С. П. Преображенский, С.Р. Тихомиров

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1987

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое расчётное задание по теме "Дифференциальные уравнения" включает в себя следующие разделы:

1. составление по заданной функции дифференциального уравнения и задачи Коши;
2. проверка выполнения условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши;
3. решение дифференциального уравнения с помощью степенного ряда.

Попутно расчётное задание преследует и другую цель – повторение некоторых основных фактов из теории степенных рядов, а именно:

1. разложение элементарных функций в ряды Тейлора,
2. нахождение радиуса и круга сходимости степенного ряда,
3. действия со степенными рядами.

И, наконец, при выполнении расчётного задания приходится решать рекуррентные уравнения, связывающие коэффициенты степенного ряда. Такие уравнения, возникающие в приводимых ниже вариантах задания или решаются совсем просто, так как оказываются однородными и связывают только два последовательных коэффициента ряда, или – в более сложных случаях – они оказываются неоднородными и требуют от студента известной изобретательности. В этом последнем случае может быть использован метод вариации произвольной постоянной (или, как его ещё называют – метод Лагранжа). Этот метод излагается здесь при разборе конкретного примера.

Содержание расчётного задания составлено так, что студент, фактически, сам себе ставит задачу, сам предварительно находит ответ и затем, решая задачу, получает решение, которое должно совпасть с полученным ранее ответом.

Данное расчётное задание неоднократно апробировалось на физико-механическом факультете. Представляется целесообразным использование этого задания также на других факультетах с углублённым изучением математики – РФФ и ФТК. В сокращённом варианте это задание можно предлагать и на общетехнических факультетах (для этого, конечно, необходимо из перечня задач отобрать наиболее простые).

Расчётное задание

1. Для заданной функции $y=f(x)$ составьте линейное дифференциальное уравнение не ниже второго порядка с полиномиальными коэффициентами, для которого эта функция является решением.

2. Разложите данную функцию в степенной ряд по степеням x.

3. Поставьте задачу Коши в точке $x=0$ для уравнения, полученного в п.**1** так, чтобы решением задачи Коши была заданная функция. Проверьте выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

4. Методом неопределённых коэффициентов найдите решение поставленной задачи Коши в виде степенного ряда.

5. Найдите радиус сходимости полученного ряда.

6. Сопоставьте результаты, полученные в п. п. **2** и **4**.

Функции для расчётного задания.

1. $y=\frac{1}{16}(1-2x-\sqrt{1-4x}\,)^2$.
2. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)$.
3. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\ln\frac{1+x}{1-x}$.
4. $y=-\ln(1+x)\cdot\ln(1-x)$.
5. $y=\frac{1}{2}\ln^2(1-x)$.
6. $y=\frac{1}{2x^2}\ln^2(1+x^2)$.
7. $y=-\ln(1-x+x^2)$.
8. $y=\ln\frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$.
9. $y=\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
10. $y=\arcsin^2 x$.
11. $y=\operatorname{arsh}^2 x$.
12. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $y=\frac{\operatorname{arsh}x}{\sqrt{1+x^2}}$.
14. $y=\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arsh}x$.
15. $y=2x-2\cdot\sqrt{4-x^2}\cdot\arcsin\frac{x}{2}$.
16. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\,\right)^p,\ p>0$.
17. $y=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.
18. $y=\frac{1}{2}\ln^3(1+x)$.
19. $y=\frac{8}{3\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^3}$.
20. $y=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$.
21. $y=\exp(p\arcsin x)$.
22. $y=\cos(p\arcsin x)$.
23. $y=\cos(p\operatorname{arsh}x)$.
24. $y=\sin(p\arcsin x)$.
25. $y=\sin(p\operatorname{arsh}x)$.
26. $y=\frac{1}{12}\arcsin^3 x$.
27. $y=\frac{1}{6}\arcsin^4 x$.
28. $y=\frac{4}{\sqrt{1-4x}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^2}$.
29. $y=\frac{8}{\sqrt{1-4x}\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^3}$.
30. $y=\frac{8\sqrt{1-4x}+4}{\left(\sqrt{1-4x}\right)^3\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^2}$.
31. $y=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-16x^2}}{2(1-16x^2)}}$.
32. $y=\sqrt{\frac{4x+\sqrt{1+16x^2}}{1+16x^2}}$.
33. $y=\frac{1}{2}\int\limits_0^x\frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}dt$.
34. $y=\int\limits_0^x\frac{1}{t}\operatorname{arctg}t\,dt$.
35. $y=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\frac{1}{t}\operatorname{arsin}t\,dt$.
36. $y=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\frac{1}{t}\operatorname{arsh}t\,dt$.

Пример и комментарии

Приведём полное решение задания на примере функции $y=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}$.

1. Составим для данной функции дифференциальное уравнение (не ниже второго порядка) с полиномиальными коэффициентами. Будем исходить из тождества

$$x^2 y=\operatorname{arctg}^2 x.$$

Дифференцируя по x, находим:

$$2xy+x^2y'=\frac{2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x,$$

или

$$(x+x^3)y+\frac{1}{2}(x^2+x^4)y'=\operatorname{arctg} x.$$

Второй раз дифференцируем по x:

$$(1+3x^2)y+(x+x^3)y'+(x+2x^3)y'+\frac{1}{2}(x^2+x^4)y''=\frac{1}{1+x^2}$$

и, умножая обе части равенства на $(1+x^2)$, окончательно получаем:

$$\frac{1}{2}x^2(1+x^2)^2y''+x(1+x^2)(2+3x^2)y'+(1+3x^2)(1+x^2)y=1. \qquad (1)$$

2. Разложим заданную функцию $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}$ в ряд по степеням x.

Видно, что $x=0$ – устранимая особая точка функции $f(x)$ и поэтому в дальнейшем считаем, что

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

Введём вспомогательную функцию $g(x)$, заданную равенствами:

$$g(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \text{ если } x\neq 0, \text{ и } g(0)=1.$$

так что $f(x)\equiv g^2(x)$.

Для того, чтобы получить разложение $f(x)$ в ряд Маклорена. сначала разложим в такой ряд функцию $g(x)$, а затем возведём этот последний в квадрат.

Так как при $x\in(-1;\,1)$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n},$$

а $\operatorname{arctg} x=\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, то

$$\operatorname{arctg} x=\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где $x \in [-1;\ 1]$ (сходимость на концах промежутка следует из признака Лейбница).

Поэтому

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1.$$

Для сокращения записи положим: $x^2 = z$ и $(-1)^n \frac{1}{2n+1} = b_n$, так что,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Пусть, далее, искомое разложение функции $f(x)$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Так как функция $f(x)$ чётна, то её разложение в ряд Маклорена содержит лишь чётные степени. Поэтому все коэффициенты ряда с нечётными индексами равны нулю $(a_{2n+1} = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и, значит,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n.$$

Из тождества $f(x) \equiv g^2(x)$ следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)^2.$$

Согласно правилу умножения рядов, коэффициенты a_{2n} вычисляются по формуле:

$$a_{2n} = b_n \cdot b_0 + b_{n-1} \cdot b_1 + \ldots + b_{n-k} \cdot b_k + \ldots + b_1 \cdot b_{n-1} + b_0 \cdot b_n,$$

то есть,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \frac{(-1)}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{2(n-k)+1} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + 1 \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

или короче:

$$a_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)(2n-2k+1)}.$$

Разложим дробь $\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)}=\frac{A}{2k+1}+\frac{B}{2n-2k+1}$$

(A и B – неопределённые коэффициенты).

Очевидно, $A=B=\frac{1}{2(n+1)}$. Поэтому:

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2(n-k)+1}\right).$$

В полученном выражении обе суммы равны. Действительно, если во второй сумме заменить переменную суммирования, положив $m=n-k$, то она запишется в виде: $\sum_{m=n}^{0}\frac{1}{2m+1}$ и, таким образом, вторая сумма отличается от первой лишь тем, что её слагаемые записаны в обратном порядке. Следовательно,

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}. \qquad (2)$$

Так как

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n},\ -1\le x\le 1,$$

то искомое разложение в ряд Маклорена функции $f(x)$ имеет вид:

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)x^{2n},\ -1\le x\le 1. \qquad (3)$$

Замечание 1. Легко видеть, что на комплексной плоскости разложение $f(x)$ в ряд (3) оказывается справедливым внутри круга $|x|<1$ и на его границе $|x|=1$ за исключением точек i и $-i$ (сходимость на границе устанавливается с помощью признака Дирихле).

Замечание 2. Для постановки задачи Коши в точке $x=0$ нам потребуются значения функции и её производной в этой точке. Проще всего их найти вспомнив, что если известно тейлоровское разложение функции в окрестности точки x_0, то его коэффициенты выражаются формулой: $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$, откуда $f^{(k)}(x_0)=$ $=k!a_k$. Этим обстоятельством мы рекомендуем пользоваться особенно в том случае, когда в расчётном задании для постановки задачи Коши требуются значения производных высших порядков в точке x_0.

В нашем случае:

$$f(0)=1$$

(так мы доопределяли $f(x)$ в точке $x=0$, и так следует из формулы (2) при $n=0$), а так как все $a_{2k+1}=0$, то, в частности, $a_1=0$ и, значит,

$$f'(0)=0.$$

3. Поставим задачу Коши в точке $x=0$ и проверим выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

В силу сказанного в Замечании 2 п. **2**, будем рассматривать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} x^2(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)(2+3x^2)y'+(2+6x^2)(1+x^2)y=2, \\ y\big|_{x=0}=1, \\ y'\big|_{x=0}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Запишем дифференциальное уравнение (1) в нормальном виде:

$$y''+\frac{2(2+3x^2)}{x(1+x^2)}y'+\frac{2+6x^2}{x^2(1+x^2)}y=\frac{2}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Коэффициенты и правая часть этого уравнения неограничены (разрывны в точке $x=0$) поэтому в рассматриваемом случае теорема существования и единственности решения задачи Коши не работает.

4. Методом неопределённых коэффициентов найдём решение поставленной задачи Коши в виде степенного ряда.

Будем искать решение задачи Коши (4) в виде ряда

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k, \tag{5}$$

где c_k – неопределённые коэффициенты.

Первые два коэффициента – c_0 и c_1 – легко находятся из начальных условий задачи Коши (4).

В самом деле. По первому начальному условию: $y\big|_{x=0}=1$, а из (5) при $x=0$ получаем: $y(0)=c_0$, следовательно, $c_0=1$.

Дифференцируя (5) по x и полагая затем $x=0$, находим:

$$y'\big|_{x=0}=\sum_{k=0}^{\infty}kc_kx^{k-1}\big|_{x=0}=c_1,$$

вместе с тем, согласно второму начальному условию $y'\big|_{x=0}=0$, следовательно, $c_1=0$.

Итак,

$$\begin{cases} c_0=1, \\ c_1=0. \end{cases} \tag{6}$$

Для нахождения остальных коэффициентов ряда (5) (c_k при $k\geq 2$) подставим в дифференциальное уравнение вместо y, y' и y'', соответственно ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad\text{и}\quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Но сначала – для упрощения коэффициентов уравнения – умножим обе части (1) на $\frac{2}{1+x^2}$ и запишем дифференциальное уравнение в виде:

$$(x^2+x^4)y''+(4x+6x^3)y'+(2+6x^2)y=\frac{2}{1+x^2}\,. \tag{7}$$

Теперь имеем:

$$(x^2+x^4)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}+(4x+6x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}+(2+6x^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=\frac{2}{1+x^2}\,.$$

В результате перемножений и перегруппировки слагаемых получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}[(k^2-k)c_k x^k&+(k^2-k)c_k x^{k+2}+\\ +4kc_k x^k &+ 6kc_k x^{k+2}+\\ +2c_k x^k &+ 6c_k x^{k+2}]=\frac{2}{1+x^2}\,.\end{aligned}$$

Отсюда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+3k+2)c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+5k+6)c_k x^{k+2}=\frac{2}{1+x^2}\,.$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+3)c_k x^{k+2}=\frac{2}{1+x^2}\,.$$

Выделим два первых слагаемых из первой суммы, а во второй сумме заменим индекс суммирования: положим $p=k+2$, т. е. $k=p-2$, при этом начальному значению k ($k=0$) соответствует $p=2$. Имеем:

$$2c_0+6c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k+2)c_k x^k+\sum_{p=2}^{\infty}p(p+1)c_{p-2}x^p=\frac{2}{1+x^2}\,.$$

Заменим c_0 и c_1 их значениями (см. (6)): $c_0=1$, $c_1=0$ и заметим, что величина суммы ряда не зависит от того, как обозначен индекс суммирования (она определяется *границами* изменения индекса), поэтому во второй сумме индекс p заменим на k и объединим обе суммы в одну; правую часть равенства разложим в ряд по степеням x при $|x|<1$. Получим:

$$2+\sum_{k=2}^{\infty}((k+1)(k+2)c_k+k(k+1)c_{k-2})x^k=2(1-x^2+x^4-\dots).$$

Первые слагаемые обеих частей равенства взаимно уничтожаются:

$$\sum_{k=2}^{\infty}((k+1)(k+2)c_k+k(k+1)c_{k-2})x^k=\sum_{k=1}^{\infty}2(-1)^k x^{2k}.$$

Ряд в правой части равенства ряд можно записать в виде:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}((-1)^k+1))x^k,$$

где $\left[\frac{k}{2}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{k}{2}$.

В самом деле, множитель

$$((-1)^k+1))=\begin{cases}0 \text{ при нечётных } k,\\ 2 \text{ при чётных } k,\end{cases}$$

аннулирует все члены ряда с нечётными степенями x, а множитель

$$(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}=\begin{cases}1 \text{ при } k=4m,\\ -1 \text{ при } k=4m+2,\end{cases}$$

обеспечивает чередование знаков при чётных k.

Таким образом, при $|x|<1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)((k+2)c_k+kc_{k-2})x^k\equiv\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}((-1)^k+1))x^k.$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой и правой частях этого тождества, приходим к рекуррентной формуле, связывающей коэффициенты ряда (5):

$$(k+1)((k+2)c_k+kc_{k-2})=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}((-1)^k+1)),\ k\geq 2.$$

Эта формула вместе с условиями (6) позволяет найти значения коэффициентов c_k из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} c_0=1, \\ c_1=0, \\ (k+2)c_k+kc_{k-2}=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}((-1)^k+1))\frac{1}{k+1},\ k\geq 2. \end{cases} \tag{8}$$

Будем решать эту систему для нечётных и чётных k отдельно.

Пусть сначала k нечётное ($k=2m+1$, $m=0, 1, 2, \dots$). Выпишем из системы уравнения, связывающие коэффициенты c_k с нечётными индексами:

$$\begin{cases} c_1=0, \\ (2m+3)c_{2m+1}+(2m-1)c_{2m-1}=0,\ m\geq 1. \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} c_1=0, \\ 5c_3+3c_1=0, \\ 7c_5+5c_3=0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим: из II уравнения – $c_3=0$ (т. к. $c_1=0$), затем – из III – $c_5=0$ (т. к. $c_3=0$) и т. д. Не составляет труда проверить по индукции, что при любом m: $c_{2m+1}=0$.

Пусть теперь k – чётное ($k=2m$, $m=0, 1, 2, \dots$). Из (8) выпишем уравнения, связывающие коэффициенты c_k с чётными индексами:

$$\begin{cases} c_0=1, \\ (2m+2)c_{2m}+2mc_{2m-2}=(-1)^m\frac{2}{2m+1},\ m\geq 1. \end{cases}$$

или сокращая последние уравнения на 2,

$$\begin{cases} c_0=1, \\ (m+1)c_{2m}+mc_{2m-2}=(-1)^m\frac{1}{2m+1},\ m\geq 1. \end{cases} \tag{9}$$

Это – *бесконечная система линейных алгебраических уравнений.* Покажем, как можно её решить ***методом Лагранжа*** (методом вариации произвольной постоянной).

В соответствии с этим методом решаем сначала следующую систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} (m+1)c_{2m}+mc_{2m-2}=0, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда:

$$c_{2m}=-\frac{m}{m+1}c_{2m-2},\ m\geq 1. \tag{11}$$

Исходя из этого равенства последовательно получаем:

$$c_{2m}=-\frac{m}{m+1}c_{2m-2}=-\frac{m}{m+1}\left(-\frac{m-1}{m}c_{2m-4}\right)=(-1)^2\frac{m-1}{m+1}c_{2(m-2)}=$$
$$=(-1)^2\frac{m-1}{m+1}\left(-\frac{m-2}{m-1}c_{2m-6}\right)=(-1)^3\frac{m-2}{m+1}c_{2(m-3)}=$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$$
$$=(-1)^r\frac{m-r+1}{m+1}c_{2(m-r)}.$$

Убедимся в справедливости последнего равенства по индукции.

При $r=1$ равенство справедливо, так как совпадает с (10).

Допустим, что формула

$$c_{2m}=(-1)^r\frac{m-r+1}{m+1}c_{2(m-r)} \tag{12}$$

верна при произвольном натуральном r.

Используя (11), понизим индекс коэффициента в правой части $2(m-r)$ ещё на 2 единицы.

Для этого сначала заменим в (11) m на $m-r$:

$$c_{2(m-r)}=-\frac{m-r}{m-r+1}c_{2m-2r-2},$$

а затем подставим это выражение для $c_{2(m-r)}$ в равенство (12):

$$c_{2m}=(-1)^r\frac{m-r+1}{m+1}\left(-\frac{m-r}{m-r+1}c_{2m-2r-2}\right)\ \Leftrightarrow\ c_{2m}=(-1)^{r+1}\frac{m-r}{m+1}c_{2(m-r-1)},$$

что и получается из (12) формальной заменой r на $r+1$.

Теперь из (12) при $r=m$ получаем:

$$c_{2m}=(-1)^m\frac{1}{m+1}c_0,\ m=1,\,2,\,3,\,\ldots\ . \tag{13}$$

Равенства (13) дают решение *однородной* системы (10). Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что здесь c_0 – <u>произвольная</u> <u>постоянная</u> (*в однородной* системе уравнение $c_0=1$ из (9) было опущено).

Переходя к *неоднородной* системе (9), заменим в (13) c_0 на $\Psi(m)$ – неизвестную функцию натурального аргумента m (*варьируем* c_0) и будем искать решение системы (9) в виде:

$$c_{2m}=(-1)^m\frac{1}{m+1}\Psi(m),\ m\geq 1. \tag{14}$$

Подставляя это выражение в (9), получаем уравнения относительно $\Psi(m)$:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ (m+1)\cdot(-1)^m \frac{1}{m+1}\Psi(m) + m\cdot(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\Psi(m-1) = (-1)^m \frac{1}{2m+1}, \; m \geq 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\Psi(m) - \Psi(m-1) = \frac{1}{2m+1}.$$

При $m = 1, 2, \ldots, n,$ из этого равенства получаем:

$$\Psi(1) - \Psi(0) = \frac{1}{3},$$

$$\Psi(2) - \Psi(1) = \frac{1}{5},$$

$$\Psi(3) - \Psi(2) = \frac{1}{7},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi(n) - \Psi(n-1) = \frac{1}{2n+1}.$$

Складываем все эти n равенств и, – после приведения подобных членов в алгебраической сумме, возникающей слева, – находим:

$$\Psi(n) - \Psi(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1},$$

то есть

$$\Psi(n) = \Psi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

Остаётся найти $\Psi(0)$. Для этого полагаем в (14) $m = 0$:

$$c_0 = \Psi(0),$$

но $c_0 = 1$, следовательно, $\Psi(0) = 1$.

Итак,

$$\Psi(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

Подставляя теперь Ψ в (14), запишем искомое решение неоднородной системы (9):

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}. \tag{15}$$

Ранее мы видели, что $c_{2m+1} = 0$ (при $m = 0, 1, 2, \ldots$), так что все коэффициенты ряда (5) нам известны и мы можем выписать его в окончательном виде:

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}\left((-1)^m\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2k+1}\right)x^{2m}, \tag{16}$$

Радиус сходимости R этого ряда мы найдём в п. **5.**

Функция (16) даёт решение поставленной задачи Коши (4): по построению она удовлетворяет и дифференциальному уравнению, и начальным условиям.

5. Найдём радиус сходимости ряда (16).

По теореме Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}.$$

Так как $c_{2m+1}=0$ при $m=0,\,1,\,2,\,\ldots$, то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[2m]{|c_{2m}|}$ и, значит,

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[2m]{|c_{2m}|}. \tag{17}$$

Из (15):

$$|c_{2m}|=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2k+1}. \tag{18}$$

Найдём асимптотику $|c_{2m}|$. С этой целью воспользуемся хорошо известной асимптотической формулой для частичной суммы гармонического ряда (см, например, [4, задача №146]):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+C+q_n,$$

где $C=0{,}55721566\ldots$ – постоянная Эйлера, а q_n – бесконечно малая величина: $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=0.$

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=$$

$$=\ln(2m+1)+C+q_{2m+1}-\frac{1}{2}(\ln m+C+q_m)=\frac{1}{2}\ln m+A+r_m,$$

где $A=\frac{1}{2}C+\ln 2=\mathrm{const}$, а $r_m=q_{2m+1}-\frac{1}{2}q_m+\ln\left(1+\frac{1}{2m}\right)$ – бесконечно малая величина.

Поэтому (см. (18)):

$$|c_{2m}|=\frac{1}{2(m+1)}(\ln m+2A+2r_m)=\frac{1}{2(m+1)}\ln m+\frac{1}{m+1}(A+r_m)=\frac{1}{2(m+1)}\ln m+s_m,$$

где $s_m=\frac{1}{m+1}(A+r_m)$ – величина бесконечно малая, так как является произведением бесконечно малой величины $\frac{1}{m+1}$ на ограниченную величину $A+r_m$.

Запишем теперь выражение под знаком предела в (17) с помощью экспоненты:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[2m]{|c_{2m}|}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\exp\left(\frac{1}{2m}\ln|c_{2m}|\right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2m}\ln|c_{2m}|=\frac{1}{2m}\ln\left(\frac{\ln m}{2(m+1)}+s_m\right)=-\frac{\ln(m+1)}{2m}+t_m,$$

(t_m – бесконечно малая величина), так что показатель экспоненты стремится к 0 при $m\to\infty$, а, значит $R=1$.

6. Сопоставим результаты, полученные в п. п. **2** и **4**.

Ряд (16), дающий решение задачи Коши (4), полностью совпадает с (3) – разложением в ряд Маклорена функции $y=f(x)=\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2}$.

Заметим ещё, что решение задачи Коши в виде степенного ряда в данном случае определилось однозначно.

Литература

1. А. Н. Тихонов, А. В. Васильева, А. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения, М., "Наука", 1985,

2. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М., "Наука", 1969.

3. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа ч.I, М., "Наука", 1971; ч. II, М., "Наука". 1973.

4. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., "Наука", 1972.

5. А. П. Прудников. Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды, М., "Наука", 1981.

6. Сборник задач по теории аналитических функций, под редакцией М. А. Евграфова, изд. 2, М., "Наука", 1972.