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получим

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{=s_n} \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n .$$

α) Пусть ряд (1) сходится и его сумма равна s. Так как (1) - положительный ряд, то

$$s_n \leq s, \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N} .$$

Но тогда и подавно

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s, \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N} .$$

Пусть A - любое, сколь угодно большое число ($A > 1$). Всегда можно указать натуральное число n такое, что будет $A \leq n+1$, и, следовательно,

$$\int_1^{A} f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s \;\Rightarrow\; \int_1^{A} f(x)dx \text{ - ограниченная сверху } \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

сходится.

Видим, что из сходимости ряда (1) следует сходимость несобственного интеграла (2).

Рассмотрим теперь правое неравенство из (3) при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Будем иметь

$$a_2 \leq \int_1^{2} f(x)dx, \quad a_3 \leq \int_2^{3} f(x)dx, \quad \ldots , \quad a_n \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx .$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получим

$$\underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{=s_n - a_1} \leq \int_1^{n} f(x)dx \;\Rightarrow\; s_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx , \text{ для любого } n \in \mathbf{N} .$$

β) Пусть несобственный интеграл (2) сходится. Это означает, что существует конечный предел $J = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^{A} f(x)dx \;\Rightarrow$ в частности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)dx = J$. Ясно, что $\int_1^{n} f(x)dx \leq J$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Но тогда и подавно

$$s_n \leq a_1 + J , \text{ для любого } n \in \mathbf{N} .$$

Видим, что последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ - ограниченная сверху. Так как эта последовательность еще и неубывающая, то приходим к выводу, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \iff$ ряд (1) сходится. Показано, таким образом, что сходимость несобственного интеграла (2) влечет за собой сходимость ряда (1).

γ) Пусть ряд (1) расходится. Нужно показать, что тогда расходится и несобственный интеграл (2).

Рассуждаем от противного. Допустим, что несобственный интеграл (2) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться и ряд (1), а это не так. Значит, из расходимости ряда (1) следует расходимость несобственного интеграла (2).

δ) Пусть несобственный интеграл (2) расходится. Нужно показать, что тогда расходится и ряд (1).

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (1) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться и несобственный интеграл (2), а это не так. Значит, расходимость несобственного интеграла (2) влечет за собой расходимость ряда (1). Таким образом, теорема доказана полностью. ◀

Рассмотрим примеры применения интегрального признака Коши.

Пример 1. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}. \tag{4}$$

▶ Производящей для ряда (4) будет функция

$$f(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}, \quad x \in [1, +\infty).$$

1. Пусть $\lambda < 1$. Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \left. \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_{x=1}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda} - 1\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ расходится $\Rightarrow$ ряд (4) расходится, если $\lambda < 1$.

2. Пусть $\lambda = 1$. Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x \Big|_{x=1}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty$$

$\Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится $\Rightarrow$ ряд (4) расходится, если $\lambda = 1$.

3. Пусть $\lambda > 1$. Имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{A^{\lambda-1}} - 1\right) = \frac{1}{\lambda - 1}$$

$\Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ сходится, если $\lambda > 1$ $\Rightarrow$ ряд (4) сходится, если $\lambda > 1$.

Итак, ряд (4) сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \le 1$. ◀

Замечание. Обобщенный гармонический ряд является наиболее часто применяемым "эталонным рядом" в признаках сравнения.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{5}$$

▶ Производящей для ряда (5) будет функция

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x \in [2, +\infty).$$

Имеем

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{2}^{A} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln x)\Big|_{x=2}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) = +\infty$$

$\Rightarrow \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится $\Rightarrow$ ряд (5) расходится. ◀

Замечание об оценке суммы остатка сходящегося ряда.

Пусть с помощью интегрального признака Коши удалось установить, что ряд (1) сходится. Значит, этот ряд имеет сумму s. Однако найти точное значение суммы s удается лишь в сравнительно немногих случаях. Поэтому приходится вычислять s приближенно с указанной точностью, т.е. с заданной абсолютной погрешностью ε.

Приближенным значением суммы s ряда будет его n-ая частичная сумма s_n, т.е. $s \approx s_n$.

Задача состоит в следующем: определить, сколько нужно взять первых членов ряда для вычисления s_n, чтобы отбрасывание всех остальных членов вызывало бы ошибку, не превосходящую ε.

Так как значение суммы s неизвестно, то для величины $(s - s_n)$ приходится отыскивать некоторую оценку сверху: $(s - s_n) \le \alpha_n$, где α_n - некоторая функция от n, а затем, решая относительно n неравенство $\alpha_n \le \varepsilon$, определять значение $n = m$, наименьшее из возможных, но такое, чтобы было $\alpha_m \le \varepsilon$. При таком $n = m$ и подавно будет $(s - s_n) \le \varepsilon$.

Пусть

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots , \qquad (\tilde{1})$$

т.е. R_n - сумма остатка ряда (1) после n-го члена, так что $s = s_n + R_n$. Рассмотрим правое неравенство (3) при $k = n, n+1, \dots, n+l-1$. Будем иметь:

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx, \quad a_{n+2} \le \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx, \quad \dots , \quad a_{n+l} \le \int_{n+l-1}^{n+l} f(x)dx .$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получим

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+l} \le \int_n^{n+l} f(x)dx , \text{ т.е. } \sigma_l \le \int_n^{n+l} f(x)dx ,$$

где σ_l - l-ая частичная сумма ряда $(\tilde{1})$. Ясно, что $\sigma_l \le \int_n^{+\infty} f(x)dx$, для любого $l \in \mathbf{N}$. Переходя здесь к пределу при $l \to \infty$, находим

$$R_n \le \int_n^{+\infty} f(x)dx . \qquad (6)$$

(6) есть оценка сверху суммы остатка сходящегося ряда (1).

Например, для обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ при $\lambda > 1$ оценка принимает вид:

$$R_n \le \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \int_n^{+\infty} x^{-\lambda} dx = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_{x=n}^{x=+\infty} = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{n^{\lambda - 1}}.$$

§4. Признак Куммера

Признак Куммера является весьма общим признаком сходимости положительных рядов. Его можно рассматривать как общую схему для получения конкретных признаков. Как частные случаи из него получаются удобные для практического применения признаки сходимости положительных рядов.

Теорема 1 (признак Куммера).

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ - последовательность положительных чисел, произвольная, но такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \tag{2}$$

расходится. Составим для ряда (1) переменную

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

(K_n - переменная Куммера). Тогда:

1. Если, начиная с некоторого места, т.е. для $n \ge N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$), оказывается

$$K_n \ge s, \tag{3}$$

где $s > 0$ - определенное число, то ряд (1) сходится.

2. Если, начиная с некоторого места, т.е. для $n \ge N_{**}$ ($N_{**} \in \mathbf{N}$), оказывается

$$K_n < 0, \tag{4}$$

то ряд (1) расходится.

* ▶ 1а. Рассмотрим сначала случай, когда неравенство (3) выполняется для $n = 1, 2, 3, \ldots$ (т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$). Но тогда $(c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}) \ge s a_{n+1} > 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\{c_n a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ - монотонно убывающая последовательность. Ясно, что эта последовательность ограничена

снизу, например, числом 0 ($c_n a_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$). Значит, существует конечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n a_n)$.

Введем теперь в рассмотрение ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}). \tag{5}$$

Пусть s_n - n-ая частичная сумма ряда (5). Имеем

$$s_n = (c_1 a_1 - c_2 a_2) + (c_2 a_2 - c_3 a_3) + \ldots + (c_{n-1}a_{n-1} - c_n a_n) + (c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}) =$$
$$= (c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1})$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1}) = (c_1 a_1 - l)$ существует, конечный. Значит, ряд (5) сходится.

У нас $(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}) \ge s a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$. По первому признаку сравнения, из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s a_{n+1} \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s a_n \Rightarrow$ сходимость ряда (1).

1б. В случае, когда неравенство (3) выполняется для $n > N_*$, где $N_* \in \mathbf{N}$, вместо ряда (1) следует рассматривать его остаток после N_*-го члена, а именно ряд

$$\sum_{n=N_*+1}^{\infty} a_n . \tag{$\tilde{1}$}$$

У ряда ($\tilde{1}$) уже все члены, начиная с первого, будут удовлетворять неравенству (3). А тогда по доказанному выше ряд ($\tilde{1}$) будет сходящимся, а значит, будет сходиться и ряд (1), так как ряд и его остаток после N_*-го члена сходятся или расходятся одновременно.

2. По условию $K_n < 0$ для всех $n \ge N_{**}$ ($N_{**} \in \mathbf{N}$), т.е. $c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \Rightarrow$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$ для всех $n \ge N_{**}$ ($N_{**} \in \mathbf{N}$). А тогда по третьему признаку сравнения из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). ◄

Замечание. Условие теоремы 1, что ряд (2) расходится, используется лишь при доказательстве пункта 2.

Теорема 2 (признак Куммера в предельной форме).

Пусть имеется строго положительный ряд

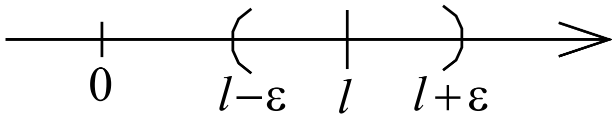
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1)$$

Пусть $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ - последовательность положительных чисел, произвольная, но такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \qquad (2)$$

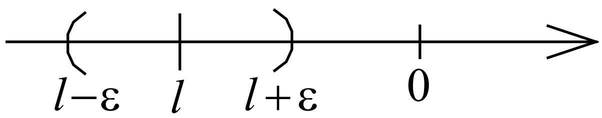
расходится. Пусть $K_n = c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$. Тогда:

1. Если $l > 0$, то ряд (1) сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд (1) расходится.



* ▶ 1а. Пусть $l > 0$, конечное. Возьмем $\varepsilon > 0$ любое, но такое, что $l - \varepsilon > 0$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_* такой, что $l - \varepsilon < K_n < l + \varepsilon$, если $n > N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $K_n > l - \varepsilon$, если $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$). Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится (в роли числа $s > 0$ выступает число $l - \varepsilon$).

1б. Пусть $l = +\infty$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = +\infty$. Это означает, что любому числу $M > 0$ отвечает номер N_* такой, что $K_n > M$, если $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$). Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится (в роли числа $s > 0$ выступает число $M > 0$).



2а. Пусть $l < 0$, конечное. Возьмем число $\varepsilon > 0$ любое, но такое, что $l + \varepsilon < 0$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_{**} такой, что $l - \varepsilon < K_n < l + \varepsilon$, если $n > N_{**}$ $\Rightarrow$ в частности, $K_n < l + \varepsilon$ (< 0), если $n > N_{**}$. Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.

2б. Пусть $l=-\infty$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} K_n=-\infty$. Это означает, что любому числу $M>0$ отвечает номер N_{**} такой, что $K_n<-M\ \ (<0)$, если $n>N_{**}$. Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится. ◄

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} K_n=0$, то признак Куммера не дает ответа на вопрос о поведении ряда (1).

Покажем теперь, как при помощи признака Куммера можно получить некоторые важные признаки сходимости положительных рядов как частные случаи его.

1. Пусть $c_n=1$, для любого $n\in\mathbf{N}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=1+1+1+\ldots+1+\ldots$$

расходится, так что условие, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ расходился, соблюдено. Имеем $K_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1$. Положим $D_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ (D_n - переменная Даламбера). Тогда

$$K_n=D_n-1. \tag{6}$$

Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l=\lim_{n\to\infty} D_n.$$

Видим из (6):

1) если $l>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n>0$ и, следовательно, ряд (1) сходится.

2) если $l<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n<0$ и, следовательно, ряд (1) расходится.

3) если $l=1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Даламбера**.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $D_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l=\lim_{n\to\infty} D_n.$$

Тогда:

1) если $l>1$, то ряд (1) сходится.

2) если $l<1$, то ряд (1) расходится.

2. Пусть $c_n = n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (это - гармонический ряд). Имеем

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

Положим $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ (R_n - переменная Раабе). Тогда

$$K_n = R_n - 1. \tag{7}$$

Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} R_n.$$

Из (4.7) следует:

1) если $l > 1$, то $\lim_{n\to\infty} K_n > 0$ и, следовательно, ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то $\lim_{n\to\infty} K_n < 0$ и, следовательно, ряд (1) расходится;

3) если $l = 1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Раабе**.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim_{n\to\infty} R_n$. Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то ряд (1) расходится.

Замечание. Имеем

$$R_n = n(D_n - 1). \tag{8}$$

Из (8) следует:

1) если $\lim_{n\to\infty} D_n > 1$, то $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$;

2) если $\lim_{n\to\infty} D_n < 1$, то $\lim_{n\to\infty} R_n = -\infty$.

Видим, что всего лишь двумя значениями предела переменной Раабе, а именно $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} R_n = -\infty$, охватываются все случаи, когда признак

Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда (1). Следовательно, признак Раабе значительно сильнее признака Даламбера.

3. Пусть $c_n = n\ln n$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{c_n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится (это было показано ранее, см. §3, пример 2). Имеем:

$$K_n = c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Положим $B_n = \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]$ (B_n - переменная Бертрана). Тогда

$$K_n = B_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9}$$

Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1$, то из (9) следует:

1) если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n > 0$ и, следовательно, ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n < 0$ и, следовательно, ряд (1) расходится;

3) если $l = 1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Бертрана**.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $B_n = \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$. Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то ряд (1) расходится.

Замечание. Имеем

$$B_n = \ln n \cdot (R_n - 1). \tag{10}$$

Из (10) следует:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = -\infty$.

Видим, что всего лишь двумя значениями предела переменной Бертрана, а именно $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = -\infty$, охватываются все случаи, когда признак Раабе дает ответ на вопрос о поведении ряда (1). Следовательно, признак Бертрана значительно сильнее признака Раабе.

4. **Признак Гаусса**.

Пусть имеется сторого положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ представимо в виде:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha}}, \tag{11}$$

где λ, μ, α - некоторые числа, причем $\alpha > 1$; θ_n - ограниченная переменная, т.е. существует число $M > 0$ такое, что $|\theta_n| \le M$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Тогда:

1) если $\lambda > 1$ (μ - любое), то ряд (1) сходится;

2) если $\lambda < 1$ (μ - любое), то ряд (1) расходится;

3) если $\lambda = 1$, а $\mu > 1$, то ряд (1) сходится;

4) если $\lambda = 1$, а $\mu \le 1$, то ряд (1) расходится.

▶ α) Пусть $\lambda \ne 1$. Из (11) следует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$ (при любом μ) $\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд (1) сходится, если $\lambda > 1$ (μ - любое), и расходится, если $\lambda < 1$ (μ - любое).

β) Пусть $\lambda = 1$, а $\mu \ne 1$. В этом случае соотношение (11) имеет вид

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha}} \;\Rightarrow\; \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha}} \;\Rightarrow\; n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}},$$

$$\text{т.е.}\quad R_n = \mu + \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \mu .$$

По признаку Раабе заключаем: ряд (1) сходится, если $\mu > 1$ $(\lambda = 1)$ и расходится, если $\mu < 1$ $(\lambda = 1)$.

γ) Пусть $\lambda = 1,\ \mu = 1$. В этом случае соотношение (11) имеет вид

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}}$$

$\Rightarrow$ после умножения обеих частей равенства на $\ln n$ получаем

$$\ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] = \frac{\theta_n \cdot \ln n}{n^{\alpha-1}},\ \text{т.е.}\ B_n = \frac{\theta_n \cdot \ln n}{n^{\alpha-1}}. \tag{12}$$

Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \ \Rightarrow$ в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}} = 0$. А тогда из (12) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$ (<1). Значит, ряд (1) расходится, если $\lambda = 1,\ \mu = 1$. ◀

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}. \tag{13}$$

▶ Имеем:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{(2n-1)!! \cdot (2n+2)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q} \cdot (n+1)^q \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q .$$

По формуле Тейлора

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{1}{2!}\frac{p(p-1)}{(2n+1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + \frac{1}{2!}\frac{q(q-1)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

А тогда

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q =$$

$$=1+\frac{q}{n}+\frac{p}{2n+1}+\frac{1}{2}\frac{q(q-1)}{n^2}+\frac{pq}{n(2n+1)}+\frac{1}{2}\frac{p(p-1)}{(2n+1)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

так как $\frac{p}{2n+1}=\frac{\frac{p}{2}}{n}-\frac{\frac{p}{2}}{n(2n+1)}$, то

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q = 1+\frac{q+\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

где θ_n - ограниченная переменная. Итак, $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{q+\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$. По признаку Гаусса ряд (13) сходится, если $q+\frac{p}{2}>1$, и расходится, если $q+\frac{p}{2}\le 1$.

Замечание. Из признака Куммера были получены признаки Даламбера, Раабе, Бертрана. Следует отметить, что эта цепочка все более и более тонких признаков может быть продолжена.

§5. Признак Коши

Теорема 1. Пусть имеется положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1}$$

1. Если начиная с некоторого места, т.е. для $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$) оказывается $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

2. Если начиная с некоторого места, т.е. для $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$) оказывается $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, где $0 < q < 1$, то ряд (1) сходится.

▶ 1. По условию, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ $a_n \geq 1$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ a_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ ряд (1) расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

2. По условию, $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ $a_n \leq q^n$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$, т.е.

$$a_{N_*+1} \leq q^{N_*+1}; \quad a_{N_*+2} \leq q^{N_*+2}; \quad \ldots \; .$$

Но ряд $q^{N_*+1} + q^{N_*+2} + \ldots$ - геометрический, сходящийся, так как $0 < q < 1$. А тогда по первому признаку сравнения будет сходиться ряд $a_{N_*+1} + a_{N_*+2} + \ldots$, а значит, будет сходится ряд (1) (если сходится остаток ряда после N_*-го члена, то сходится и сам ряд). ◀

Теорема 2 (признак Коши в предельной форме).

Пусть имеется положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1}$$

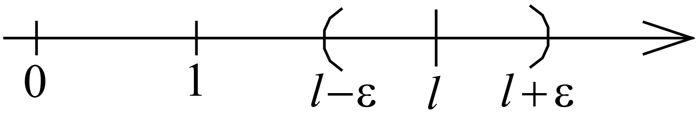
Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда

1) если $l > 1$, то ряд (1) расходится;

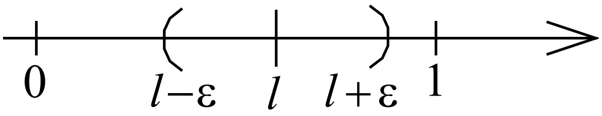
2) если $l < 1$, то ряд (1) сходится.

▶ 1a) Пусть $l > 1$, конечное. Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое, но такое, что $l - \varepsilon > 1$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_* такой, что

$l-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$, если $n>N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $\sqrt[n]{a_n}>l-\varepsilon$ (>1), если $n>N_*$ $\Rightarrow$ по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.



1б) Пусть $l=+\infty$. По условию, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$ $\Rightarrow$ любому числу $M>1$ отвечает номер N_* такой, что будет $\sqrt[n]{a_n}>M$ (>1), если $n>N_*$ $\Rightarrow$ по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.



2) Пусть $0\le l<1$. Возьмем $\varepsilon>0$ - любое, но такое, что $l+\varepsilon<1$. По условию $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N_* такой, что $l-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$, если $n>N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$ (<1), если $n>N_*$. А тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится. ◄

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}. \tag{2}$$

► Имеем $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{(n)^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\dfrac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot\ln n}}{\ln n}=\dfrac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(\ln x)^2\right]_x'}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)_x'}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n}=0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}=1$. А тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}=0$ (<1) $\Rightarrow$ ряд (2) сходится. ◄

§6. Знакочередующиеся ряды

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется знакочередующимся, если оказывается

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0, \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N},$$

т.е. если соседние члены ряда имеют различные знаки.

Станем обозначать через a_n абсолютную величину n-го члена ряда. Пусть для определенности первый член ряда положительный. Тогда знакочередующийся ряд запишется в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n . \tag{1}$$

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий и практически удобный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема (признак Лейбница).

Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают, т.е.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \ , \tag{2}$$

и если

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{3}$$

то ряд (1) сходится.

▸ Рассмотрим сначала частичную сумму ряда (1), содержащую четное число членов

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} \quad (n = 1, 2, \ldots \ ).$$

Запишем выражение для s_{2n} в виде

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \tag{4}$$

(сумма s_{2n} содержит конечное число слагаемых, и потому основные законы действий справедливы здесь без каких-либо ограничений). Каждое слагаемое в правой части выражения для s_{2n} неотрицательно. Следовательно, последовательность $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ - неубывающая.

Запишем теперь выражение для s_{2n} в виде

$$s_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0} . \tag{5}$$

Из (5) ясно, что $s_{2n} \le a_1$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Значит, $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ - последовательность, ограниченная сверху.

Так как последовательность $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ - неубывающая и ограниченная сверху, то существует конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь частичную сумму ряда (1), содержащую нечетное число членов.

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}.$$

Оба предела справа существуют, причем второй из них по условию равен нулю. Значит, существует и предел слева, и для него

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ без всяких оговорок относительно четности или нечетности индекса *n*. Следовательно, ряд (1) сходится. ◂

Замечание 1. Пусть ряд (1) удовлетворяет условиям теоремы теоремы Лейбница и пусть s - сумма этого ряда. Из доказательства теоремы следует, что последовательность $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ стремится при $n \to \infty$ к s, монотонно возрастая. Следовательно, $s_{2n} \le s$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Имеем, далее,

$$s_1 = a_1,$$
$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - (\underbrace{a_2 - a_3}_{\ge 0}) = s_1 - (\underbrace{a_2 - a_3}_{\ge 0}) \Rightarrow s_1 \ge s_3,$$
$$s_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_3 - (\underbrace{a_4 - a_5}_{\ge 0}) \Rightarrow s_3 \ge s_5,$$

и так далее. Получаем, таким образом,

$$s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \ldots \ge s_{2n-1} \ge \ldots ,$$

т.е. последовательность $\{s_{2n-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$ стремится при $n \to \infty$ к s, монотонно убывая. Следовательно, $s_{2n-1} \ge s$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Итак, имеем:

$$s_{2n} \le s \le s_{2n-1}, \text{ для любого } n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

В частности, при $n=1$ будет $\underbrace{a_1-a_2}_{\geq 0}\leq s\leq a_1 \quad\Rightarrow\quad 0\leq s\leq a_1$. Значит, сумма s знакочередующегося ряда (1), удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак первого члена ряда, и абсолютная величина этой суммы не превосходит абсолютной величины первого члена.

Замечание 2 (об оценке суммы остатка ряда).

Пусть знакочередующийся ряд (1) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Рассмотрим сначала остаток ряда (1) после $2m$-го члена. Обозначим сумму этого остатка через σ.

$$\sigma = a_{2m+1}-a_{2m+2}+a_{2m+3}-a_{2m+4}+\ldots\ .$$

По замечанию 1 имеем: $0\leq\sigma\leq a_{2m+1}$. Видим, что

1) сумма σ остатка ряда имеет знак первого члена остатка, и

2) $|\sigma|\leq a_{2m+1}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена этого остатка.

Рассмотрим теперь остаток ряда (1) после $(2m-1)$-го члена. Обозначим сумму этого остатка через $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}=-a_{2m}+a_{2m+1}-a_{2m+2}+\ldots=-(a_{2m}-a_{2m+1}+a_{2m+2}-\ldots).$$

Пусть

$$\tilde{\sigma}_*=a_{2m}-a_{2m+1}+a_{2m+2}-\ldots\ , \tag{9}$$

а тогда

$$\tilde{\sigma}=-\tilde{\sigma}_*. \tag{10}$$

Замечаем, что ряд (9) - знакочередующийся и удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Первый член ряда (9) - положительный. Поэтому, по доказанному выше, будем иметь:

1) $\tilde{\sigma}_*>0$;

2) $|\tilde{\sigma}_*|\leq a_{2m}$.

Но тогда:

1) $\tilde{\sigma}<0$ (так как $\tilde{\sigma}=-\tilde{\sigma}_*$);

2) $|\tilde{\sigma}|=|-\tilde{\sigma}_*|=|\tilde{\sigma}_*|\leq a_{2m}$.

Следовательно, и в этом случае имеем:

1) сумма $\tilde{\sigma}$ остатка ряда имеет знак первого члена остатка;

2) $|\tilde{\sigma}|\leq a_{2m}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена остатка.

*** *Замечание 3*.** Следует помнить, что в признаке сходимости Лейбница ряд должен удовлетворять трем условиям. Это:

1) знакочередуемость членов ряда,

2) монотонное убывание абсолютных величин членов ряда, т.е. $a_n \geq a_{n+1}$, для всех $n \in \mathbf{N}$,

3) стремление к нулю абсолютной величины общего члена ряда при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Каждое из этих условий подлежит обязательной проверке. Рассмотрим пример.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}. \tag{11}$$

Видим, что ряд (11) - знакочередующийся, и что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$. Однако условие $a_n \geq a_{n+1}$ выполнено не для всех $n \in \mathbf{N}$. В самом деле, имеем

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2\cdot(-1)^{n+1}}{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)\left(\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}\right)}.$$

Так как знаменатель последней дроби положительный, то имеет смысл рассматривать лишь числитель этой дроби. Имеем

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2\cdot(-1)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + 2\cdot(-1)^{n+1}.$$

Приходим к выводу: $a_n - a_{n+1} < 0$, если n - четное, и $a_n - a_{n+1} > 0$, если n - нечетное. Значит, абсолютные величины членов ряда (11) убывают не монотонно.

Покажем теперь, что ряд (11) расходится. Действительно, имеем:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\cdot\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1} = (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Значит, ряд (11) можно рассматривать как разность рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \tilde{a}_n \tag{12}$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}. \tag{13}$$

Ряд (12):

1) знакочередующийся;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 0;$

3) $\widetilde{a}_n - \widetilde{a}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} = \dfrac{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n+1}}{n(n-1)} =$

$= \dfrac{n^2\cdot n-(n-1)^2(n+1)}{n(n-1)\left[n\sqrt{n}+(n-1)\sqrt{n+1}\right]}.$

Так как знаменатель положителен при всех натуральных $n \ge 2$, то следует рассмотреть лишь числитель. Имеем $n^3-(n-1)(n^2-1)=n^3-n^3+n+n^2-1=n^2+n-1>0$, для всех $n\in\mathbf{N}$. Значит, $\widetilde{a}_n > \widetilde{a}_{n+1}$ для любого $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$.

Вывод: ряд (12) удовлетворяет всем трем условиям признака сходимости Лейбница $\Rightarrow$ ряд (12) сходится.

Ряд (13) - гармонический $\Rightarrow$ ряд (13) расходится.

Но тогда расходится и ряд (11). В самом деле, если предположить, что ряд (11) сходится, то тогда должен сходиться и ряд (13) (как разность двух сходящихся рядов (12) и (11)), а это не так.

§7. Ряды с членами любых знаков

В этом параграфе рассматриваются знакопеременные ряды общего вида, когда знаки членов ряда не обязательно чередуются (или знаки чередуются, но теорема Лейбница неприменима из-за немонотонного убывания абсолютных величин членов ряда).

1°. Общий признак сходимости рядов (критерий Коши).

Будем опять записывать ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Здесь через a_n обозначен n-й член ряда вместе со своим знаком.

Мы знаем, что сходимость ряда (1) равносильна сходимости последовательности его частичных сумм

$$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}. \tag{2}$$

Но для сходимости последовательности (2) необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N такой, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Пусть для определенности $m > n$ ($n > N$). Положим $m = n + p$, $p \in \mathbf{N}$. Тогда

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.$$

Получаем, следовательно:

Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Это и есть общий признак (критерий Коши) сходимости рядов.

2°. Абсолютная сходимость и условная сходимость.

Наряду с рядом (1) рассмотрим еще ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3}$$

(ряд (3) составлен из модулей членов ряда (1)).

Определение. Ряд (1) с членами любых знаков называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1).

Теорема 1. Абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

▶ По условию, ряд (1) абсолютно сходящийся. Это означает, что сходится ряд (3). Но тогда по критерию Коши любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Так как $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|$, то при $n > N$ будет:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Получаем, следовательно: любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Последнее означает (по критерию Коши), что ряд (1) сходится. ◀

Замечание. Доказанная теорема необратима. Может оказаться, что ряд (1) с членами разных знаков сходится, а ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

Так, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ сходится (он - знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница). Ряд же, составленный из модулей членов этого ряда, а именно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится (это гармонический ряд).

Определение. Ряд (1) с членами разных знаков называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

Изложенное выше приводит к разделению всех сходящихся рядов на два класса: ряды абсолютно сходящиеся и ряды условно сходящиеся.

Отметим, что все сходящиеся *положительные* ряды входят в класс абсолютно сходящихся рядов.

§8. О перестановке членов в сходящихся рядах

Лемма. Если положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

сходится, то его члены можно переставлять произвольным образом. От этого сходимость ряда не нарушится, и величина его суммы не изменится.

* ▶ По условию, ряд (1) сходится. Пусть s - сумма этого ряда. Переставим в ряде (1) его члены произвольным образом. Получим ряд

$$a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_k}+\ldots\ . \tag{2}$$

Обозначим через s_n n-ю частичную сумму ряда (1), а через σ_k k-ю частичную сумму ряда (2). Имеем

$$\sigma_k=a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_k}\,.$$

Положим $p=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ и рассмотрим s_p, т.е. p-ю частичную сумму ряда (1). Нетрудно понять, что все слагаемые, входящие в состав σ_k, войдут также и в состав s_p. Поэтому будет $\sigma_k\le s_p$. У нас ряд (1) положительный, и его сумма равна s. Но тогда $s_p \le s$ для любого $p \in \mathbf{N}$, а, следовательно, и подавно

$$\sigma_k \le s, \text{ для любого } k \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Заметим, что последовательность $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ - неубывающая и ограниченная сверху. Следовательно, существует конечный предел

$$\sigma = \lim_{k \to \infty} \sigma_k .$$

А значит, ряд (2) сходится и σ - сумма этого ряда.

У нас $\sigma_k \le s$, для любого $k \in \mathbf{N}$ (см. (3)). Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\sigma \le s. \tag{4}$$

Видим, что от перестановки членов в положительном сходящемся ряде его сумма не увеличивается. Но тогда она не может и уменьшиться, ибо в противном случае обратная перестановка членов приводила бы к увеличению суммы ряда, что невозможно. Значит, $\sigma = s$. Лемма доказана. ◄

Теорема. Члены абсолютно сходящегося ряда можно произвольным образом менять местами. От этого абсолютная сходимость ряда не нарушается и величина его суммы не изменяется.

* ► Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

- абсолютно сходящийся. Значит, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{$\tilde{5}$}$$

Переставим в ряде (5) его члены произвольным образом. Получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots . \tag{6}$$

Нужно показать, что ряд (6) - абсолютно сходящийся, т.е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{n_k}\right|, \tag{$\tilde{6}$}$$

и что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5).

Заметим, что ряд $(\tilde{6})$ получается из ряда $(\tilde{5})$ той же перестановкой членов, что и ряд (6) из ряда (5). Так как ряд $(\tilde{5})$ - положительный, сходящийся, то по лемме ряд $(\tilde{6})$ тоже сходится. А это означает, что ряд (6) сходится, и притом абсолютно.

Остается показать, что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5).

Положим $b_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$; $c_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Ясно, что

$$b_n = a_n, \text{ если } a_n > 0; \quad b_n = 0, \text{ если } a_n < 0;$$

$$c_n = 0, \text{ если } a_n > 0; \quad c_n = -a_n \ (>0), \text{ если } a_n < 0.$$

Значит, $b_n \geq 0$ и $c_n \geq 0$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{8}$$

- положительные. Кроме того, ряды (7) и (8) - сходящиеся: первый - как полусумма, а второй - как полуразность двух сходящихся рядов (а именно рядов ($\tilde{5}$) и (5)).

Введем в рассмотрение ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n_k} \tag{9}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n_k}. \tag{10}$$

Ряд (9) получается из ряда (7), а ряд (10) получается из ряда (8) той же перестановкой членов, что и ряд (6) из ряда (5). Отметим, что

$$\begin{gathered} b_n - c_n = a_n, \\ b_{n_k} - c_{n_k} = a_{n_k}. \end{gathered} \tag{11}$$

Так как ряды (7), (8) - положительные, сходящиеся, то по лемме сумма ряда (9) равна сумме ряда (7), а сумма ряда (10) равна сумме ряда (8). Значит, сумма разности рядов (9) и (10) будет равна сумме разности рядов (7) и (8). А тогда, принимая во внимания соотношения (11), заключаем, что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5). ◀

Замечание. В рядах, сходящихся условно, перестановка членов ряда недопустима. Перестановка членов в таких рядах может изменить сумму ряда или даже привести к нарушению сходимости ряда.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \quad \left(= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots \right). \tag{12}$$

Выше было показано, что ряд (12) сходится, но не абсолютно.

Поменяем местами члены в ряде (12), расположив за каждым положительным членом два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \ . \qquad (13)$$

Обозначим n-ю частичную сумму ряда (12) через s_n, а k-ю частичную сумму ряда (13) - через σ_k. Имеем

$$\sigma_{3n}=\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{}-\frac{1}{12}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}}_{}-\frac{1}{4n}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{}+\underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}}_{}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}.$$

Пусть s - сумма ряда (12). Отметим, что $0<s<1$ (см. замечание 1 “Об оценке суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница”). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\frac{1}{2}s.$$

Имеем далее

$$\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}s,$$

$$\sigma_{3n+2}=\sigma_{3n+1}-\frac{1}{4n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}s.$$

Значит, $\sigma_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{2}s$, без всяких оговорок относительно индекса k. Последнее означает, что ряд (13) сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}s$.

Так как $s\neq 0$, то заключаем: перестановка местами членов ряда (12) привела к изменению суммы ряда.

§9. Умножение абсолютно сходящихся рядов

Пусть имеются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots , \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n + \ldots . \qquad (2)$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n , \quad \text{где} \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 \qquad (3)$$

называется произведением рядов (1) и (2). В развернутом виде ряд (3) записывается так:

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) + \ldots .$$

Теорема Коши. Если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то ряд (3) тоже абсолютно сходится. При этом если A, B, C есть суммы рядов (1), (2), (3) соответственно, то $C = A \cdot B$.

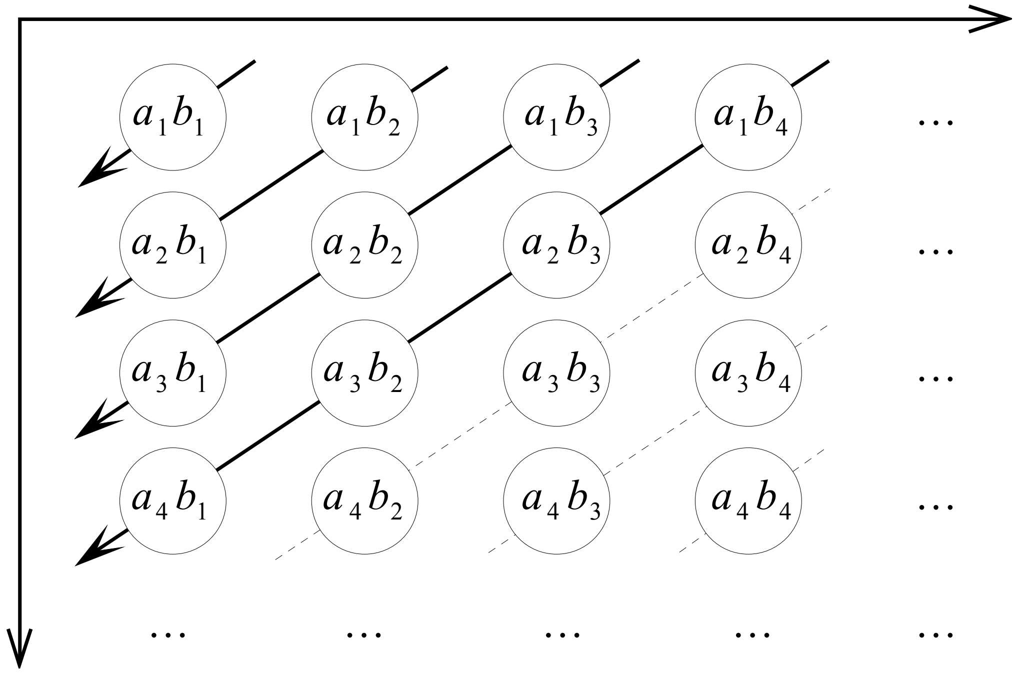
* ▶ Рассмотрим бесконечную прямоугольную матрицу

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \ldots & a_1 b_n & \ldots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \ldots & a_2 b_n & \ldots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \ldots & a_3 b_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \ldots & a_n b_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \qquad (\text{M})$$

Элементы матрицы (М) различными способами можно расположить в форме последовательностей. Если затем члены этих последовательностей соединять знаком “+”, то будем получать различные ряды. Все эти ряды будут отличаться друг от друга лишь порядком расположения их членов.

Рассмотрим два способа расположения элементов матрицы (М) в форме последовательностей.

1. По “диагонали”:

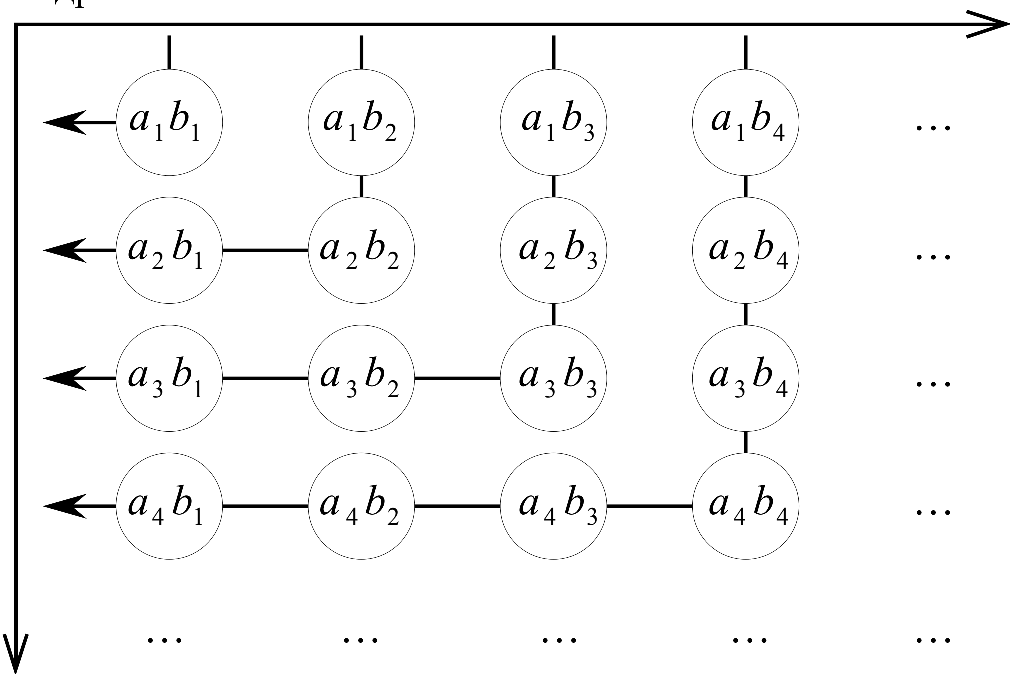


Такой схеме соответствует ряд

$$\underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_1b_2 + a_2b_1} + \underbrace{a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1} + \ldots \quad . \tag{4}$$

Заметим, что ряд (3) получается из ряда (4) объединением его членов в группы из одного, затем из двух, затем из трех и т. д. членов.

2. По “квадратам”:



Такой схеме соответствует ряд

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \ldots \; . \tag{5}$$

Подчеркнем еще раз, что ряды (4) и (5) отличаются друг от друга лишь порядком расположения своих членов.

Покажем, что ряд (5) сходится абсолютно, т.е. что сходится ряд

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_1b_3| + |a_2b_3| + |a_3b_3| + |a_3b_2| + |a_3b_1| + \ldots \, . \qquad (\tilde{5})$$

Для этого возьмем любую частичную сумму ряда $(\tilde{5})$. Нетрудно понять, что при достаточно большом n все слагаемые этой частичной суммы будут содержаться в сумме

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_n = &|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_1b_3| + \ldots + |a_1b_n| + \\ &+|a_2b_1| + |a_2b_2| + |a_2b_3| + \ldots + |a_2b_n| + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+|a_nb_1| + |a_nb_2| + |a_nb_3| + \ldots + |a_nb_n|. \end{aligned}$$

Имеем $\widetilde{Q}_n = \widetilde{A}_n \cdot \widetilde{B}_n$, где $\widetilde{A}_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, $\widetilde{B}_n = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ есть n-ые частичные суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (\tilde{1})$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \qquad (\tilde{2})$$

соответственно. Заметим, что ряды $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$ - положительные, сходящиеся (ибо по условию ряды (1) и (2) сходятся абсолютно).

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ есть суммы рядов $(\tilde{1})$, $(\tilde{2})$ соответственно. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$: $\widetilde{A}_n \le \widetilde{A}$, $\widetilde{B}_n \le \widetilde{B}$ $\Rightarrow$ $\widetilde{A}_n \cdot \widetilde{B}_n \le \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$, т.е. $\widetilde{Q}_n \le \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$. Следовательно, и подавно любая частичная сумма ряда $(\tilde{5})$ будет $\le \widetilde{A} \cdot \widetilde{B}$.

Итак, имеем: последовательность частичных сумм ряда $(\tilde{5})$ монотонна и ограничена сверху. Значит, она имеет конечный предел, и, следовательно, ряд $(\tilde{5})$ сходится. Но тогда ряд (5) сходится, и притом абсолютно.

У нас ряд (4) получается из ряда (5) некоторой перестановкой членов. Значит, ряд (4) тоже абсолютно сходится. Отметим также, что ряды (4) и (5) имеют одну и ту же сумму. Обозначим ее через s.

Было замечено ранее, что ряд (3) получается из ряда (4) объединением его членов в группы из одного, из двух, затем из трех и т. д. членов. Значит, ряд (3) тоже сходится, и его сумма C равна s.

Было установлено выше, что ряд (4) сходится абсолютно, т.е. что сходится ряд

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_1| + |a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1| + \dots \; . \qquad (\tilde{4})$$

Объединим члены ряда $(\tilde{4})$ в группы из одного, затем из двух, трех и т. д. членов. Получим сходящийся ряд

$$|a_1b_1| + \left(|a_1b_2| + |a_2b_1|\right) + \left(|a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1|\right) + \dots \; . \qquad (\tilde{\tilde{4}})$$

Так как модули членов ряда (3) не превосходят соответствующих членов ряда $(\tilde{\tilde{4}})$, то ряд, составленный из модулей членов ряда (3), сходится. А это означает, что ряд (3) сходится абсолютно. Выше было доказано, что сумма ряда (3) равна s (она равна суммам рядов (4) и (5)).

Остается показать, что $s = A \cdot B$.

Для этого снова возвратимся к ряду (5). Объединим члены ряда (5) в группы из одного, затем из трех, затем из пяти и т. д. членов. Получим ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots \; . \qquad (6)$$

Ясно, что ряд (6) сходится и его сумма равна s. Пусть T_n - n-я частичная сумма ряда (6). Легко видеть, что $T_n = A_n \cdot B_n$, где A_n и B_n - n-ые частичные суммы рядов (1) и (2) соответственно. У нас ряды (1) и (2) сходятся, и их суммы равны соответственно A и B. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B ,$$

т.е.

$$s = A \cdot B \; . \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Если ряды (1) и (2) сходятся, но не абсолютно, то их произведение, т.е. ряд (3), может оказаться даже расходящимся. Убедимся в этом на примере.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд-произведение будет таким:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right).$$

Заметим, что ряды-сомножители есть ряды знакочередующиеся, удовлетворяющие условиям теоремы Лейбница и, следовательно, сходящиеся. Но они сходятся не абсолютно, так как ряды, составленные из модулей их членов, расходятся.

Имеем:

$$|c_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right) \geq$$

$$\geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\text{âñåãî } n \text{ ñëàãàåìûõ}} = n\cdot\frac{1}{n} = 1, \text{ для любого } n \in \mathbf{N}$$

$\Rightarrow$ c_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$. Значит, ряд-произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Замечание 2. Справедливы следующие утверждения (принимаем их без доказательств).

1. Если ряды (1) и (2) сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно, то ряд-произведение (3) сходится. При этом если A, B, C есть суммы рядов (1), (2) (3) соответственно, то $C = A \cdot B$.

(Это - теорема Мертенса. В ней не гарантируется абсолютная сходимость ряда (3), если из рядов (1), (2), только один оказывается абсолютно сходящимся).

2. Пусть ряды (1) и (2) сходятся, и оба сходятся лишь условно. Тогда: если ряд-произведение (3) оказывается сходящимся, то между суммами A, B, C рядов (1), (2), (3) существует связь $C = A \cdot B$.

(Это - теорема Абеля).

Все изложенное в §§ 8,9 показывает, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми основными свойствами конечных сумм; для рядов неабсолютно сходящихся эти свойства, вообще говоря, не имеют места.

Напомним эти свойства.

1. Сходимость и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяются при произвольной перестановке его членов. Иначе говоря, для абсолютно сходящихся рядов справедлив переместительный закон сложения.

2. Два абсолютно сходящихся ряда можно перемножать как обыкновенные многочлены, т.е. каждый член одного ряда умножать на каждый член другого и результаты складывать в любом порядке; получающийся ряд тоже абсолютно сходящийся.

3. Для абсолютно сходящегося ряда остается в силе свойство: “абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых”:

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (для доказательства достаточно взять неравенство $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ и перейти в нем к пределу при $n \to \infty$).

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду, составленному из модулей членов этого ряда, могут быть применены все признаки сходимости, установленные для положительных рядов. Но нужно быть осторожным с признаками расходимости. Было отмечено: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ оказывается расходящимся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может все же сходиться (условно).

Установим достаточные признаки условной сходимости для некоторого вида знакопеременных рядов, не являющихся абсолютно сходящимися.

* §10. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля

1°. Преобразование Абеля.

Рассмотрим сумму парных произведений вида

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_m\beta_m . \qquad (1)$$

Положим

$$B_1 = \beta_1,\ B_2 = \beta_1 + \beta_2,\ B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\ \ldots,\ B_m = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m \quad \Rightarrow$$

$$\beta_1 = B_1,\ \beta_2 = B_2 - B_1,\ \beta_3 = B_3 - B_2,\ \ldots,\ \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Тогда сумму (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \cdot B_1 + \alpha_2\big(B_2 - B_1\big) + \alpha_3\big(B_3 - B_2\big) + \ldots + \alpha_m\big(B_m - B_{m-1}\big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2)B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)B_2 + \ldots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)B_{m-1} + \alpha_m B_m . \qquad (2)$$

(2) - так называемое тождество Абеля.

Опираясь на формулу (2), выведем следующую оценку для сумм вида (1):

Лемма. Если множители α_i не возрастают, т.е. $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3 \ge \ldots \ge \alpha_m$ (или не убывают, т.е. $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \ldots \le \alpha_m$) и если абсолютные величины сумм B_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) ограничены одним и тем же числом $L > 0$, т.е. $|B_i| \le L$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le L\,\big(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|\big). \qquad (3)$$

▶ Имеем из (2):

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le |\alpha_1 - \alpha_2||B_1| + |\alpha_2 - \alpha_3||B_2| + \ldots + |\alpha_{m-1} - \alpha_m||B_{m-1}| + |\alpha_m||B_m| \le$$

$$\le L\,\big(|\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_2 - \alpha_3| + \ldots + |\alpha_{m-1} - \alpha_m| + |\alpha_m|\big).$$

Так как разности $(\alpha_1 - \alpha_2)$, $(\alpha_2 - \alpha_3)$, ... , $(\alpha_{m-1} - \alpha_m)$ все одного знака, то будем иметь $\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le L\,\big(|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|\big) \le L\big(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|\big)$. ◀

Важно обратить внимание на то, что в неравенстве (3) оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

Приступим теперь к выводу признаков сходимости рядов Дирихле и Абеля.

2°. Теорема 1 (признак Дирихле).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{4}$$

Рассмотрим две последовательности:

$$\left\{v_k\right\}_{k\in N} \tag{5}$$

и

$$\left\{s_k\right\}_{k\in N} \tag{6}$$

($s_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, т.е. s_k - k-ая частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$). Тогда, если

1) последовательность (5) - монотонно убывающая и такая, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ($\Rightarrow v_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots$), и если

2) последовательность (6) - ограниченная, т.е. существует число $M > 0$ такое, что $|s_k| \le M$, $k \in \mathbf{N}$,

то ряд (4) сходится.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Мы докажем, что ряд (4) сходится, если покажем, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathbf{N}$ (см. критерий Коши сходимости числовых рядов). Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i} \tag{7}$$

Сумма (7) имеет вид (1), если положить в ней $\beta_i = u_{n+i}$, $\alpha_i = v_{n+i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Попытаемся оценить сумму (7) с помощью леммы. Имеем

$$\left|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p\right|=\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\right|=\left|s_{n+p}-s_n\right|\le\left|s_{n+p}\right|+\left|s_n\right|\le 2M$$

при любом $p\in\mathbf{N}$, ибо $\left|s_k\right|\le M$ при любом $k\in\mathbf{N}$ ($2M$ выступает в роли числа L). По условию $v_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. Значит, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N такой, что как только $k>N$, так сейчас же $v_k<\dfrac{\varepsilon}{6M}$. По лемме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|=\left|\sum_{i=1}^{p}u_{n+i}v_{n+i}\right|\le 2M\left(\left|v_{n+1}\right|+2\left|v_{n+p}\right|\right)=2M\left(v_{n+1}+2v_{n+p}\right),$$

при любом $p\in\mathbf{N}$. Следовательно, при $n>N$ будем иметь $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|<2M\,\dfrac{3\varepsilon}{6M}=\varepsilon$ при любом $p\in\mathbf{N}$.

Таким образом, показано, что любому $\varepsilon>0$ отвечает номер N такой, что как только $n>N$, так сейчас же $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_kv_k\right|<\varepsilon$ при любом $p\in\mathbf{N}$. Значит ряд (4) сходится.

3°. Теорема 2 (признак Абеля).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kv_k\ . \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность

$$\left\{v_k\right\}_{k\in N} \tag{7}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k\ . \tag{8}$$

Тогда: если

1) ряд (8) сходится и

2) последовательность (7) монотонная и ограниченная, т.е. существует число $M>0$ такое, что $\left|v_k\right|\le M$ при любом $k\in\mathbf{N}$,

то ряд (4) сходится.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ - любое. Мы докажем, что ряд (4) сходится, если покажем, что взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N такой, что как только $n>N$, так сейчас же $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathbf{N}$. И здесь отмечаем, что $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i}$. По условию ряд (8) сходится. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$ при любом $p \in \mathbf{N}$ (см. критерий Коши сходимости числовых рядов). (В обозначениях, принятых в лемме: $|B_i| < \frac{\varepsilon}{3M}$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $\frac{\varepsilon}{3M}$ выступает в роли числа $L > 0$). По лемме $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{n+1}| + 2|v_{n+p}|\right)$, если $n > N$, а p - любое натуральное. Но $|v_{n+1}| \le M$; $|v_{n+p}| \le M$. Следовательно, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$, если $n > N$, а $p \in \mathbf{N}$ - любое $\Rightarrow$ ряд (4) сходится. ◄

Замечание. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

Действительно, в признаке Лейбница рассматривается ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, в котором $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Положим $u_k = (-1)^{k-1}$, $v_k = a_k$. Имеем: $|s_k| = |u_1 + u_2 + \ldots + u_k| = \left|1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{k-1}\right| \le 1$, $k \in \mathbf{N}$; $\{v_k\}_{k\in\mathbf{N}} = \{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ - монотонно убывающая и такая, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Видим, что условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \ x \in [0, 2\pi]. \tag{9}$$

▸ При $x=0$ и $x=2\pi$ ряд (9) принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Это гармонический ряд. Мы знаем, что он расходится. Значит, ряд (9) расходится в точках $x=0$ и $x=2\pi$. Выберем теперь и закрепим любое $x\in(0,2\pi)$. Положим $u_k=\cos kx$, $k=1,2,\ldots$; $v_k=\frac{1}{k}$, $k=1,2,\ldots$. Последовательность $\{v_k\}_{k\in\mathbf{N}}=\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ - монотонно убывающая и такая, что $v_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. У нас $u_k(x)=\cos kx$. Значит $s_k=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos kx$. Умножим обе части последнего равенства на $2\sin\frac{x}{2}$. Получим

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot s_k=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx.$$

Так как $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)$, то будем иметь

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot s_k=\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)=\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}.$$

У нас $x\in(0,2\pi)$. Значит, $\sin\frac{x}{2}\neq 0$. А тогда

$$s_k=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\quad\Rightarrow\quad |s_k|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\quad \text{для любого}\quad k\in\mathbf{N}$$

$\Rightarrow$ $\{s_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ - ограниченная, для любого закрепленного x из $(0,2\pi)$.

Таким образом, при любом закрепленном x из $(0, 2\pi)$ ряд (6) удовлетворяет условиям признака Дирихле. Значит ряд (6) сходится при любом x из $(0, 2\pi)$. ◄

Глава 2. Функциональные последовательности и ряды

§1. Последовательности функций

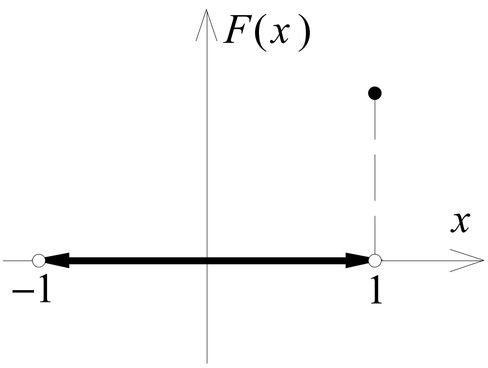
1°. Пусть имеется последовательность функций, заданных на множестве $X = \{x\}$

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad x \in X. \tag{1}$$

Пусть $E \subset X$. Пусть при каждом закрепленном x из E последовательность (1) имеет конечный предел. Ясно, что этот предел будет представлять собой функцию от x, определенную на множестве E.

Будем обозначать этот предел через $F(x)$ и называть предельной функцией последовательности (1) на множестве E. Запись:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E. \tag{2}$$

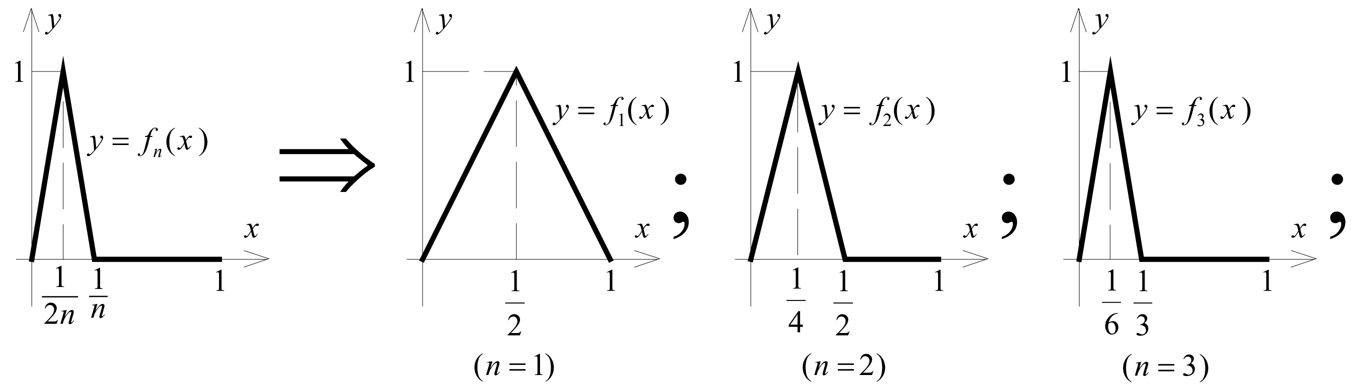


Пример 1. Для последовательности $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} = \{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$

$$X = (-\infty, +\infty); \quad E = (-1, 1];$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 2. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ задана на промежутке $[0, 1]$ следующим образом:



и т. д.

В этом примере $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. В самом деле, в точке $x=0$ имеем $f_n(0)=0$, для любого $n\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. Выберем и закрепим теперь любую точку $x_0\in(0,1]$. Всегда можно указать $n_0\in\mathbf{N}$ такое, что будет $\dfrac{1}{n_0}<x_0$ и, следовательно, будет: $f_n(x_0)=0$, для любого $n\ge n_0$ $(n\in\mathbf{N})$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$. Так как точка x_0 - любая, принадлежащая $(0,1]$, то получаем $F(x)=0$, для любого $x\in(0,1]$. Было отмечено выше, что $F(0)=0$. Следовательно, $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

Пусть последовательность (1) сходится на множестве *E*. Пусть $F(x)$ - предельная функция последовательности (1) на *E*, т.е. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in E$. Введем понятие “равномерно сходящейся” последовательности функций. Мы подойдем к этому сложному понятию, проведя некоторые предварительные рассуждения.

Возьмем $\varepsilon>0$ - любое, произвольно малое, и закрепим его. Возьмем какое-нибудь значение $x=x_1$ из множества *E*. Последовательность $\left\{f_n(x_1)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ - числовая, сходящаяся к $F(x_1)$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер (обозначим его N_{x_1}) такой, что при всех $n>N_{x_1}$ будет выполняться неравенство $\left|F(x_1)-f_n(x_1)\right|<\varepsilon$ (номер N_{x_1} берем наименьший из возможных). Возьмем затем другое значение $x=x_2$ из E $(x_2\ne x_1)$. Последовательность $\left\{f_n(x_2)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ - числовая, сходящаяся к $F(x_2)$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ (*тому же самому*) отвечает номер N_{x_2} такой, что при всех $n>N_{x_2}$ будет выполняться неравенство $\left|F(x_2)-f_n(x_2)\right|<\varepsilon$

(номер N_{x_2} берем наименьший из возможных). Отметим, что, вообще говоря, $N_{x_2} \neq N_{x_1}$, так как при $x = x_2$ наша последовательность может сходиться “медленнее” или “быстрее”, чем при $x = x_1$. Представим себе, что мы проделали такое для каждого x из *E*; мы получим в результате бесконечное множество номеров $\{N_x\}$. Логически мыслимы два случая: 1-й случай - множество номеров $\{N_x\}$ ограничено сверху, т.е. существует такой номер N, что все номера $N_x \leq N$; 2-й случай - множество номеров $\{N_x\}$ не ограничено сверху, т.е. среди номеров N_x имеются как угодно большие номера. Оказывается, что именно от этого различия в строении множества номеров $\{N_x\}$, т.е. от различия в характере сходимости последовательности (1) и зависят многие свойства этой последовательности (см. дальше теоремы 1-3).

В первом случае последовательность (1) называется равномерно сходящейся к $F(x)$ относительно x на *E*, а во втором - неравномерно сходящейся на *E*.

Дадим теперь более сжатое определение.

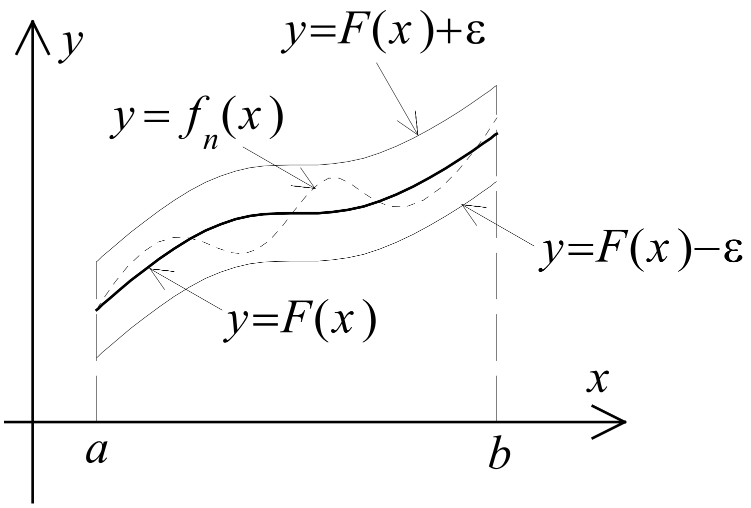
Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, сходящаяся на множестве *E* к $F(x)$, называется равномерно сходящейся к $F(x)$ относительно x на *E*, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε (не зависящий от *x*) такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех x из *E*. Если же такого номера N не существует, то последовательность называется неравномерно сходящейся на множестве *E*.

Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ сходится к $F(x)$ на *E* равномерно относительно x, то пишут

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E .$$

Замечание. Пусть

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$



Геометрически соотношение (3) означает: график любой функции $y = f_n(x)$, $x \in [a, b]$, при $n > N$ на всем протяжении от $x = a$ до $x = b$ целиком содержится в 2ε-полосе графика функции $y = F(x)$, $x \in [a, b]$.

В нашем примере 2 нельзя указать номера N, начиная с которого графики функций $y = f_n(x)$, $x \in [0, 1]$, на всем протяжении от $x = 0$ до $x = 1$ лежали бы целиком в 2ε-полосе графика функции $y \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. (В этом примере предельная функция $F(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$). Вывод: в примере 2 последовательность $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$, $x \in [0, 1]$, сходится к $F(x)$ на промежутке $[0, 1]$ неравномерно.

Теперь мы приступим к рассмотрению вопросов, из которых станет ясной полезность введенного понятия равномерной сходимости последовательности функций.

2°. О непрерывности предельной функции.

Пусть имеется последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$, $x \in E$. Пусть члены последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на *E*. Пусть $F(x)$ - предельная функция для $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ на *E*.

Вопрос: будет ли при этом непрерывной на *E* функция $F(x)$?

Ответ: не всегда.

Действительно, рассмотрим снова пример 1. В этом примере члены последовательности: $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на промежутке $(-1, 1]$. Предельная же функция $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } x \in (-1, 1) \\ 1, & \text{åñëè } x = 1 \end{cases}$ терпит разрыв в точке $x = 1$.

Теорема 1 (о непрерывности предельной функции).

Пусть дана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}, \quad x \in E \tag{1}$$

Пусть $f_n(x) \in C(E)$. Пусть $F(x)$ - предельная функция для последовательности (1) на *E*, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, $x \in E$.

Тогда: если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E$, то $F(x) \in C(E)$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Выберем и закрепим на E любую точку x_0. По условию $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E \quad \Rightarrow$ Взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что $|F(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ одновременно для всех x из E, если $n > N$. Возьмем номер m - любой, но такой, что $m > N$, и закрепим его. По условию функция $f_m(x) \in C(E) \Rightarrow$ в частности, $f_m(x)$ непрерывна в точке x_0. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Имеем

$$F(x) - F(x_0) = \big(F(x) - f_m(x)\big) + \big(f_m(x) - f_m(x_0)\big) + \big(f_m(x_0) - F(x_0)\big) \Rightarrow$$

$$|F(x) - F(x_0)| \le |F(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - F(x_0)|.$$

Но $|F(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in E$, ибо $m > N \Rightarrow$ в частности, $|f_m(x_0) - F(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, так как точка $x_0 \in E$. $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$. Таким образом, получаем $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$. Последнее означает, что функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0. У нас точка x_0 - любая, принадлежащая E. Значит, $F(x) \in C(E)$. ◀

Замечание 1. Условие $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E$ является достаточным для непрерывности функции $F(x)$ на E, но оно не необходимо.

Действительно, рассмотрим снова пример 2. В этом примере предельная функция $F(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]$. Значит $F(x) \in C([0,1])$, хотя последовательность: $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad x \in [0,1]$, рассматриваемая в этом примере, не является равномерно сходящейся на промежутке $[0,1]$.

Замечание 2. Если члены последовательности (1) непрерывны на E, а предельная функция $F(x), \quad x \in E$ этой последовательности оказывается разрывной на E, то последовательность (1) сходится на E неравномерно.

В самом деле, если бы последовательность (1) была равномерно сходящейся на E, то предельная функция $F(x)$, $x \in E$ была бы непрерывной на E, а это не так.

Вернемся еще раз к примеру 1. В этом примере члены последовательности $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in (-1, 1]$, непрерывны на промежутке $(-1, 1]$, предельная же функция $F(x)$, $x \in (-1, 1]$, оказалась разрывной на промежутке $(-1, 1]$. Следовательно, последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in (-1, 1]$, сходится на промежутке $(-1, 1]$ неравномерно.

3°. О предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x \in [a, b] \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ предельная функция для (1) на $[a, b]$, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Пусть $f_n(x) \in R\big([a, b]\big)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $F(x) \in R\big([a, b]\big)$.

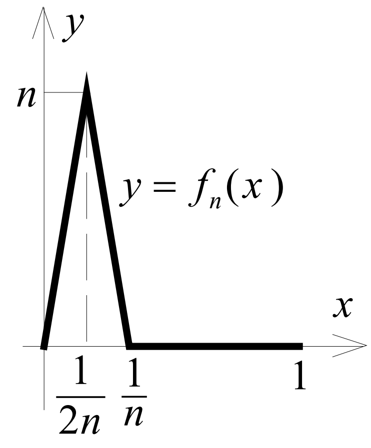
Возникает вопрос: справедливо или нет соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)dx \quad \left(= \int_a^b F(x)\,dx\right)? \tag{4}$$

Короче: допустим или нет предельный переход под знаком интеграла?

Оказывается, что соотношение (4) справедливо не всегда. Убедимся в этом на примере.

Пример 3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ задана на промежутке $[0, 1]$ следующим образом:



Совершенно так же, как и в примере 2, убеждаемся, что предельной функцией для этой последовательности будет $F(x)\equiv 0,\quad x\in[0,1]$. Следовательно, $\int\limits_0^1 F(x)dx=\int\limits_0^1 0\,dx=0$. Имеем далее $\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}$, для любого $n\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}$.

Видим, таким образом, что $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx}_{=\frac{1}{2}}\neq\underbrace{\int\limits_0^1\Big(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx\Big)}_{=0}$.

Теорема 2. Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x\in[a,b]. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ - предельная функция для (1) на $[a,b]$ (т.е. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, $x\in[a,b]$). Пусть $f_n(x)\in R\big([a,b]\big)$, для любого $n\in\mathbf{N}$ и $F(x)\in R\big([a,b]\big)$. Тогда: если $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F(x),\quad x\in[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b\Big(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big)dx\quad\left(=\int\limits_a^b F(x)dx\right).$$

▶ Для определенности считаем $a<b$. Возьмем $\varepsilon>0$ - любое. По условию $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F(x),\quad x\in[a,b]$ $\Rightarrow$ Взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что $|f_n(x)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ сразу для всех $x\in[a,b]$, если $n>N$.

Имеем:

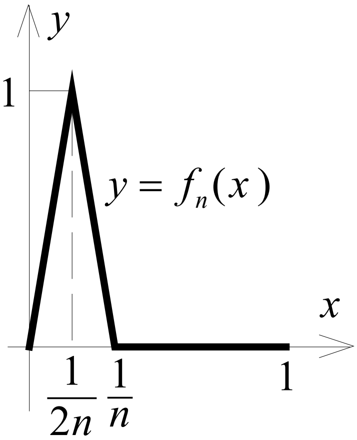
$$\int\limits_a^b f_n(x)dx-\int\limits_a^b F(x)dx=\int\limits_a^b\big(f_n(x)-F(x)\big)dx\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx-\int\limits_a^b F(x)dx\right|=\left|\int\limits_a^b\big(f_n(x)-F(x)\big)dx\right|\le$$

$$\le\int\limits_a^b|f_n(x)-F(x)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon,\text{ если } n>N.$$

Последнее означает, что $\int\limits_a^b F(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Замечание 1. Условие: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in [a,b]$ является достаточным для допустимости предельного перехода под знаком интеграла, но оно не необходимо.



В самом деле вернемся к примеру 2. В этом примере $F(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]$. Следовательно, $\int\limits_0^1 F(x)dx = 0$, т.е. $\int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = 0$. Имеем далее,

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2n}\cdot 1 = \frac{1}{2n}, \text{ для любого } n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

Видим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \quad (=0)$, хотя последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in [0,1]$ не является равномерно сходящейся к своей предельной функции на промежутке $[0,1]$.

Замечание 2. Пусть $f_n(x) \in R([a,b])$, $F(x) \in R([a,b])$. Если оказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx \neq \int\limits_a^b F(x)dx$, то последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in [a,b]$ сходится на $[a,b]$ неравномерно. В нашем примере

3 последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x\in[0,1]$ сходится на $[0,1]$ неравномерно.

*** 4°. О дифференцировании последовательностей.**

Пусть имеется последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\quad x\in[a,b]. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ - предельная функция для (1) на $[a,b]$. Пусть на промежутке $[a,b]$ существуют $f_n'(x)$ и $F'(x)$.

Вопрос: справедливо или нет соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=F'(x)$?

Ответ: не всегда.

Убедимся в этом на примере.

Пример 4. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}=\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}},\quad x\in[0,2\pi].$$

Здесь: $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow$ $F'(x)\equiv 0$, $x\in[0,2\pi]$; $f_n'(x)=\cos nx$, для любого $n\in\mathbf{N}$, $x\in[0,2\pi]$. Последовательность $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}}=\{\cos nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ не стремится к нулю на промежутке $[0,2\pi]$, так как, например, при $x=0$ ее предел равен единице.

Теорема 3. Пусть имеется последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x\in[a,b]. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ - предельная функция для (1) на $[a,b]$, т.е. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in[a,b]$. Пусть члены последовательности (1) имеют в $[a,b]$ непрерывные производные $f_n'(x)$.

Тогда: если последовательность, составленная из производных, а именно

$$\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \tag{5}$$

сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, то $F(x)$ имеет на $[a,b]$ производную $F'(x)$, причем $f_n'(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F'(x)$, $x\in[a,b]$.

▶ Положим $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$. Так как $f_n'(x)\in C\big([a,b]\big)$ и $f_n'(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\varphi(x)$, $x\in[a,b]$ то $\varphi(x)\in C\big([a,b]\big)$ (см. теорему 1). Возьмем любую точку $x_0\in(a,b)$ и закрепим ее. Дадим x_0 приращение Δx любое, но такое, что $\Delta x\neq 0$ и точка $x_0+\Delta x\in[a,b]$. Рассмотрим разность

$$\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0). \qquad (6)$$

По теореме Лагранжа

$$f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)=f_n'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

Поэтому

$$\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)=f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)=$$

$$=\big(f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0+\theta\Delta x)\big)+\big(\varphi(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)\right|\le$$

$$\le\left|f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0+\theta\Delta x)\right|+\left|\varphi(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)\right|. \qquad (7)$$

Возьмем $\varepsilon>0$ - любое. По условию $f_n'(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\varphi(x)$, $x\in[a,b]$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же $\left|f_n'(x)-\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x\in[a,b]$. Отсюда следует, что

$$\left|f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0+\theta\Delta x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } n>N. \qquad (8)$$

Было отмечено, что $\varphi(x)\in C([a,b])\Rightarrow\varphi(x)$ - непрерывна в точке x_0 $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что как только $x\in[a,b]$ и $|x-x_0|<\delta$, так сейчас же $\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ если $|\Delta x|<\delta$, то, принимая во внимание, что $0<\theta<1$, получим:

$$\left|\varphi(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

Из соотношений (7), (8), (9) следует неравенство

$$\left|\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)\right|<\varepsilon, \text{ если } n>N \text{ и } |\Delta x|<\delta \qquad (10)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)\right|\le\varepsilon, \text{ если } |\Delta x|<\delta. \qquad (11)$$

Таким образом, мы доказали, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $|\Delta x| < \delta$ так сейчас же выполняется неравенство (11). А это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to\infty} \dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \varphi(x_0)$, т.е. $F'(x_0)$ существует, причем $F'(x_0) = \varphi(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0) = F'(x_0)$.

Так как точка x_0 - любая, принадлежащая (a,b), то получаем: $F'(x)$ существует для $x \in (a,b)$, причем $F'(x) = \varphi(x), \quad x \in (a,b)$, а это означает $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = F'(x), \quad x \in (a,b)$.

Аналогично проводится доказательство для точек $x_0 = a$ и $x_0 = b$. Следовательно, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = F'(x), \text{ для любого } x \in [a,b].$$

***5°. Признаки равномерной сходимости последовательности функций.**

Теорема 4. Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ - предельная функция для последовательности (1) на *E*, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Для того, чтобы последовательность (1) сходилась к $F(x)$ на *E* равномерно, необходимо и достаточно, чтобы было:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0. \tag{12}$$

▶ *Необходимость*. Дано: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N*, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n(x) - F(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in E$ $\Rightarrow$ $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \ (< \varepsilon)$, если $n > N$.

Заметим, что последовательность $\left\{\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)|\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ - числовая. Показано, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N* такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|=0$.

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|=0$. Требуется доказать, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F(x)$, $x\in E$.

По условию, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|=0 \;\Rightarrow$ любому $\varepsilon>0$ отвечает номер N такой, что как только $n>N$, так сейчас же

$$\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|<\varepsilon. \tag{13}$$

Отметим, что здесь номер N зависит только от ε, ибо последовательность $\left\{\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-F(x)\right|\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ - числовая. Из (13) следует, что если $n>N$, то сразу для всех $x\in E$ будет $\left|f_n(x)-F(x)\right|<\varepsilon$. Показано, что любому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же $\left|f_n(x)-F(x)\right|<\varepsilon$ сразу для всех $x\in E$. Последнее означает, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F(x)$, $x\in E$. ◀

Теорема 5 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций).

Пусть имеется последовательность функций

$$\left\{f_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}},\quad x\in E. \tag{1}$$

Для того, чтобы последовательность (1) имела на E предельную функцию $F(x)$ и чтобы последовательность (1) сходилась к $F(x)$ равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon>0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же при любом $p\in\mathbf{N}$ и сразу для всех $x\in E$ было

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon. \tag{14}$$

▶ *Необходимость*. Дано: последовательность (1) имеет на E предельную функцию $F(x)$, и $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}F(x)$, $x\in E$. Требуется доказать, что любому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же при любом $p\in\mathbf{N}$ и сразу для всех $x\in E$ будет $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. По условию, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N*, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|f_n(x) - F(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in E$. Пусть m - любое натуральное число, удовлетворяющее условию $m > N$. Тогда сразу для всех *x* из *E* будет $\left|f_m(x) - F(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем

$$f_m(x) - f_n(x) = \left(f_m(x) - F(x)\right) + \left(F(x) - f_n(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f_m(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_m(x) - F(x)\right| + \left|F(x) - f_n(x)\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ если $m > N$ и $n > N$, то сразу для всех x из E будет $\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Пусть, для определенности, $m > n$ ($n > N$). Положим $m = n + p$, $p \in \mathbf{N}$. Теперь предыдущее неравенство может быть записано в виде $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ для всех $x \in E$, если $n > N$, а p - любое натуральное число. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N*, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу же для всех x из E оказывается $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$. Требуется доказать, что у последовательности $\left\{f_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in E$, имеется на E предельная функция $F(x)$, причем $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$.

Возьмем на множестве E любое $x = x_0$ и закрепим. Последовательность $\left\{f_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ при $x = x_0$ будет числовой. Для нее выполнены условия критерия Коши сходимости числовых последовательностей. Следовательно, последовательность $\left\{f_n(x_0)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. У нас x_0 - любая точка из множества *E*. Значит, у последовательности $\left\{f_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in E$, на множестве E существует предельная функция $F(x)$. Остается показать, что

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x),\ x \in E.$$

Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. По условию, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N*, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех *x* из *E*

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad f_n(x) - \varepsilon < f_{n+p}(x) < f_n(x) + \varepsilon. \qquad (15)$$

Пусть в (15) n - любое, удовлетворяющее условию $n > N$, закрепленное. Перейдем при этом условии в неравенстве (15) к пределу при $p \to +\infty$. Так как $f_{n+p}(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} F(x)$, $x \in E$, то получим $f_n(x) - \varepsilon \le F(x) \le f_n(x) + \varepsilon$, $x \in E$, т.е. $\left| f_n(x) - F(x) \right| \le \varepsilon$ для всех *x* из *E*, если $n > N$. У нас *N* зависит только от ε. Получили:

Любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N*, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left| f_n(x) - F(x) \right| \le \varepsilon$ сразу для всех *x* из *E*. Последнее означает, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. ◀

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность

$$\left\{ f_n(x) \right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{ \frac{nx}{1+n+x} \right\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad x \in [0,1].$$

▶ $$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n\left(\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{n} + \frac{x}{n}} = x,$$

$$x \in [0,1];$$

$$\left| F(x) - f_n(x) \right| = \left| x - \frac{nx}{1+n+x} \right| = \left| \frac{x+x^2}{1+n+x} \right| = \frac{x+x^2}{1+n+x} = r_n(x).$$

îáîçíà÷åíèå

Имеем: $r_n'(x) = \dfrac{x^2 + (n+1)(2x+1)}{(1+n+x)^2} > 0$, $x \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $r_n(x)$ строго возрастает на промежутке $[0,1]$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in[0,1]} r_n(x) = r_n(x)\Big|_{x=1} = \dfrac{x^2+x}{1+n+x}\Bigg|_{x=1} = \dfrac{2}{n+2}$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+2} = 0$ $\Rightarrow$ данная последовательность сходится равномерно на промежутке $[0,1]$. ◀

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\left\{f_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in[0,1]$.

$$\blacktriangleright\ F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{n^2\left(x^2+\dfrac{1}{n^2}\right)}=0,\ \ x\in[0,1];$$

$$r_n(x)=\left|F(x)-f_n(x)\right|=\left|0-\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right|=\frac{2nx}{1+n^2x^2},\ \ x\in[0,1]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_n'(x)=\frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}\ \Rightarrow\ r_n'(x)=0 \text{ при } x=\frac{1}{n}.$$

При переходе через точку $x=\dfrac{1}{n}$ производная меняет знак с “+” на “-” $\Rightarrow$ $r_n(x)$ в точке $x=\dfrac{1}{n}$ имеет максимум. Следовательно, $\sup\limits_{x\in[0,1]} r_n(x)=r_n(x)\Big|_{x=\frac{1}{n}}=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{n}}=1\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]} r_n(x)=1\ (\neq 0)\ \Rightarrow$ данная последовательность на промежутке $[0,1]$ сходится неравномерно.

§2. Функциональные ряды (общая теория)

1°. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{1}$$

Пусть все члены $u_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ ряда (1) определены на множестве $X=\left\{x\right\}$. Пусть E $(E\subset X)$ есть совокупность всех значений аргумента

x, при которых ряд (1) сходится. Тогда E называют областью сходимости этого ряда.

Отметим, что областью сходимости ряда (1) может оказаться числовое множество самого различного строения. В дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело со случаями, когда областью сходимости ряда будет промежуток - замкнутый, открытый или полуоткрытый; конечный или бесконечный.

Нетрудно понять, что в области сходимости ряда (1) его n-я частичная сумма, а также сумма и сумма остатка ряда после n-го члена будут функциями от x. Будем обозначать их соответственно $s_n(x)$, $s(x)$, $R_n(x)$, $x \in E$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1, 1)$; $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Пример 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \ldots + (1-x)x^n + \ldots .$$

В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1, 1]$;

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right]$. В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-\infty, +\infty)$; $s(x) \equiv 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, при $x = 0$ имеем $s(0) = 0$, так как все члены ряда равны нулю. Пусть теперь x - любое, конечное, не равное нулю. Имеем для такого x:

$$s_n(x) = \left[xe^{-x^2} - 0 \right] + \left[2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2} \right] + \left[3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2} \right] + \ldots +$$

$$+ \left[(n-1)xe^{-(n-1)x^2} - (n-2)xe^{-(n-2)x^2} \right] + \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right] =$$

$$= nxe^{-nx^2} = \frac{nx}{e^{nx^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Вывод: данный ряд сходится при любом x из $(-\infty, +\infty)$, причем $s(x) \equiv 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Введем понятие равномерно сходящегося ряда. Важность этого понятия станет ясна из дальнейшего, когда мы придем к выяснению вопроса о том, когда для функционального ряда, представляющего собой (если говорить формально) “сумму бесконечного числа функций”, сохраняются основные свойства суммы конечного числа функций. Дело в том, что не всегда сумма ряда непрерывных функций оказывается непрерывной функцией, не всегда интеграл от суммы ряда непрерывных функций равен сумме ряда интегралов от каждой из этих функций, не всегда производная от суммы ряда дифференцируемых функций равна сумме ряда производных от каждой из этих функций.

Встретившись с такими фактами, естественно было пытаться определить, каким добавочным условиям должен удовлетворять функциональный ряд (или каким должен быть характер сходимости этого ряда), чтобы для него оставались справедливыми основные свойства суммы конечного числа функций. В поисках этих условий математики 40-х годов прошлого столетия пришли к понятию “равномерно сходящегося ряда”.

Определение. Пусть имеется функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть этот ряд сходится на множестве E и $s(x)$, $x \in E$, - его сумма. Пусть $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in E$, - последовательность частичных сумм ряда (1). Ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве E, если $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in E$.

Иначе:

Ряд (1), сходящийся на множестве E, называется равномерно сходящимся на E, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ (т.е. $|R_n(x)| < \varepsilon$) сразу для всех $x \in E$.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^2 + n}.$$

▶ Замечаем, что при любом закрепленном $x \in (-\infty, +\infty)$ этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Значит, он сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$. Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ - любое. Мы знаем, что для суммы остатка ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, справедлива оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|\frac{(-1)^n}{x^2+(n+1)}\right| = \frac{1}{x^2+(n+1)}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ясно, что $\dfrac{1}{x^2+(n+1)} < \dfrac{1}{n}$, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{3}$$

Неравенство (3) выполняется при всех n ($n \in \mathbf{N}$), удовлетворяющих условию: $n > N$, где $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Отметим, что $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ зависит только от ε (*N* не зависит от *x*). Но тогда и подавно $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, если только $n > N$.

Вывод: данный ряд сходится равномерно на промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◄

2°. О непрерывности суммы ряда.

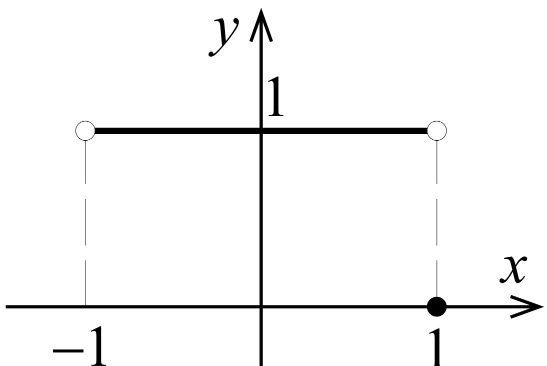
Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть ряд (1) сходится на *E* и $s(x)$ - его сумма.

Вопрос: будет ли $s(x)$ непрерывной функцией на *E*, если члены ряда (1), т.е. функции $u_n(x)$, непрерывны на *E*?

Ответ: не всегда.



В самом деле, вернемся к примеру 2. В этом примере ряд сходится на промежутке $(-1, 1]$. Члены ряда $u_n(x) = (1-x)\cdot x^n$ есть функции непрерывные на промежутке $(-1, 1]$. Однако сумма ряда $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ есть функция разрывная. Она терпит разрыв в точке $x = 1$.

Теорема 1. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть $s(x)$, $x \in E$, - сумма ряда (1). Пусть $u_n(x) \in C(E)$. Тогда: если ряд (1) сходится равномерно на *E*, то $s(x) \in C(E)$.

▶ По условию $u_n(x) \in C(E) \Rightarrow$ частичные суммы ряда (1) $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... , $s_n(x)$, ... есть функции непрерывные на *E* как суммы конечного числа непрерывных функций. По условию имеем также $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in E$. Но тогда по теореме 1 предыдущего параграфа о непрерывности предельной функции заключаем, что $s(x) \in C(E)$.

Замечание 1. Равномерная сходимость ряда (1) на *E* достаточна для непрерывности на *E* суммы ряда $s(x)$, но она не необходима. Например, у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$, $x \in (-\infty, +\infty)$, сумма $s(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, а значит, $s(x) \in C\big((-\infty, \infty)\big)$, хотя этот ряд и не является равномерно сходящимся на промежутке $(-\infty, +\infty)$ (это будет показано ниже).

Замечание 2. Если члены ряда (1) есть функции непрерывные на *E*, а сумма $s(x)$ этого ряда оказывается функцией разрывной на *E*, то ряд (1) будет неравномерно сходящимся на *E*.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (1) сходится равномерно на *E*. Но тогда по теореме 1 сумма $s(x)$ этого ряда должна быть непрерывной на *E*, а это не так.

В нашем примере 2 члены ряда $u_n(x) = (1-x)x^n$ есть функции непрерывные на промежутке $(-1, 1]$, а сумма $s(x)$ этого ряда есть функция разрывная на промежутке $(-1, 1]$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ сходится неравномерно на промежутке $(-1, 1]$.

3°. О почленном интегрировании ряда.

Теорема 2. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in [a, b]. \tag{$\tilde{1}$}$$

Пусть $u_n(x) \in C\big([a, b]\big)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда: если ряд $(\tilde{1})$ сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, то его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx .$$

▶ Пусть $s(x)$ - сумма ряда ($\tilde{1}$), $s_n(x)$ - n-я частичная сумма ряда ($\tilde{1}$). Отметим, что $s(x) \in C([a,b])$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Значит, $s(x) \in R([a,b])$, т.е. $\int_a^b s(x) dx$ существует (т.е. $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx$ существует). По условию, ряд ($\tilde{1}$) сходится равномерно на промежутке $[a,b]$. Значит, $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in [a,b]$. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла (см. теорему 2 предыдущего параграфа)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx . \tag{4}$$

(Заметим, что $\int_a^b s_n(x) dx$ существует, ибо $s_n(x) \in C([a,b])$ как сумма конечного числа непрерывных функций.) Имеем

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b \left[u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \right] dx =$$

$$= \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \ldots + \int_a^b u_n(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x) dx = \sigma_n .$$

Здесь σ_n - n-я частичная сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx . \tag{5}$$

Соотношение (4) в новых обозначениях имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b s(x) dx . \tag{6}$$

Было подчеркнуто выше, что $\int_a^b s(x) dx$ существует. Значит, существует конечный предел $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, а это означает, что ряд (5) сходится и его сумма равна σ. Таким образом, получили: $\int\limits_a^b s(x)dx = \sigma$, т.е. $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$. ◄

* ***Замечание 1***. Условие равномерной сходимости ряда $(\tilde{1})$ является достаточным для допустимости почленного интегрирования функционального ряда, но оно не необходимо.

* ***Пример***. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $x \in [0,1]$. Этот ряд сходится на промежутке $[0,1]$, и его сумма $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Видим, что члены данного ряда есть функции непрерывные на промежутке $[0,1]$, а сумма $s(x)$ есть функция разрывная на этом промежутке. Значит, наш ряд сходится неравномерно на промежутке $[0,1]$. Имеем $\int\limits_0^1 s(x)dx = \int\limits_0^1 1 \cdot dx = 1$. Имеем, далее,

$$\int\limits_0^1 u_n(x)dx = \int\limits_0^1 (1-x)x^n\,dx = \int\limits_0^1 (x^n - x^{n+1})dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

А тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \tag{7}$$

Пусть σ_n - n-ая частичная сумма ряда (7). Имеем:

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Видим, таким образом, что

$$\underbrace{\int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx}_{=1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 u_n(x)dx}_{=1},$$

хотя исходный ряд был неравномерно сходящимся.

Замечание 2. Если оказывается, что

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\,,$$

то исходный ряд $(\tilde{1})$ не является равномерно сходящимся на промежутке $[a, b]$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $(\tilde{1})$ сходится равномерно на промежутке $[a, b]$. Но тогда должно быть, по теореме 2,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\,,$$

а это не так.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right], \quad x \in [0, 1]. \tag{8}$$

Раньше было показано, что сумма $s(x)$ этого ряда равна нулю на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, в частности, $s(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Значит, $\int_0^1 s(x)\,dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$. Имеем, далее,

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^1 \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(n-1)x^2}\, d\left[-(n-1)x^2\right] - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2}\, d[-nx^2] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{-(n-1)x^2} - e^{-nx^2} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n} \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n} \right). \tag{9}$$

Обозначим через σ_n n-ю частичную сумму ряда (9). Имеем:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Видим, что

$$\underbrace{\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx}_{=0} \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx}_{=\frac{1}{2}}.$$

Вывод: ряд (8) сходится на промежутке $[0,1]$ неравномерно. (Значит, он сходится неравномерно на промежутке $(-\infty, +\infty)$.)

4°. О почленном дифференцировании функционального ряда.

Теорема 3. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in [a,b]. \qquad (\tilde{1})$$

Пусть этот ряд сходится на промежутке $[a,b]$. Пусть члены ряда $(\tilde{1})$ имеют в $[a,b]$ непрерывные поизводные $u_n'(x)$. Тогда: если ряд, составленный из производных,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad (10)$$

сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, то исходный ряд $(\tilde{1})$ можно в промежутке $[a,b]$ дифференцировать почленно, т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

▶ Обозначим суммы рядов $(\tilde{1})$ и (10) через $s(x)$ и $\sigma(x)$ соответственно. Отметим, что $\sigma(x) \in C([a,b])$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Следовательно, $\sigma(x) \in R([a,b]) \ \Rightarrow \ \sigma(t) \in R([a,x])$, где x - любое, удовлетворяющее условию: $a < x \le b$. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(t)$, $t \in [a,x]$, выполнены условия теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. Поэтому

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big|_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(a) \right]. \qquad (11)$$

Так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходятся и имеют суммы $s(x)$ и $s(a)$ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x)-u_n(a)\right]$ сходится и его сумма равна $\left(s(x)-s(a)\right)$. Равенство (11) может быть записано, следовательно, в виде

$$\int_a^x \sigma(t)dt = s(x)-s(a) \quad \Rightarrow \quad s(x)=s(a)+\int_a^x \sigma(t)dt. \qquad (12)$$

Равенство (12) установлено нами для $x \in (a,b]$. Нетрудно видеть, что оно верно и при $x=a$. В правой части равенства (12) мы имеем интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. По теореме Барроу

$$\left(s(a)+\int_a^x \sigma(t)dt\right)'_x = \sigma(x) \text{ для любого } x \in [a,b].$$

Но тогда для любого $x \in [a,b]$ существует производная по x и от левой части равенства (12), т.е. $s'(x)$, причем $s'(x)=\sigma(x)$.

Последнее равенство равносильно равенству

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in [a,b].$$

5°. Признаки равномерной сходимости функционального ряда.

1) Критерий Коши.

Пусть имеется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in E$ (1). Пусть $s(x)$ и $s_n(x)$ - сумма и n-я частичная сумма ряда (1) соответственно. Мы знаем, что ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве E, если $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x),\ x \in E$. Но по критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций мы имеем: для того, чтобы последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x \in E$, имела на E предельную функцию $s(x)$ и чтобы эта последовательность сходилась к $s(x)$ равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех $x \in E$ было

$$\left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Так как $s_{n+p}(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)$, то критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда может быть сформулирован и так:

Теорема 4. Для того, чтобы ряд (1) сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех $x \in E$ было

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Замечание (необходимое условие сходимости функционального ряда).

* **Теорема 5**. Если ряд (1) сходится равномерно на множестве E, то

$$u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,\ x \in E. \tag{14}$$

▶ Действительно, так как ряд (1) сходится равномерно на E, то неравенство (13) при $n > N$ и сразу для всех $x \in E$ выполняется при любом $p \in \mathbf{N}$, в частности, и при $p = 1$. Получаем, следовательно: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|u_{n+1}(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех x из E. Последнее означает, что $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,\ x \in E$. ◀

Соотношение $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \quad x \in E$, является необходимым условием равномерной сходимости на E ряда (1).

Теорема 6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) сходится равномерно на множестве E. Пусть $v(x)$ есть функция, ограниченная на E. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(x) \cdot u_n(x) \tag{15}$$

сходится равномерно на множестве E.

▶ По условию, функция $v(x)$ - ограниченная на множестве E. Значит, существует число $M > 0$ такое, что

$$|v(x)| \leq M \text{ , } x \in E \text{ .} \tag{16}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое.

По условию, ряд (1) сходится равномерно на E. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех $x \in E$ будет

$$\left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{17}$$

Имеем:

$$\left| v(x) \cdot u_{n+1}(x) + v(x) \cdot u_{n+2}(x) + \ldots + v(x) \cdot u_{n+p}(x) \right| =$$
$$= |v(x)| \cdot \left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) \right|$$

$\Rightarrow$ принимая во внимание (16) и (17), будем иметь при $n > N$, при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех x из E:

$$\left| v(x) \cdot u_{n+1}(x) + v(x) \cdot u_{n+2}(x) + \ldots + v(x) \cdot u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши заключаем, что ряд (15) сходится равномерно на множестве E. ◀

Теорема 7 (признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда). Пусть имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in E$ (1). Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{18}$$

- числовой, положительный, сходящийся ряд. Тогда, если при любом $n \in \mathbf{N}$ и сразу для всех $x \in E$ оказывается

$$|u_n(x)| \leq c_n, \tag{19}$$

то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на *E*.

▶ По условию, $|u_n(x)| \le c_n$ при любом $n \in \mathbf{N}$ и при всех *x* из *E*. Так как ряд (18) сходится, то, по первому признаку сравнения числовых положительных рядов, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при каждом *x* из *E*. Значит, ряд (1) сходится абсолютно на множестве *E*.

Покажем теперь, что ряд (1) сходится равномерно на множестве *E*. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Так как ряд (18) сходится, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер *N* такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbf{N}$ будет $|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}| < \varepsilon$, или, так как $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n+p}$ - положительные,

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon. \qquad (20)$$

Заметим, что число *N* найдено с помощью числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и потому оно не зависит от *x*, а зависит только от ε. Имеем

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \le$$
$$\le c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p},$$

для любых n и $p \in \mathbf{N}$ и для всех $x \in E$. А тогда, в силу (20), при $n > N$, при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех $x \in E$ $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$. $\Rightarrow$ по критерию Коши заключаем, что ряд (1) сходится равномерно на множестве *E*.

Замечание. 1) Не следует думать, что равномерная сходимость ряда всегда сопровождается его абсолютной сходимостью.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}$ сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ равномерно, но неабсолютно.

То, что данный ряд сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, следует из теоремы Лейбница о знакочередующемся ряде. Но этот ряд сходится неабсолютно; действительно, ряд из абсолютных величин членов данного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, и при всех $x \le 1$ он, как мы знаем, расходится.

Докажем теперь, что данный ряд сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ равномерно.

Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Мы знаем, что для суммы остатка ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, справедлива оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{1}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \le \frac{1}{(n+1)^{1/2}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

для всех $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Рассмотрим неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Это неравенство выполняется при всех n ($n \in \mathbf{N}$), удовлетворяющих условию $n > N$, где $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$. (Отметим, что N зависит только от ε; от x N не зависит.) Но тогда и подавно $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, если только $n > N$.

Вывод: данный ряд сходится равномерно на промежутке $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

2) Возможны также случаи, когда функциональный ряд сходится абсолютно, но неравномерно. Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ в промежутке $[0;1]$ сходится абсолютно, но неравномерно. Было показано ранее (см. пример 2), что этот ряд на промежутке $[0;1]$ сходится, и его сумма $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

Так как члены ряда неотрицательны на $[0;1]$, то он и абсолютно сходящийся. Так как сумма ряда непрерывных функций оказалась разрывной функцией на $[0;1]$, то ряд сходится неравномерно на $[0;1]$.

Таким образом, приходим к выводу, что связи между равномерной и абсолютной сходимостью ряда в общем случае нет.

*** Теорема 8** (признак Дирихле).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x), \quad x \in E, \tag{21}$$

в котором функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$ - такие, что:

1) последовательность $\{v_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in E$, при каждом закрепленном x из E монотонно убывает, и $v_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$, $x\in E$. ($\Rightarrow v_n(x)>0$, $x\in E$ и $n\in\mathbf{N}$);

2) последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in E$ - ограниченная на множестве E (здесь $s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ - n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$).

Тогда ряд (21) сходится равномерно на множестве E.

▶ По условию, последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in E$ - ограниченная на множестве E. Значит, существует число $M>0$ такое, что $|s_n(x)|\le M$ при любом $n\in\mathbf{N}$ и для всех $x\in E$.

Возьмем $\varepsilon>0$ - любое. По условию, $v_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$, $x\in E$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε такой, что как только $n>N$, так сейчас же $|v_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{6M}$ сразу для всех x из E (или $v_n(x)<\dfrac{\varepsilon}{6M}$, ибо $v_n(x)>0$). Мы докажем, что ряд (21) сходится равномерно на E, если покажем, что взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же при любом $p\in\mathbf{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|<\varepsilon$ сразу для всех x из E (см. критерий Коши равномерной сходимости ряда). Имеем

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|=\left|s_{n+p}(x)-s_n(x)\right|\le\left|s_{n+p}(x)\right|+\left|s_n(x)\right|\le 2M$$

при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех x из E.

По лемме (глава 1, §10, п. 1°) имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|=\left|\sum_{i=1}^{p}u_{n+i}(x)\cdot v_{n+i}(x)\right|\le 2M\left(\left|v_{n+1}(x)\right|+2\left|v_{n+p}(x)\right|\right)=$$

$$=2M\left(v_{n+1}(x)+2v_{n+p}(x)\right)$$

при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех $x\in E$, откуда, если $n>N$, получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|<2M\cdot\frac{3\varepsilon}{6M}=\varepsilon$$ при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех x из E.

Следовательно, ряд (21) сходится равномерно на множестве E (здесь $\varepsilon > 0$ - любое, N зависит только от ε, неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$ сразу для всех $x \in E$ и любом $p \in \mathbf{N}$). ◀

*** Теорема 9** (признак Абеля).

Пусть имеется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot v_n(x)$, $x \in E$ (21). Рассмотрим последовательность

$$\{v_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x \in E \tag{22}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in E\ . \tag{23}$$

Тогда: если 1) последовательность (22) - ограниченная на E и монотонная при каждом закрепленном x из E, и если 2) ряд (23) сходится равномерно на множестве E, то ряд (21) сходится равномерно на множестве E.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ - любое. Мы докажем, что ряд (21) сходится равномерно на множестве E, если покажем, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathbf{N}$ и сразу для всех x из E.

По условию, последовательность (22) - ограниченная на E. Значит, существует число $M > 0$ такое, что $|v_n(x)| \le M$ при любом $n \in \mathbf{N}$ и для всех x из E.

По условию, ряд (23) сходится равномерно на E. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$.

По лемме (глава 1, §10, п. 1°) имеем при $n > N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\cdot v_k(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i}(x)\cdot v_{n+i}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|\right)$$

сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$ ($\frac{\varepsilon}{3M}$ выступает в роли числа $L > 0$ в лемме).

Так как $\left|v_{n+1}(x)\right| \le M$, $\left|v_{n+p}(x)\right| \le M$ при любых n, p и для всех $x \in E$, то получаем $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$, если $n > N$, сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$.

Здесь $\varepsilon > 0$ - любое, N зависит только от ε, неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$, сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$. Значит, ряд (21) сходится равномерно на множестве *E*.

§3. Степенные ряды

1°. Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tilde{x} - a)^n = c_0 + c_1(\tilde{x} - a) + c_2(\tilde{x} - a)^2 + \ldots + c_n(\tilde{x} - a)^n + \ldots \,. \qquad (\tilde{1})$$

Здесь a и коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ есть постоянные, т.е. не зависящие от $\tilde{x}$, числа.

Так как ряд $(\tilde{1})$ заменой $\tilde{x} - a = x$ сводится к ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots , \tag{1}$$

то исследование степенных рядов сводится к изучению рядов вида (1).

Ясно, что всякий степенной ряд вида (1) сходится в точке $x = 0$.

Следует отметить, что степенной ряд (1) является частным случаем общего функционального ряда, когда

$$u_n(x) = c_n \cdot x^n .$$

В выяснении вопроса о строении области сходимости степенного ряда важную роль играет следующая теорема.

Теорема 1 (первая теорема Абеля).

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ сходится в точке x_0 ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, в каждой точке x, удовлетворяющей неравенству: $|x| < |x_0|$.

▶ По условию, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_0^n$ сходится. Но тогда $c_n \cdot x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (см. необходимое условие сходимости ряда). А значит, переменная $c_n \cdot x_0^n$ ограничена (как переменная, имеющая конечный предел). Следовательно, существует число $M > 0$ такое, что $|c_n \cdot x_0^n| \leq M$, для любого $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot x^n|. \tag{2}$$

Так как $x_0 \neq 0$, то ряд (2) может быть записан в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n| \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$.

Имеем: $|c_n x_0^n| \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$, для любого $n \in \mathbf{N}$.

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходится при каждом x, удовлетворяющем неравенству: $|x| < |x_0|$ (как геометрический ряд), то при каждом таком x сходится ряд (2). А значит, ряд (1) сходится абсолютно при каждом x, удовлетворяющем неравенству: $|x| < |x_0|$. Теорема доказана. ◀

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в некоторой точке $\tilde{x}_0$, то он расходится и в каждой точке x, удовлетворяющей неравенству: $|x| > |\tilde{x}_0|$.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в какой-нибудь точке x, для которой $|x| > |\tilde{x}_0|$. Но тогда по теореме 1 он должен сходиться в точке $\tilde{x}_0$, а это не так.

Замечание. Геометрически теорема 1 и следствие из нее означают следующее:

1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в любой точке x_0 $(x_0 \neq 0)$, то он сходится, и притом абсолютно, во всех точках оси Ox, расположенных ближе к началу координат, чем точка x_0.

2. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке $\tilde{x}_0$, то он расходится и во всех точках оси Ox, расположенных дальше от начала координат, чем точка $\tilde{x}_0$.

Все степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ разобьем на три типа:

1) ряды, сходящиеся только в точке $x = 0$.

Например, ряд $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ сходится только в точке $x = 0$. В самом деле, пусть $x \neq 0$ - любое, закрепленное. Тогда, начиная с некоторого номера n, будет, например,

$$n|x| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad |n^n x^n| > 2^n \quad \Leftrightarrow \quad |n^n x^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Следовательно, ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ расходится для любого $x \neq 0$ (не выполнено необходимое условие сходимости).

2) ряды, сходящиеся на всей оси, т.е. сходящиеся при любом конечном x.

Например, ряд $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ сходится при любом $x \in(-\infty,+\infty)$. Действительно, если $x=0$, то этот ряд сходится (как и всякий ряд вида (1)). Пусть теперь x - любое, конечное, не равное нулю, закрепленное. Имеем

$$|u_n(x)|=\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!};\quad |u_{n+1}(x)|=\frac{|x|^n}{n!}\quad \Rightarrow\quad \frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\frac{n}{|x|}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty.$$

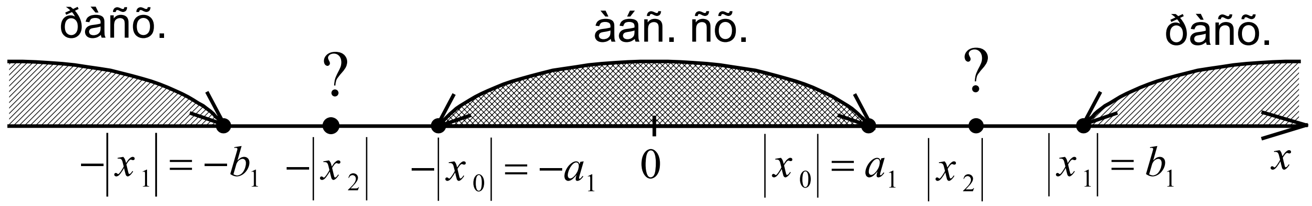
Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ сходится при любом конечном x.

3) ряды, не принадлежащие ни первому и ни второму типу; такие ряды имеют точки сходимости, отличные от нуля, и точки расходимости.

Рассмотрим ряд типа 3). Для такого ряда обязательно существует хотя бы одна точка x_0 $(x_0 \neq 0)$, в которой этот ряд сходится, и хотя бы одна точка x_1, в которой он расходится.

Ясно, что $|x_0| \leq |x_1|$.

Обсудим случай, когда $|x_0|<|x_1|$. Из теоремы 1 и следствия из нее следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится, и притом абсолютно, для любого x, удовлетворяющего условию: $-|x_0|<x<|x_0|$, и что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится для любого x, удовлетворяющего условию: $|x|>|x_1|$.



Положим $|x_0| = a_1$, $|x_1| = b_1$ $(a_1 < b_1)$. В этих обозначениях: ряд (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится, и притом абсолютно, для любого $x \in (-a_1, a_1)$ и расходится для любого x, лежащего вне промежутка $[-b_1, b_1]$.

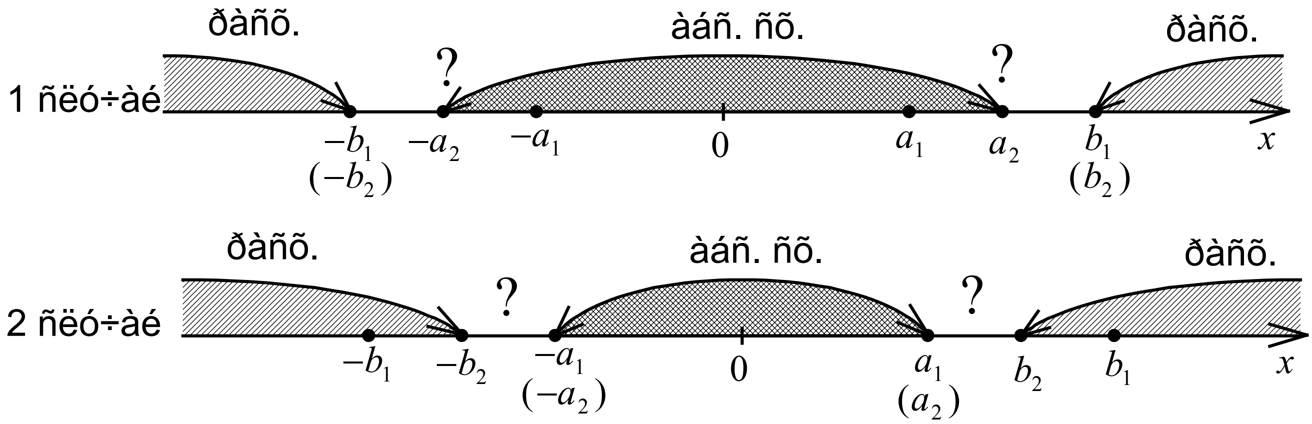
О поведении ряда (1) в промежутке между точками $-b_1$, $-a_1$ и в промежутке между точками a_1, b_1 ничего не известно. Обозначим через d_1 длину этих промежутков. Ясно, что $d_1 = b_1 - a_1$.

Возьмем точку x_2, такую, что $|x_2| = a_1 + \dfrac{b_1 - a_1}{2}$, т.е. $|x_2| = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Если точка x_2 оказывается точкой сходимости ряда (1), то обозначаем $|x_2| = a_2$ и полагаем $b_1 = b_2$. В этом случае ряд (1) сходится, и притом абсолютно, для любого $x \in (-a_2, a_2)$ и расходится для любого x, лежащего вне промежутка $[-b_2, b_2]$.

Заметим, что $a_1 < a_2$; $b_1 = b_2$ $(a_1 < a_2 < b_2 = b_1)$.

Если точка x_2 оказывается точкой расходимости ряда (1), то обозначаем $|x_2| = b_2$ и полагаем $a_1 = a_2$. И в этом случае ряд (1) сходится, и притом абсолютно, для $x \in (-a_2, a_2)$ и расходится для любого x, лежащего вне промежутка $[-b_2, b_2]$. Замечаем, что здесь $a_1 = a_2$; $b_1 > b_2$ $(a_1 = a_2 < b_2 < b_1)$.



Теперь о поведении ряда (1) ничего не известно в промежутке между точками $-b_2$ и $-a_2$ и в промежутке между точками a_2 и b_2.

Обозначим через d_2 длину этих промежутков. Ясно, что $d_2 = \dfrac{d_1}{2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

Продолжая этот процесс аналогичным образом неограниченно, мы получим последовательность промежутков: $(-a_n, a_n)$, $[-b_n, b_n]$ со свойствами:

1. $d_n = b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2. Ряд (1) сходится, и притом абсолютно, для $x \in (-a_n, a_n)$ и расходится при любом x, лежащем вне промежутка $[-b_n, b_n]$.

Важно отметить при этом, что

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots < b_1, \tag{3}$$

$$b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots > a_1, \tag{4}$$

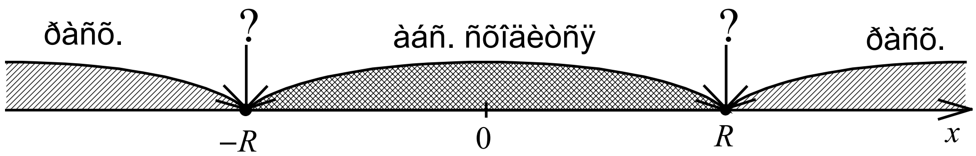
т.е. что последовательность (3) - неубывающая и ограниченная сверху, а последовательность (4) - невозрастающая и ограниченная снизу. Значит, обе последовательности имеют конечные пределы.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = R$ (R - конечное число, большее нуля). Имеем

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + 0 = R .$$

Замечание. Мы рассмотрели ряд типа 3) в случае, когда $|x_0| < |x_1|$. Если бы реализовался случай, когда $|x_0| = |x_1|$, т.е. когда $a_1 = b_1$, то нетрудно понять, что тогда $R = |x_0| = |x_1|$.

Из изложенного выше вытекает следующее утверждение: для каждого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ типа 3) существует такое положительное число R, что ряд сходится, притом абсолютно, при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.



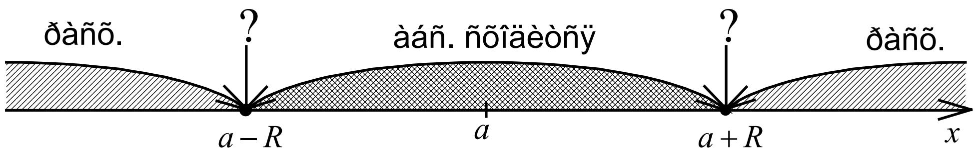
Как мы увидим дальше, при $x = \pm R$ поведение степенного ряда может быть различным.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ типа 3) является один из следующих промежутков: $(-R, R)$, $[-R, R]$, $(-R, R]$, $[-R, R)$. Иначе говоря, за исключением, может быть, одной точки ($x = -R$ или $x = R$), область сходимости такого степенного ряда есть промежуток, симметричный относительно начала координат.

Замечание. Для степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ типа 1) естественно считать $R = 0$, а для рядов типа 2) - $R = +\infty$.

Это связанное со степенным рядом число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а промежуток $(-R, R)$ - интервалом сходимости этого степенного ряда.

Замечание. Для степенного ряда общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ интервалом сходимости будет промежуток $(a-R, a+R)$. Областью сходимости такого ряда будет, очевидно, один из следующих промежутков: $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$.



Область сходимости есть промежуток, симметричный (за исключением, может быть, одной точки $x = a-R$ или $x = a+R$) относительно точки $x = a$.

Замечание. Во многих случаях радиус сходимости R степенного ряда (1) может быть найден с помощью признаков Даламбера и Коши, после чего для получения всей области сходимости остается только выяснить поведение ряда при $x = \pm R$. Обсудим эти случаи.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

▶ Доказательство утверждения 1 получается простым применением признака Даламбера к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n x^n\right|$, составленному из модулей членов ряда (1).

В самом деле, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_n(x)\right|}{\left|u_{n+1}(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n x^n\right|}{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}=\frac{1}{|x|}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

(можно считать здесь $x\neq 0$, так как в точке $x=0$ всякий степенной ряд вида (1) сходится).

По условию, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ существует (конечный или бесконечный). Обозначим этот предел через C.

1. Пусть $C\neq 0$ и $C\neq\infty$. Будем иметь тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|u_n(x)\right|}{\left|u_{n+1}(x)\right|}=\frac{C}{|x|}$. Следовательно, если $\frac{C}{|x|}>1$, т.е. если $|x|<C$, то ряд (1) сходится и притом абсолютно; если $\frac{C}{|x|}<1$, т.е. если $|x|>C$, то ряд (1) расходится. Значит, радиус сходимости R ряда (1) оказывается равным C, т.е. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

2. Пусть $C=0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|u_n(x)\right|}{\left|u_{n+1}(x)\right|}=\frac{1}{|x|}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$ (<1) при любом $x\neq 0$. Значит, ряд (1) сходится только в точке $x=0$. Следовательно, в этом случае $R=0$ ($R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$).

3. Пусть $C=+\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|u_n(x)\right|}{\left|u_{n+1}(x)\right|}=\frac{1}{|x|}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=+\infty$ (>1) при любом конечном x ($x\neq 0$). Значит, ряд (1) сходится для $x\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, в этом случае $R=+\infty$ ($R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=+\infty$). ◀

Утверждение 2. Пусть существует конечный или бесконечный предел $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда:

1) если $C \neq 0$ и $C \neq \infty$, то $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$;

2) если $C = 0$, то $R = +\infty$;

3) если $C = \infty$, то $R = 0$.

▶ Доказательство утверждения 2 получается простым применением признака Коши к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$, составленному из модулей членов ряда (1).

Действительно, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. По условию, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ существует (конечный или бесконечный).

1. Пусть $C \neq 0$ и $C \neq \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot C$; следовательно, если $|x| \cdot C < 1$, т.е. если $|x| < \dfrac{1}{C}$, то ряд (1) сходится и притом абсолютно; если $|x| \cdot C > 1$, т.е. если $|x| > \dfrac{1}{C}$, то ряд (1) расходится. Значит, радиус сходимости R ряда (1) оказывается равным $\dfrac{1}{C}$, т.е. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

2) Пусть $C = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ при любом конечном x ($x \neq 0$). Значит, ряд (1) сходится для $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, в этом случае $R = +\infty$.

3) Пусть $C = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$ (>1) при любом $x \neq 0$. Значит, ряд (1) сходится только в точке $x = 0$. Следовательно, в этом случае $R = 0$.

Замечание. Тот же прием позволяет доказать утверждения, аналогичные утверждениям 1 и 2, для случая степенных рядов, содержащих только четные или нечетные степени x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \quad (5) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n-1} \quad (6).$$

Утверждение $\tilde{1}$. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right|$, то для ряда (5) $R^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, а для ряда (6) $R^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right|$.

Утверждение $\tilde{2}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ или $C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}$. Тогда:

1) если $C\neq 0$ и $C\neq\infty$, то для ряда (5) $R^2=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, а для ряда (6) $R^2=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}}$.

2) если $C=0$, то $R=+\infty$ для рядов (5) и (6).

2) если $C=\infty$, то $R=0$ для рядов (5) и (6).

Замечание. С помощью признаков Даламбера и Коши можно найти радиус сходимости *не для всякого* степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы.

Затруднения при применении рассмотренного выше метода определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. В этом случае можно попробовать применить рассмотренный метод, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма, в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{где} \quad c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{åñëè} \quad n=1,3,5,\ldots\ ,\\ 0, & \text{åñëè} \quad n=0,2,4,\ldots\ .\end{cases}$$

Здесь признак Даламбера неприменим для определения радиуса сходимости этого ряда, так как отношение $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ не имеет смысла для нечетных номеров *n*. Неприменим здесь и признак Коши, так как не существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$.

Однако если записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1},$$

где $b_k = \dfrac{1}{2k+1}$, и убедившись, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2k+3}{2k+1} = 1$, мы, в соответствии с утверждением $\tilde{\mathbf{1}}$, заключаем, что радиус сходимости R исходного ряда равен 1.

Замечание. Формула для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае (так называемая формула Коши - Адамара) выведена, например, в книге Л.Д.Кудрявцева “Курс математического анализа”, том I.

2°. Равномерная сходимость степенного ряда.

Теорема 2 (вторая теорема Абеля).

Пусть $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Пусть r - любое число, удовлетворяющее условию: $0 < r < R$. Тогда ряд (1) сходится равномерно в замкнутом промежутке $[-r, r]$.

▶ Так как $0 < r < R$, то точка $x = r \in (-R, R)$. Значит, ряд (1) сходится, и притом абсолютно, при $x = r$, т.е. сходится ряд $|c_0| + |c_1| \cdot r + |c_2| \cdot r^2 + \ldots + |c_n| \cdot r^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot r^n$. Имеем $|c_n x^n| \le |c_n| \cdot r^n$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и для всех $x \in [-r, r]$. А тогда по признаку Вейерштрасса заключаем, что ряд (1) сходится равномерно в $[-r, r]$. ◀

* **Дополнение**. Из доказанной теоремы следует, что степенной ряд (1) сходится равномерно во всяком замкнутом промежутке, целиком лежащем внутри интервала сходимости этого степенного ряда. Однако гарантировать равномерную сходимость ряда (1) в интервале сходимости $(-R, R)$ нельзя. Здесь все зависит от поведения ряда в точках $x = \pm R$. Именно:

1) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точках $x = \pm R$, то он сходится равномерно в $[-R, R]$ (а, следовательно, и в интервале сходимости $(-R, R)$);

2) Если ряд (1) расходится в точке $x = R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = -R$, то он сходится равномерно в промежутке $[-R, r]$, где r - любое, удовлетворяющее условию: $0 < r < R$;

3) Если ряд (1) расходится в точке $x = -R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = R$, то он сходится равномерно в промежутке $[-r, R]$, где r - любое, удовлетворяющее условию: $0 < r < R$;

▶ В самом деле, пусть, для определенности, ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = R$. Покажем, что этот ряд сходится тогда равномерно в $[0, R]$. Для этого запишем ряд (1) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n, \qquad x \in [0, R]. \tag{7}$$

В (7): последовательность $v_n(x)=\left(\frac{x}{R}\right)^n$, $x\in[0,R]$ - ограниченная и монотонная при каждом закрепленном x из $[0,R]$; ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nR^n$ сходится по условию. (Так как этот ряд - числовой, то его можно считать равномерно сходящимся на промежутке $[0,R]$.) А тогда по признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов заключаем, что ряд (7), а значит, ряд (1) сходится равномерно на промежутке $[0,R]$.

Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=-R$, то, сделав замену $x=-\widetilde{x}$, мы получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n\widetilde{x}^{\,n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_nR^n\cdot\left(\frac{\widetilde{x}}{R}\right)^n, \qquad (\widetilde{7})$$

который, по условию, сходится хотя бы неабсолютно в точке $\widetilde{x}=R$. По признаку Абеля, ряд $(\widetilde{7})$ будет равномерно сходящимся для $\widetilde{x}\in[0,R]$. Следовательно, ряд (1) будет равномерно сходящимся для $x\in[-R,0]$. ◀

3°. Непрерывность суммы степенного ряда.

Теорема 3. Пусть $R>0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ (1). Пусть $s(x)$ - сумма ряда (1). Тогда $s(x)\in C\big((-R,R)\big)$.

▶ Возьмем любую точку x_0 в промежутке $(-R,R)$ и закрепим. Ясно, что $-R<x_0<R$. По свойству плотности множества вещественных чисел, обязательно найдется число $r>0$ такое что будет:

$$x_0\in[-r,r] \quad \text{и} \quad [-r,r]\subset(-R,R).$$

Так как члены ряда (1) - функции, непрерывные в $[-r,r]$, и так как ряд (1) сходится равномерно в промежутке $[-r,r]$, то $s(x)\in C\big([-r,r]\big)$. Значит, в частности, $s(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как точка x_0 - любая, принадлежащая $(-R,R)$, то заключаем, что $s(x)\in C\big((-R,R)\big)$.

* **Дополнение**. Пусть $0<R<+\infty$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ (1). Пусть $s(x)$ - сумма ряда (1). Тогда:

1) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точках $x=\pm R$, то $s(x)\in C\big([-R,R]\big)$ [непрерывность в точках $x=\pm R$ односторонняя];

2) если ряд (1) расходится в точке $x=R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=-R$, то $s(x)\in C([-R,R))$ [непрерывность в точке $x=-R$ правосторонняя, т.е. $\lim\limits_{x\to -R+0} s(x)=\lim\limits_{x\to -R+0}\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n R^n$].

3) если ряд (1) расходится в точке $x=-R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=R$, то $s(x)\in C((-R,R])$ [непрерывность в точке $x=R$ левосторонняя, т.е. $\lim\limits_{x\to R-0} s(x)=\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$].

▶ Непрерывность $s(x)$ в точках интервала сходимости $(-R,R)$ установлена теоремой 3 для всех трех случаев 1), 2) и 3), так что ниже следует говорить лишь о непрерывности $s(x)$ в точках $x=-R$, $x=R$.

В случае 1) ряд (1) по условию сходится хотя бы неабсолютно в точках $x=-R$, $x=R$. Но тогда ряд (1) сходится равномерно в $[-R,R]$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-R,R]$, то $s(x)\in C([-R,R])$. Разумеется, конечно, непрерывность $s(x)$ в точке $x=-R$ - справа, а в точке $x=R$ - слева.

В случае 2) ряд (1) будет равномерно сходящимся в промежутке $[-R,r]$, где $0<r<R$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-R,r]$, то $s(x)\in C([-R,r])$. В частности, $s(x)$ непрерывна справа в точке $x=-R$.

В случае 3) ряд (1) будет сходиться равномерно в промежутке $[-r,R]$, где $0<r<R$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-r,R]$, то $s(x)\in C([-r,R])$. В частности, $s(x)$ непрерывна слева в точке $x=R$. ◀

4°. Почленное интегрирование степенного ряда.

Теорема 4. Пусть $R>0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть замкнутый промежуток $[a,b]$ - любой, но такой, что $[a,b]\subset(-R,R)$. Тогда

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n x^n\,dx. \tag{8}$$

▶ Ряд (1) сходится равномерно в $[a,b]$, так как $[a,b]\subset(-R,R)$. Члены ряда (1) - функции, непрерывные в $[a,b]$. А тогда по теореме о почленном интегрировании функционального ряда (общего вида) заключаем, что $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b c_n x^n \, dx$. ◀

* **Дополнение**. Пусть $0 < R < +\infty$ - радиус сходимости степенного ряда (1). Тогда:

1) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = -R$, то в качестве a - нижнего предела интеграла в формуле (8) - может выступать число $-R$.

2) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = R$, то в качестве b - верхнего предела интеграла в формуле (8) - может выступать число R.

5°. Почленное дифференцирование степенных рядов.

Лемма 1. Пусть $0 < q < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ сходится.

▶ Имеем $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{nq^n}{(n+1)q^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{q}$ (>1). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ сходится. ◀

Лемма 2. Пусть имеются степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \ , \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = c_1 x + 2c_2 x^2 + \ldots + n c_n x^n + \ldots \ . \tag{9}$$

Пусть R_1 и R_2 - радиусы сходимости рядов (1) и (9) соответственно. Тогда $R_1 = R_2$.

▶ 1. Установим сначала, что $R_2 \le R_1$.

Для этого возьмем x_1 - любое, но такое, что $0 < x_1 < R_2$. Ясно, что $x_1 \in (-R_2, R_2)$. Значит, ряд (9) сходится, и притом абсолютно, в точке x_1, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| c_n x_1^n \right|. \tag{10}$$

Так как для любого $n \in \mathbf{N}$ $\left| c_n x_1^n \right| \le n \left| c_n x_1^n \right|$, то заключаем по первому признаку сравнения для положительных рядов, что в точке x_1 сходится ряд, составленный из модулей членов ряда (1). Значит, ряд (1) в точке x_1 сходится, и притом абсолютно. Мы знаем, что ряд (1) в точках, лежащих вне замкнутого промежутка $[-R_1, R_1]$, расходится. Значит, точка x_1 не может лежать вне $[-R_1, R_1]$. Значит, $x_1 \in [-R_1, R_1]$. Но тогда

$$0 < x_1 \le R_1. \tag{11}$$

У нас x_1 - любое, удовлетворяющее условию $0 < x_1 < R_2$. Станем изменять x_1, приближая его неограниченно к R_2. Из неравенства (11) получим при этом в пределе

$$R_2 \le R_1.$$

2. Установим теперь, что $R_1 \le R_2$.

Для этого возьмем x_1 - любое, но такое, что $0 < x_1 < R_1$. Затем возьмем x_2 - любое, но такое, что $x_1 < x_2 < R_1$. Ясно, что $x_2 \in (-R_1, R_1)$. Значит, ряд (1) сходится, и притом абсолютно, в точке x_2, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n x_2^n\right|$. Но тогда $\left|c_n x_2^n\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (см. необходимое условие сходимости ряда). Так как переменная, имеющая конечный предел, - ограниченная, то заключаем: существует число $M > 0$, такое, что $\left|c_n x_2^n\right| \le M$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим в точке x_1 ряд, составленный из модулей членов ряда (9), а именно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|c_n x_1^n\right|. \tag{12}$$

Имеем

$$n\left|c_n x_1^n\right| = n\left|c_n x_2^n\right| \cdot \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n \le M \cdot n \cdot \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n = M \cdot n \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n, \text{ для любого } n \in \mathbf{N}.$$

У нас $0 < x_1 < x_2$. Значит, $0 < \dfrac{x_1}{x_2} < 1$.

По лемме 1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^n$ сходится, а значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M \cdot n\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^n$.

Так как для любого $n \in \mathbf{N}$: $n\left|c_n x_1^n\right| \le M \cdot n\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^n$, то заключаем, по первому признаку сравнения для положительных рядов, что в точке x_1 сходится ряд (12), а значит, ряд (9) в точке x_1 сходится, и притом абсолютно.

Мы знаем, что ряд (9) в точках, лежащих вне промежутка $[-R_2, R_2]$, расходится. Значит, точка x_1 не может лежать вне $[-R_2, R_2]$, а это означает, что $x_1 \in [-R_2, R_2]$. Но тогда

$$0 < x_1 \le R_2. \tag{13}$$

У нас x_1 - любое, удовлетворяющее условию $0 < x_1 < R_1$. Станем изменять x_1, устремляя его к R_1.

При этом в пределе из неравенства (13) получим:

$$R_1 \le R_2.$$

Итак, получено: с одной стороны должно быть $R_2 \le R_1$, а с другой стороны - должно быть $R_1 \le R_2$. Оба этих соотношения выполняются одновременно лишь тогда, когда $R_1 = R_2$. Лемма 2 доказана. ◀

Следствие. От почленного дифференцирования степенного ряда радиус сходимости его не изменяется.

▶ В самом деле, ряд, полученный в результате почленного дифференцирования ряда (1), лишь множителем x отличается от ряда (9), а, следовательно, имеет тот же радиус сходимости R_2 $(= R_1)$. ◀

Заметим, что сохраняется лишь радиус сходимости, но область сходимости может изменяться. Например, ряд $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$ сходится при $x \in (-1; 1]$, а “продифференцированный” ряд имеет вид: $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Это - геометрический ряд со знаменателем $q = -x$, а потому он сходится лишь при $x \in (-1; 1)$.

Теорема 5. Пусть $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть $s(x)$ - сумма ряда (1). Тогда в каждой точке $x \in (-R, R)$ существует $s'(x)$, причем

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \tag{14}$$

▶ Возьмем любую точку $x_0 \in(-R,R)$ и закрепим ее. Обязательно существует замкнутый промежуток $[-r,r]$ такой, что $[-r,r]\subset(-R,R)$, и точка $x_0 \in[-r,r]$. Заметим, что в промежутке $[-r,r]$ исходный ряд (1) сходится, и члены его имеют непрерывные производные. Так как R является радиусом сходимости и для ряда (14) и так как $[-r,r]\subset(-R,R)$, то ряд (14) сходится равномерно в $[-r,r]$.

Видим, что выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда общего вида. По этой теореме заключаем, что в каждой точке $x\in[-r,r]$ существует $s'(x)$, причем $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$. В частности, существует $s'(x_0)$, причем $s'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x_0^{n-1}$. У нас точка x_0 - любая, принадлежащая $(-R,R)$. Значит, в каждой точке $x\in(-R,R)$ $s'(x)$ существует, причем $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, $x\in(-R,R)$. ◀

Следствие. Пусть $R>0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть $s(x)$ - сумма ряда (1). Тогда в каждой точке $x\in(-R,R)$ существуют $s'(x)$, $s''(x)$, …, $s^{(k)}(x)$, … :

$$\begin{gathered} s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1};\quad s''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2};\quad \ldots ; \\ s^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots[n-(k-1)]c_n x^{n-k};\quad \ldots , \end{gathered} \tag{15}$$

причем ряды, стоящие в правых частях соотношений (15), имеют один и тот же радиус сходимости R.

Иначе говоря, степенной ряд можно дифференцировать почленно в интервале сходимости любое число раз.

Только что доказанная теорема и следствие из нее позволяют решить важный для дальнейшего вопрос о том, как связаны коэффициенты степенного ряда с его суммой. Нам будет удобнее рассматривать здесь степенной ряд общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ и обозначать его сумму через $f(x)$.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, т.е.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots , \tag{16}$$

$x \in (a-\rho, a+\rho)$. Тогда коэффициенты этого ряда выражаются через $f(x)$ и число a следующим образом:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

(Здесь, ради общности записи, считается условно, что $f^{(0)}(a) = f(a)$; $0! = 1$).

▶ По условию, равенство (16) имеет место при любом x из промежутка $(a-\rho, a+\rho)$. Положив в этом равенстве $x = a$, получим $c_0 = f(a)$.

Знаем, что для любого x из $(a-\rho, a+\rho)$:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 \cdot (x-a) + 3c_3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + nc_n \cdot (x-a)^{n-1} + \ldots \ .$$

Полагаем в этом равенстве $x = a$, получаем $c_1 = f'(a)$.

Имеем далее для любого $x \in (a-\rho, a+\rho)$:

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot (x-a) + \ldots + n(n-1)c_n \cdot (x-a)^{n-2} + \ldots ,$$

откуда при $x = a$ находим $f''(a) = 2! \cdot c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$.

Продолжая так далее, получим требуемое. ◀

Замечание. Если функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, то этот ряд может быть записан в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n . \tag{17}$$

Заметим здесь же, что ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ может быть построен формально для каждой функции $f(x)$, имеющей в точке a производные любого порядка. Этот ряд называют рядом Тейлора функции $f(x)$ (причем он называется так независимо от того, сходится он или нет, и независимо от того, равна его сумма $f(x)$ или нет).

При $a=0$ будем иметь ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, который называют также рядом Маклорена функции $f(x)$. Непосредственным следствием из теоремы 6 является следующая, важная для дальнейшего теорема:

Теорема 7 (теорема о тождественном равенстве двух степенных рядов).

Пусть имеются два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$. Если окажется, что эти ряды в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имеют одну и ту же сумму $f(x)$, то они тождественны, т. е.

$$a_0=b_0; \quad a_1=b_1; \quad a_2=b_2; \quad \dots ; \quad a_n=b_n; \quad \dots .$$

▸ По теореме 6 имеем:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \Rightarrow \quad a_n=b_n, \; n=0,1,2,\dots . \blacktriangleleft$$

6°. Разложение функций в степенные ряды.

Задача разложения функций в степенные ряды состоит в том, чтобы по заданной функции $f(x)$ найти сходящийся степенной ряд, сумма $s(x)$ которого в области сходимости ряда равнялась бы $f(x)$.

Полезность представления $f(x)$ в виде суммы степенного ряда очевидна.

Дело в том, что члены степенного ряда, представляющие собою произведения постоянных коэффициентов на степенные функции x^n [или $(x-a)^n$], $n \in \mathbf{N}$, могут быть сравнительно легко вычислены при конкретных значениях x, что позволяет вычислять при этих x значения функции $f(x)$. Кроме того, представление функции $f(x)$ в виде суммы степенного ряда позволяет находить значения производных и интегралов от функции $f(x)$. (И здесь это связано с тем, что легко могут быть найдены как производные, так и интегралы от членов степенного ряда.)

Следует отметить еще, что при помощи разложений функций в степенные ряды можно интегрировать разнообразные дифференциальные уравнения. Это будет показано позже.

Итак, нам предстоит решать следующую задачу.

Задана функция $f(x)$. Требуется найти такие значения коэффициентов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ (где a - известное число), чтобы в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имело место равенство: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

Из теорем 5 и 6 следует, что функция $f(x)$ *необходимо должна иметь в промежутке* $(a-\rho, a+\rho)$ производные любого порядка и что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ должен быть для функции $f(x)$ ее рядом Тейлора, т.е. иметь вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Отсюда, между прочим, ясна единственность разложения $f(x)$ в ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ при данном числе a. Но, конечно, нет оснований ожидать, что всегда сумма $s(x)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, составленного для заданной функции $f(x)$, имеющей производные любого порядка, будет равна как раз функции $f(x)$. Чтобы такое равенство имело место, функция $f(x)$ должна удовлетворять еще некоторому дополнительному условию. Это условие мы получим из так называемой формулы Тейлора. Напомним ее:

Теорема. Пусть функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имеет непрерывные последовательные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда для каждого значения $x \in (a-\rho, a+\rho)$ выполняется равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ - некоторое число между a и x.

Это - формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Ее частный случай, получающийся при $a=0$, часто называют формулой Маклорена.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имеет производные любого порядка. Тогда для любого $x \in (a-\rho, a+\rho)$ и при любом $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x). \tag{18}$$

В формуле Тейлора станем неограниченно увеличивать число n.

Ясно, что если при этом окажется, что $R_n \to 0$ для $x \in (a-\rho, a+\rho)$, то функция $f(x)$ в промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ будет представлена в виде суммы степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad x \in (a-\rho, a+\rho).$$

Рассмотрим теперь разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Предварительно докажем следующую, весьма полезную для дальнейшего, теорему.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[A, B]$ и имеет там производные любого порядка. Пусть существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N} \quad \text{и для любого } x \in [A, B].$$

Тогда при любых x и a из $[A, B]$ справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (19)$$

▶ Возьмем любые x и a из $[A,B]$ и напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Здесь ξ есть точка, лежащая между точкой a и точкой x; значит, $\xi\in[A,B]$.

По условию, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ для любого $n\in\mathbf{N}$ и для любого $x\in[A,B]$. Следовательно, $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le M$. Но тогда

$$\left|R_n(x,a)\right|=\left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как $\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ при любых x и a из $[A,B]$, то получаем $R_n(x,a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ при любых x и a из $[A,B]$. Таким образом, справедливость равенства (19) при любых x и a из $[A,B]$ установлена. ◀

Пример 1. Разложение в ряд Маклорена функций $\sin x$, $\cos x$.

▶ Пусть $f(x)=\sin x$. Имеем $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \left|f^{(n)}(x)\right|\le 1$, для любого $n\in\mathbf{N}$ и для любого x. Пусть x и a - любые, заданные заранее. Всегда можно указать промежуток $[A,B]$ такой, что будет $x\in[A,B]$, $a\in[A,B]$. Видим, что выполнены все условия теоремы 8. Следовательно, для любых конечных x и a справедливо разложение

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n.$$

В частном случае, когда $a=0$, будем иметь

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \tag{20}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in (-\infty, +\infty).$$

Разложение в ряд Маклорена для функции $f(x) = \cos x$ можно получить совершенно такими же рассуждениями, как и в случае функции $\sin x$. Однако еще проще применить теорему о почленном дифференцировании степенного ряда. Будем иметь сразу из (20):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft \tag{21}$$

Пример 2. Разложение функции e^x.

▶ Пусть $f(x) = e^x$. Имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Пусть x и a - любые, заданные заранее. Всегда можно указать промежуток $[A, B]$ такой, что будет: $x \in [A, B]$, $a \in [A, B]$. Ясно, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $x \in [A, B]$: $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \le e^B$. ($e^B$ - определенное число. Оно выполняет роль числа M в теореме 8.) Видим, что выполнены все условия теоремы 8. Значит, для любых конечных x и a справедливо разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x - a)^n.$$

В частном случае, когда $a = 0$, будем иметь для любого конечного x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft \tag{22}$$

Пример 3. Разложение в ряд Маклорена гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

▶ Разложение в ряд Маклорена гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ проще всего получить, если воспользоваться разложением (22) функции e^x.

В самом деле, заменив в равенстве

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

аргумент x на $-x$, получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Так как $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, то путем почленного вычитания и сложения написанных выше рядов найдем:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (23)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft \quad (23)$$

Пример 4. Разложение функции $\ln(1+x)$.

▸ Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена можно получить, написав для этой функции формулу Маклорена и исследовав остаточный член этой формулы. Но можно получить разложение для $\ln(1+x)$ без применения формулы Маклорена.

Действительно, положим $f(t) = \ln(1+t)$. При $|t| < 1$ будем иметь:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots \quad (25)$$

($\dfrac{1}{1+t}$ рассматриваем как сумму геометрического ряда; здесь $q = -t$).

Возьмем теперь любое x из промежутка $(-1, 1)$ и проинтегрируем почленно ряд (25) по промежутку $[0; x]$. (Мы знаем, что степенной ряд можно интегрировать почленно по любому промежутку, содержащемуся целиком в интервале сходимости ряда). Получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \quad (26)$$

Разложение (26) установлено нами пока лишь для $x \in (-1, 1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = -1$ ряд (26) будет таким: $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Он расходится (гармонический ряд).

В точке $x = 1$ ряд (26) будет таким: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$. Он сходится по признаку Лейбница. Обозначим сумму ряда (26) через $s(x)$, $x \in (-1, 1]$. По теореме о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $s(x) \in C\big((-1, 1]\big)$ (в точке $x = 1$ $s(x)$ непрерывна слева). Поэтому

$$s(1) = \lim_{x\to 1-0} s(x) = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2\,.$$

Значит, разложение (26) справедливо и при $x = 1$. Таким образом, окончательно

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1, 1].\ ◄$$

Пример 5. Разложение функции $\mathrm{arctg}\, x$.

► Тем же способом, каким был получен ряд для функции $\ln(1+x)$, можно получить и разложение функции $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$.

В самом деле, положим $f(t) = \mathrm{arctg}\, t$. При $|t| < 1$ будем иметь:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots \qquad (27)$$

($\dfrac{1}{1+t^2}$ рассматриваем как сумму геометрического ряда; здесь $q = -t^2$).

Теперь возьмем любое x из промежутка $(-1, 1)$ и проинтегрируем почленно ряд (27) по промежутку $[0, x]$. Получим

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (28)$$

Разложение (28) установлено нами пока лишь для $x \in (-1, 1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = -1$ ряд (28) будет таким: $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$. Он сходится (по признаку Лейбница).

В точке $x = 1$ ряд (28) будет таким: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$. Он сходится (по признаку Лейбница).

Обозначим сумму ряда (28) через $s(x)$, $x \in [-1, 1]$. Так как ряд (28) сходится при $x = \pm 1$, то $s(x) \in C\big([-1, 1]\big)$ ($s(x)$ непрерывна справа в точке $x = -1$ и непрерывна слева в точке $x = 1$). Поэтому

$$s(-1) = \lim_{x\to -1+0} s(x) = \lim_{x\to -1+0} \mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{4},$$

$$s(1) = \lim_{x\to 1-0} s(x) = \lim_{x\to 1-0} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, разложение (28) имеет место и при $x=\pm 1$. Таким образом, окончательно

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in[-1,1]. \blacktriangleleft \tag{29}$$

Замечание. В разложении (29) мы сталкиваемся со странным, на первый взгляд, явлением: ряд, стоящий в правой части равенства, сходится только для $x\in[-1,1]$, а левая часть равенства, функция $\operatorname{arctg} x$, имеет смысл при любом x. Объяснение этого факта мы узнаем позже, при изучении функций комплексного аргумента.

Пример 6. Биномиальный ряд (разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$).

$\blacktriangleright$ Заметим сразу, что степенную функцию приходится брать в виде $(1+x)^m$, так как функция x^m не удовлетворяет, за исключением случая, когда m - целое положительное, необходимому условию наличия производных любого порядка; действительно, при $x=0$ или сама эта функция, или ее производные, начиная с некоторого порядка, обращаются в бесконечность.

Составим для функции $f(x)=(1+x)^m$ (m - любое, вещественное, не равное нулю) ряд Маклорена. Для этого находим:

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1};\quad f''(x)=m(m-1)\cdot(1+x)^{m-2};\quad \ldots;$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\cdot(1+x)^{m-n};\quad \ldots,$$

откуда

$$f(0)=1;\quad f'(0)=m;\quad f''(0)=m(m-1);\quad \ldots;$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)];\quad \ldots .$$

Ряд Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^m$ будет, следовательно, таким:

$$\begin{gathered}1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\\+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots\end{gathered}. \tag{30}$$

Заметим, что при целом положительном m ряд (30) обрывается на $(m+1)$-ом члене, превращаясь в известный из элементарной математики “бином Ньютона”. Если же число m - нецелое, или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда (30) в нуль не обратится, и нам придется иметь дело с бесконечным рядом. Этот ряд называется биномиальным, а его коэффициенты - биномиальными коэффициентами. По внешнему виду они напоминают обычные биномиальные коэффициенты, рассматриваемые в элементарной математике.

Найдем радиус сходимости ряда (30). Для этого составляем ряд из модулей членов ряда (30) и применяем к полученному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]|\cdot(n+1)!\cdot|x|^n}{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)|\cdot n!\cdot|x|^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|m-n|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x|}\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (30) сходится, и притом абсолютно, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|>1$. Значит, радиус сходимости ряда (30) равен 1 ($R=1$). Сумму ряда (30) обозначим теперь через $s(x)$, $x\in(-1,1)$. Нам нужно теперь проверить, что ряд (30) сходится к $f(x)$, т.е. что $s(x)=f(x)$, $x\in(-1,1)$.

Мы знаем, что в интервале сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно. Следовательно, для любого $x\in(-1,1)$ будем иметь

$$\begin{aligned}s'(x)&=m+\frac{m(m-1)}{1!}x+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+\\&+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots=\\&=m\left[1+\frac{(m-1)}{1!}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+\right.\\&\left.\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots\right].\end{aligned}\tag{31}$$

Умножим обе части равенства (31) на $(1+x)$ и приведем подобные члены. (Эта операция законна, так как для $x\in(-1,1)$ ряд (31) сходится абсолютно.)

Получим

$$(1+x)s'(x)=m\left[1+\left(\frac{m-1}{1!}+1\right)\cdot x+\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2!}+\frac{m-1}{1!}\right)\cdot x^2+\ldots\right.$$

$$+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)]}{(n-2)!}\right)\cdot x^{n-1}+$$

$$+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{n!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}\right)\cdot x^{n}+\ldots\Bigg]=$$

$$=m\underbrace{\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^{n}+\ldots\right]}_{=s(x)}.$$

Таким образом, для любого $x\in(-1,1)$ имеем:

$$(1+x)s'(x)=s(x)\cdot m. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{s(x)}{f(x)}\quad\left(=\frac{s(x)}{(1+x)^{m}}\right),\quad x\in(-1,1),$$

и найдем производную этого отношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=\frac{s'(x)\cdot(1+x)^{m}-s(x)\cdot m(1+x)^{m-1}}{(1+x)^{2m}}=\frac{(1+x)s'(x)-s(x)\cdot m}{(1+x)^{m+1}}.$$

В силу (32) числитель последней дроби равен нулю для любого $x\in(-1,1)$, так что $\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=0$, $x\in(-1,1)$. Но тогда $\frac{s(x)}{f(x)}=C$ (const), $x\in(-1,1)$, откуда

$$s(x)=C\cdot f(x),\quad x\in(-1,1). \tag{33}$$

Из выражения (30) для $s(x)$ замечаем, что $s(0)=1$. Это условие используем для определения постоянной *C*.

Для этого положим в обеих частях равенства (33) $x=0$. Получим:

$$s(0)=C\cdot f(0)\quad\Leftrightarrow\quad 1=C\cdot 1\quad\Leftrightarrow\quad C=1.$$

Таким образом, окончательно получаем $s(x)=f(x)$, $x\in(-1,1)$, т.е.

$$\begin{aligned}(1+x)^{m}&=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{3}+\ldots+\\&+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^{n}+\ldots,\quad x\in(-1,1).\end{aligned} \tag{34}$$

Разложение (34) установлено нами для $x\in(-1,1)$. Что касается концов промежутка: $x=\pm1$, то мы приведем результаты без доказательства.

Эти результаты таковы:

1) если $m>0$, то разложение (34) справедливо для $x\in[-1,1]$;

2) если $-1<m<0$, то разложение (34) справедливо для $x\in(-1,1]$;

3) если $m\le-1$, то разложение (34) справедливо для $x\in(-1,1)$.

Замечание 1. Биномиальный ряд является основой разложений многих функций в ряды.

Найдем, например, разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \arcsin x$.

▶ Положим $f(t) = \arcsin t$. Тогда $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. Рассмотрим биномиальный ряд при $m = -\dfrac{1}{2}$ и независимой переменной $(-t^2)$. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}t^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!2^n}t^{2n} + \ldots\ ,$$

$$t^2 \in [0,1) \Leftrightarrow t \in (-1,1).$$

Возьмем любое $x \in (-1,1)$ и проинтегрируем почленно полученный ряд по промежутку $[0, x]$. Будем иметь:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\ , \quad x \in (-1,1),$$

откуда

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{35}$$

Разложение (35) установлено нами пока лишь для $x \in (-1,1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = 1$ ряд (35) будет таким:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!\cdot(2n+2)!!\cdot(2n+3)}{(2n)!!\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)!!} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Составляем переменную Раабе

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\cdot\left(\frac{(2n+2)(2n+3)-(2n+1)^2}{(2n+1)^2}\right) =$$

$$= n\frac{6n+5}{(2n+1)^2} = \frac{n^2\left(6+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}\ (>1).$$

Значит, ряд (35) в точке $x=1$ сходится. В точке $x=-1$ будем иметь $-1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Этот ряд лишь знаком отличается от ряда (35) в точке $x=1$. Значит, он тоже сходится. Обозначим сумму ряда (35) через $s(x)$, $x\in[-1,1]$. По изложенному в п. 3°, заключаем, что $s(x)\in C\big([-1,1]\big)$, причем $s(x)$ непрерывна справа в точке $x=-1$ и непрерывна слева в точке $x=1$. Имеем

$$s(-1)=\lim_{x\to-1+0}s(x)=\lim_{x\to-1+0}\arcsin x=-\frac{\pi}{2},$$

$$s(1)=\lim_{x\to1-0}s(x)=\lim_{x\to1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

Значит, разложение (35) справедливо в промежутке $[-1,1]$. ◄

Замечание 2. Следует иметь в виду, что разложение функций в степенной ряд при помощи использования уже известных разложений часто осуществляется проще, чем с помощью формулы Маклорена. Мы видели это на примерах разложений в ряд функций: $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Приведем еще один пример.

Пример. Разложение показательной функции $f(x)=a^x$ в ряд Маклорена.

► Имеем $a^x=e^{x\ln a}$. Положим $t=x\ln a$. Известно, что для любого $t\in(-\infty,+\infty)$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}.$$

Заменив в этом равенстве t на $x\ln a$, будем иметь сразу для любого $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n. ◄$$

Дополнение к теории рядов

1°. Вычисление сумм числовых рядов с заданной точностью.

В главе “Числовые ряды с вещественными членами” мы много занимались исследованием сходимости числовых рядов. Однако, наряду с вопросами сходимости при оперировании с рядами, возникает другая важная и более трудная проблема - задача суммирования рядов.

Мы видели на примерах геометрического ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, что иногда можно найти сумму ряда по определению, т.е. вычисляя

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. В большинстве же случаев этот естественный путь суммирования ряда наталкивается на непреодолимые трудности. Поэтому часто ставится вопрос об отыскании приближенного значения суммы данного числового ряда с наперед заданной степенью точности.

Принципиальное значение этого вопроса очевидно. Пусть имеется сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (так как ряд сходится, то он имеет сумму s). По определению, $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (s_n - n-я частичная сумма ряда). Поэтому, если требуется найти приближенное значение суммы ряда s с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине положительного числа ε, мы выбираем число $N = N(\varepsilon)$ таким, чтобы было:

$$|s - s_n| < \varepsilon, \text{ для любого } n \in \mathbf{N},$$

и принимаем за искомое приближенное значение суммы ряда s частичную сумму s_n ($n > N$).

Таким образом, по заданной абсолютной погрешности ε мы находим такой член ряда a_n, чтобы сумма остатка ряда R_n, начинающегося со следующего члена, по абсолютной величине не превосходила число ε, т.е. $|R_n| \le \varepsilon$. Тогда оставшаяся частичная сумма s_n и будет ответом.

Однако следует иметь в виду, что, вычисляя значение частичной суммы s_n нашего ряда, приходится переводить члены этой частичной суммы в десятичные дроби, производя при этом округления, т.е. внося новые погрешности, вызванные техникой вычисления. Эти погрешности необходимо учитывать так, чтобы в сумме с оценкой отброшенного остатка ряда R_n получить число, не превосходящее заданной погрешности ε. Для этого число ε разбивают на два положительных слагаемых $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и при определении номера n частичной суммы s_n, принимаемой за приближенное значение суммы ряда s, требуют, чтобы выполнялось условие $|R_n| < \varepsilon_1$, а при вычислении частичной суммы s_n, переводя члены ряда в десятичные дроби, оставляют такое количество десятичных знаков, чтобы сумма погрешностей, допущенных в каждом члене s_n, не превосходила число ε_2.

Пример 1. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.00001, сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots.$$

▶ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon=0.00001$ на два слагаемых: $\varepsilon=0.000005+0.000005$. Так как данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то модуль суммы остатка ряда не превосходит модуля первого члена остатка. Поэтому следует найти ближайший к началу ряда член, модуль которого не превосходит 0.000005. Таким членом будет $\frac{1}{9!}$, так как $\frac{1}{9!}=\frac{1}{362880}<0.000005$ (заметим, что предыдущий член отбросить нельзя, так как $\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}>0.00001$).

Таким образом, с ошибкой, не превосходящей 0.000005, будем иметь:

$$s\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}=\frac{5040-840+42-1}{7!}=\frac{4241}{5040} \quad\Rightarrow\quad s\approx 0.84147$$

(погрешность округления <0.000003). ◀

Пример 2. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.001, сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$.

▶ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon=0.001$ на два слагаемых $\varepsilon=0.0005+0.0005$. Так как данный ряд положительный, удовлетворяющий условиям интегрального признака Коши, то сумма остатка ряда $R_n\le\int_n^{+\infty}f(x)dx$. Здесь $f(x)=\frac{1}{x^5}$ - производящая функция для данного ряда. Имеем

$$\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=-\frac{1}{4x^4}\Bigg|_{x=n}^{x=+\infty}=\frac{1}{4n^4}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.0005. Для этого нужно рассмотреть неравенство:

$$\frac{1}{4n^4}<0.0005 \quad\Rightarrow\quad 4n^4>2000 \quad\Rightarrow\quad n^4>500.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n=5$ ($5^4=625>500$, а $4^4=256<500$). Значит, если взять пять первых членов, т.е. положить $s \approx 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5}$, то абсолютная погрешность будет меньше 0.0005.

Имеем далее,

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} = 1.036.$$

(погрешность округления меньше 0.0004). ◂

Пример 3. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.001, сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$.

▸ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon = 0.001$ на два слагаемых $\varepsilon = 0.0005 + 0.0005$. Имеем

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) < \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right)}_{\text{ãåî ì . ðÿä}} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.0005. Для этого нужно рассмотреть неравенство

$$\frac{n+1}{n!n} < 0.0005.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение *n*, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n = 7$. В самом деле, $\frac{8}{7! \cdot 7} = \frac{8}{35280} < 0.0003$, а $\frac{7}{6! \cdot 6} = \frac{7}{4320} > 0.0005$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.0005, будем иметь

$$s \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.5 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.5 + \frac{157}{720} \quad \Rightarrow \quad s \approx 2.718$$

(погрешность округления < 0.0005). ◂

Замечание. Для абсолютно сходящихся знакопеременных рядов (но не знакочередующихся), оценивая сумму остатка ряда, заменяют остаток ряда рядом, составленным из модулей членов остатка, а с последним поступают так же, как при оценке суммы остатка положительного ряда.

2°. Вычисление значений функций при помощи степенных рядов.

Разложения функций в степенные ряды позволяют во многих случаях вычислять с любой наперед заданной точностью значения этих функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.00001, $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$.

▶ Имеем $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Следовательно,

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(0.1)^n}{n!} + \ldots .$$

Разбиваем заданную допустимую погрешность на два слагаемых: $\varepsilon = 0.000005 + 0.000005$. Имеем:

$$R_{n+1} = \frac{(0.1)^n}{n!} + \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(0.1)^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{(0.1)^n}{n!}\left(1 + \frac{0.1}{n+1} + \frac{(0.1)^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) < \frac{(0.1)^n}{n!}\left(1 + \frac{0.1}{n+1} + \frac{(0.1)^2}{(n+1)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{(0.1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{0.1}{n+1}} = \frac{(0.1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+0.9)}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.000005. Для этого нужно рассмотреть неравенство

$$\frac{(0.1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+0.9)} < 0.000005.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение *n*, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n = 4$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.000005, будем иметь:

$$e^{\frac{1}{10}} \approx 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2!} + \frac{0.001}{3!} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[10]{e} \approx 1.10517$$

(погрешность округления < 0.000005). ◀

Пример 5. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.0001, $\sqrt[5]{35}$.

▶ Имеем $\sqrt[5]{35} = 2 \cdot \sqrt[5]{\dfrac{35}{32}} = 2\left(1 + \dfrac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Мы знаем, что $(1+x)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}x-\frac{4}{2!\cdot 5^2}x^2+\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}x^3-\ldots$. Следовательно,

$$\sqrt[5]{35}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!\cdot 5^2}\cdot\frac{3^2}{(32)^2}+\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\cdot\frac{3^3}{(32)^3}-\ldots\right).$$

Разбиваем заданную допустимую погрешность на два слагаемых: $\varepsilon=0.00005+0.00005$. Так как ряд знакочередующийся, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, то методом проб находим ближайший к началу член, модуль которого не превосходит 0.00005. Таким членом оказывается $\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\cdot\frac{3^3}{(32)^3}$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.00005, будем иметь:

$$\sqrt[5]{35}\approx 2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}\quad\Rightarrow\quad\sqrt[5]{35}\approx 2.0361$$

(погрешность округления <0.00005). ◀

3°. Вычисление интегралов при помощи степенных рядов.

Способ вычисления определенных и неопределенных интегралов с помощью степенных рядов состоит в следующем: разлагаем (если это возможно) подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем производим почленное интегрирование полученного ряда. Приведем несколько примеров.

Пример 6. Вычисление интегрального синуса $\operatorname{si}x=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$.

▶ Точка $t=0$ - особая точка (в ней не определена подынтегральная функция). Так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, то $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ - ограниченная функция.

Если положить $\tilde{f}(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$, то легко видеть, что $\tilde{f}(t)\in C\big([0,x]\big)$, где x - любое. Значит, для любого конечного x $\tilde{f}(t)\in R\big([0,x]\big)$, а значит, $\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ сходится.

Имеем

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\ ,\ t\in(-\infty,+\infty),$$

откуда

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \ , \ t \in (-\infty, +\infty)$$

(в точке $t = 0$ левую часть равенства понимаем в предельном смысле). Следовательно,

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + \ldots \ ,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Подставляя в ряд вместо x те или иные конкретные значения, мы можем найти интересующие нас значения функции $\operatorname{si} x$. ◀

Пример *7*. Вычисление $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

▶ Заменяя в равенстве $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$ аргумент t на $-\frac{y^2}{2}$, получаем разложение функции $e^{-\frac{y^2}{2}}$ в степенной ряд (годное при любом значении y):

$$e^{-\frac{y^2}{2}} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^n + \ldots \ .$$

Пусть x - любое конечное. Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится равномерно в $[0, x]$, ибо $[0, x] \subset (-\infty, +\infty)$. Поэтому законно почленное интегрирование этого ряда в $[0, x]$. Получаем

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} + \ldots \right).$$

Подставляя в ряд вместо x конкретные значения, можно найти интересующие нас значения функции $\Phi(x)$.

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1988. Т. 1.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. Т. II.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аксёнов Анатолий Петрович

Математический анализ. Теория рядов

Учебное пособие

Корректор А.В.Явственная

Свод. темплан 1997 г.

Лицензия ЛР №020539 от 09.07.92

Подписано в печать Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж .
Заказ С

Санкт-Петербургский государственный технический университет.
Издательство СПбГТУ.
Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.