Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П. Аксёнов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2000

УДК 517.38, 517.3821

Аксёнов А.П. Математический анализ. (Интегралы, зависящие от параметра. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы.) Учебное пособие. СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 2000, 145 с.

Пособие соответствует государственному стандарту дисциплины «Математический анализ» направления бакалаврской подготовки 510200 «Прикладная математика и информатика».

Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам: «Интегралы, зависящие от параметра, собственные и несобственные», «Двойной интеграл», «Криволинейные интегралы первого и второго рода», «Вычисление площадей кривых поверхностей, заданных как явными, так и параметрическими уравнениями», «Эйлеровы интегралы (Бета-функция и Гамма-функция)». Разобрано большое количество примеров и задач (общим числом 47).

Предназначено для студентов физико-механического факультета специальностей 010200, 010300, 071100, 210300, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Ил. 79. Библ. 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Глава 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

§1. Определение интегралов, зависящих от параметров

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$

Пусть при каждом закрепленном y из $[c, d]$ существует $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$. Ясно, что каждому значению y из $[c, d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c, d]$.

Введем обозначение

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \quad y \in [c, d]. \tag{1}$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы, зная свойства функции $f(x, y)$, *получить информацию о свойствах функции* $I(y)$. *Эти свойства, как будет показано ниже, имеют многообразные применения, в особенности при вычислении интегралов.*

Допустим еще, что при каждом закрепленном x из промежутка $[a, b]$ существует $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$. Тогда этот интеграл будет представлять собой функцию переменной (параметра) x, определенную в промежутке $[a, b]$. Обозначим ее через $\tilde{I}(x)$, так что

$$\tilde{I}(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \quad x \in [a, b]. \tag{$\tilde{1}$}$$

§2. О допустимости предельного перехода по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y) \in C(\overline{P})$ и пусть y_0 – любое из $[c, d]$. Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) dx = \int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx. \tag{1}$$

▶ Отметим, что $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ существует для каждого значения y из $[c,d]$, так как $f(x,y)\in C([a,b])$ при любом закрепленном $y\in[c,d]$. В частности, существует $\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx$.

Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. Выберем и закрепим любое $y_0\in[c,d]$.

По условию $f(x,y)\in C(\overline{P})$, поэтому $f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{P})$ (см. теорему Кантора) и, следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (x',y'), (x'',y'') из $(\overline{P})$, для которых $|x''-x'|<\delta$, $|y''-y'|<\delta$, оказывается $\left|f(x'',y'')-f(x',y')\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Положим $y'=y_0$, $y''=y$, где y – любое, но такое, что $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$, $x'=x''=x$, где x – любое из $[a,b]$ ($|x''-x'|=0<\delta$). Тогда $\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ для любого $x\in[a,b]$, если $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$. Имеем:

$$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx=\int\limits_a^b\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx\right|\le\int\limits_a^b\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

Итак, любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что как только $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$, так сейчас же $\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx\right|<\varepsilon$. Последнее означает, что $\int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx=\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. ◀

Совершенно аналогично доказывается утверждение: если $f(x,y)\in C(\overline{P})$ и если x_0 – любое из $[a,b]$, то

$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d\left(\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right)dy=\int\limits_c^d f(x_0,y)\,dy.$$

§3. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $I(y) = C([c,d])$.

▶ Возьмем любое $y_0 \in [c,d]$ и закрепим. В §2 было доказано, что $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx$, то есть

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0).$$

Последнее же означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0. Так как y_0 – любое из $[c,d]$, то заключаем, что $I(y) \in C([c,d])$. ◀

Замечание 1. Условие $f(x,y) \in C(\overline{P})$ является достаточным для непрерывности $I(y)$ на $[c,d]$, но оно не необходимо.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

Пример. Пусть $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)$ в $(\overline{P}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ -5 \le y \le 5. \end{cases}$.

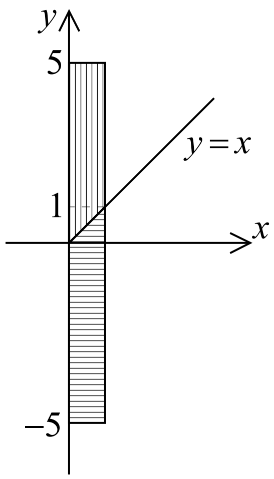


Рис. 1.1

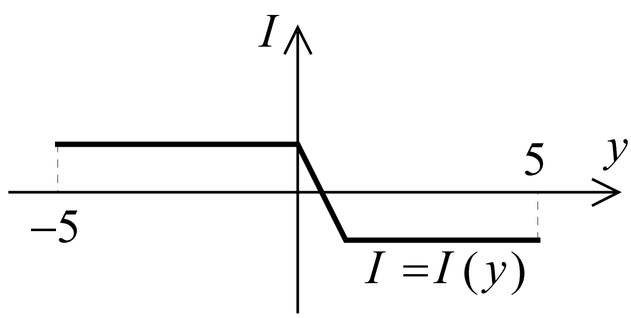


Рис. 1.2

Видим, что $f(x,y)$ терпит разрыв в точках, принадлежащих прямой $x = y$ (рис. 1.1).

Пусть $I(y) = \int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,dx$. Имеем:

1) если $-5 \le y < 0$, то $I(y) = \int\limits_0^1 1 \cdot dx = 1$.

2) если $0 \le y \le 1$, то $I(y) = \int\limits_0^y (-1) \cdot dx + \int\limits_y^1 1 \cdot dx = 1 - 2y$.

3) если $1 < y \le 5$, то $I(y) = \int\limits_0^1 (-1) \cdot dx = -1$.

Таким образом, $I(y) = \begin{cases} 1, & y \in [-5, 0), \\ 1 - 2y, & y \in [0, 1], \\ -1, & y \in (1, 5] \end{cases} \Rightarrow I(y) \in C([-5, 5])$ (см. рис. 1.2).

Замечание 2. Совершенно аналогично доказывается **теорема**: Пусть $f(x, y) \in C(\overline{P})$ и пусть $\widetilde{I}(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$, $x \in [a, b]$. Тогда $\widetilde{I}(x) \in C([a, b])$.

Следствие. Если $f(x, y) \in C(\overline{P})$, то одновременно $I(y) \in C([c, d])$, $\widetilde{I}(x) \in C([a, b])$ и, следовательно, существуют одновременно

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right) dy,$$

$$\int\limits_a^b \widetilde{I}(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$, $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$ называются *повторными интегралами* от функции $f(x, y)$ в $(\overline{P})$.

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $(\overline{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$. Пусть $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$, $y \in [c, d]$. Тогда:

1) функция $I(y)$ имеет в промежутке $[c, d]$ производную $I'(y)$;

2) $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx$, то есть $\left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx$, $y \in [c, d]$;

3) $I'(y) \in C([c, d])$.

▶ Возьмем любую точку $y_0 \in [c,d]$ и закрепим. Дадим y_0 приращение Δy – любое, но такое, что $\Delta y \neq 0$ и точка $y_0 + \Delta y \in [c,d]$. Тогда $I(y_0) = \int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx$, $I(y_0 + \Delta y) = \int\limits_a^b f(x, y_0 + \Delta y)\,dx$,

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}\,dx. \qquad (1)$$

По теореме Лагранжа $f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$ $(0 < \theta < 1)$. Следовательно,

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)\,dx. \qquad (2)$$

По условию, $f'_y(x, y) \in C(\overline{P})$. Перейдем в (2) к пределу при $\Delta y \to 0$. Приняв во внимание теорему о допустимости предельного перехода под знаком интеграла, получим:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_a^b \lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y)\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x, y_0)\,dx$$

$\Rightarrow$ $I'(y_0)$ существует, причем $I'(y_0) = \int\limits_a^b f'_y(x, y_0)\,dx$. Так как y_0 – любое из $[c,d]$, то заключаем, что $I'(y)$ существует для любого y из $[c,d]$, причем $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx$, $y \in [c,d]$. У нас $f'_y(x, y) \in C(\overline{P})$, а $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx$. А тогда по теореме о непрерывности интеграла как функции параметра заключаем, что $I'(y) \in C([c,d])$. ◀

§5. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y) \in C(\overline{P})$. Пусть $I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда $\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$, т. е.

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

▶ Докажем более общее равенство

$$\int_c^t I(y)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)\,dy \right) dx, \text{ для любого } t \in [c,d]. \qquad (1)$$

Займемся сначала левой частью равенства (1). Так как $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то $I(y) \in C([c,d])$ (см. теорему §3). Следовательно, $\int_c^t I(y)\,dy$ – интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. А тогда по теореме Барроу

$$\left(\int_c^t I(y)\,dy \right)'_t = I(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx, \quad t \in [c,d]. \qquad (2)$$

Займемся теперь правой частью равенства (1). Положим

$$\int_c^t f(x,y)\,dy = \varphi(x,t). \qquad (3)$$

Здесь в интеграле слева x выступает в роли параметра. Ясно, что функция $\varphi(x,t)$ определена в прямоугольнике $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le t \le d. \end{cases}$

Покажем, что $\varphi(x,t) \in C(\overline{P})$. Для этого выберем и закрепим любую точку $(x,t) \in (\overline{P})$. Затем возьмем Δx и Δt – любые, но такие, что точка $(x+\Delta x, t+\Delta t) \in (\overline{P})$. Будем иметь

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi(x,t) = \int_c^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy - \int_c^t f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_c^t \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \right] dy + \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy. \qquad (4)$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2}$. Отметим, что $(\rho \to 0)$ $\Leftrightarrow$ (одновременно $\Delta x, \Delta t \to 0$). Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$, $f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \xrightarrow[\substack{\rho \to 0 \\ (\Delta x \to 0)}]{} 0$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что $\left| f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \right| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}$, если $\rho < \delta$. Тогда

$$\left| \int_c^t \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \right] dy \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}(t-c) \le \varepsilon,$$

если $\rho < \delta$. Последнее означает, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_c^t \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \right] dy = 0$. Так как $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то $f(x,y)$ – ограниченная в $(\overline{P})$, т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|f(x,y)| \le M$ в $(\overline{P})$. А тогда $\left| \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy \right| \le M \cdot |\Delta t| \Rightarrow$

$\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, y)\,dy \underset{\substack{\rho\to 0\\(\Delta t\to 0)}}{\longrightarrow} 0$. Теперь из (4) следует

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) - \varphi(x,t) \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Последнее означает, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в точке (x,t). У нас точка (x,t) – любая из $(\overline{P})$. Поэтому $\varphi(x,t) \in C(\overline{P})$. Из (3) находим:

$$\varphi'_t(x,t) = f(x,t). \tag{5}$$

По условию, $f(x,y) \in C(\overline{P})$. Следовательно, $\varphi'_t(x,t) \in C(\overline{P})$. Принимая во внимание (3), правую часть равенства (1) можно записать в виде

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b \varphi(x,t)\,dx. \tag{6}$$

В интеграле, стоящем в правой части (6), t выступает в роли параметра. Выше было показано, что функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в $(\overline{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $\varphi'_t(x,t)$. Но тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\left(\int\limits_a^b \varphi(x,t)\,dx \right)'_t = \int\limits_a^b \varphi'_t(x,t)\,dx \overset{(5)}{=} \int\limits_a^b f(x,t)\,dx, \quad t \in [c,d]. \tag{7}$$

Видим, что левая и правая части равенства (1) имеют в промежутке $[c,d]$ совпадающие производные (см. (2) и (7)). Следовательно, они различаются в этом промежутке лишь на постоянную величину, т. е. для любого $t \in [c,d]$

$$\int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy \right) dx + \text{const}. \tag{8}$$

Положим в (8) $t = c$. Получим $0 = 0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = 0$. Значит, будем иметь вместо (8) для любого $t \in [c,d]$

$$\int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{9}$$

Положив в (9) $t = d$, получим

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx, \qquad (10)$$

а это и требовалось установить. ◀

§6. Случаи, когда и пределы интеграла зависят от параметра

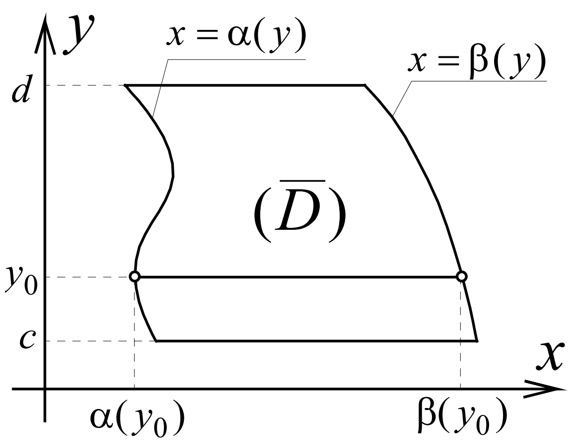


Рис. 1.3

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $(\overline{D})$, ограниченной линиями: $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, $x=\alpha(y)$, $x=\beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на промежутке $[c,d]$ и такие, что $\alpha(y)\le\beta(y)$, $y\in[c,d]$.

Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$. Ясно, что каждому значению y из $[c,d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Станем обозначать

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx, \quad y\in[c,d]. \qquad (1)$$

Теорема (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть функция $f(x,y)\in C(\overline{D})$, и пусть $I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Тогда $I(y)\in C([c,d])$.

▶ Выберем и закрепим л ю б о е $y_0\in[c,d]$.

1. Пусть $\alpha(y_0)<\beta(y_0)$.

Положим $\gamma=\dfrac{\alpha(y_0)+\beta(y_0)}{2}$. Ясно, что $\alpha(y_0)<\gamma<\beta(y_0)$ $\Rightarrow$ $\alpha(y_0)-\gamma<0$, $\beta(y_0)-\gamma>0$. Функции $\alpha(y)-\gamma$ и $\beta(y)-\gamma$ – непрерывные на промежутке $[c,d]$. Следовательно, по теореме о стабильности знака существует $\delta_1 > 0$ такое, что как только $|y - y_0| < \delta_1$ и $y \in [c,d]$, так сейчас же: $\alpha(y) - \gamma < 0$, $\beta(y) - \gamma > 0$, т. е. $\alpha(y) < \gamma < \beta(y)$.

Возьмем y из промежутка $[c,d]$ любое, но такое, чтобы было $|y - y_0| < \delta_1$, и положим $p = \max\{\alpha(y), \alpha(y_0)\}$; $q = \min\{\beta(y_0), \beta(y)\}$. Ясно, что $p < q$. Имеем:

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx = \underline{\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x, y_0)\,dx} + \int\limits_{p}^{q} f(x, y_0)\,dx + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx},$$

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \underline{\int\limits_{\alpha(y)}^{p} f(x, y)\,dx} + \int\limits_{p}^{q} f(x, y)\,dx + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx}.$$

В этих соотношениях из четырех подчеркнутых интегралов два обязательно равны нулю (так как обязательно: либо $p = \alpha(y_0)$, либо $p = \alpha(y)$, и либо $q = \beta(y_0)$, либо $q = \beta(y)$).

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, сколь угодно малое. Так как $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны в точке y_0, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$ такое, что как только $|y - y_0| < \delta_2$ и $y \in [c,d]$, так сейчас же $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$, $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$. Отметим, что если брать на промежутке $[c,d]$ значения y, удовлетворяющие условию: $|y - y_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то справедливы приведенные выше выражения для $I(y_0)$ и $I(y)$. Для таких y будем иметь:

$$I(y) - I(y_0) = \int\limits_{p}^{q} \left[f(x, y) - f(x, y_0)\right] dx +$$

$$+ \underline{\int\limits_{\alpha(y)}^{p} f(x, y)\,dx} + \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx} - \underline{\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x, y_0)\,dx} - \underline{\int\limits_{q}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx}.$$

Рассмотрим, например, $\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x, y_0)\,dx$. По условию $f(x, y) \in C(\overline{D})$ $\Rightarrow$ $f(x, y)$ ограниченная в $(\overline{D})$, т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|f(x, y)| \le M$ всюду в $(\overline{D})$. Так как $y \in [c,d]$ и $|y - y_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то $|p - \alpha(y_0)| < \varepsilon$. Следовательно, $\left|\int\limits_{\alpha(y_0)}^{p} f(x, y_0)\,dx\right| \le M \cdot |p - \alpha(y_0)| < M \cdot \varepsilon$.

Такая же оценка верна и для каждого из трех оставшихся подчеркнутых интегралов. Поэтому

$$|I(y)-I(y_0)|<\int\limits_p^q |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx+2M\cdot\varepsilon .$$

Так как $(\overline{D})$ – ограниченное замкнутое множество и $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $f(x,y)$ равномерно непрерывная в $(\overline{D})$. А тогда взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta_3>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек (x',y'), (x'',y'') из $(\overline{D})$, для которых $|x''-x'|<\delta_3$, $|y''-y'|<\delta_3$, будет $|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, $y'=y_0$, $y''=y$, где $y\in[c,d]$ и удовлетворяет условию $|y-y_0|<\delta$; $x'=x''=x$, где x – любое из $[p,q]$. Тогда $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ для всех $x\in[p,q]$. Следовательно, для y, удовлетворяющих условиям $|y-y_0|<\delta$ и $y\in[c,d]$, будет: $\int\limits_p^q |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx<\varepsilon\cdot(q-p)$, и потому $|I(y)-I(y_0)|<\varepsilon(q-p+2M)$.

У нас функции $\alpha(y),\beta(y)\in C([c,d])$ $\Rightarrow$ $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – ограниченные в $[c,d]$ $\Rightarrow$ существует число $K>0$ такое, что $|\alpha(y)|\le K$, $|\beta(y)|\le K$ для всех $y\in[c,d]$. А тогда $|q-p|\le|q|+|p|\le 2K$. Значит,

$$|I(y)-I(y_0)|<2\varepsilon\cdot(K+M). \tag{2}$$

Отметим, что число $2\varepsilon\cdot(K+M)$ сколь угодно мало вместе с ε.

Так как для достижения неравенства (2) понадобилось лишь, чтобы было $|y-y_0|<\delta$, $y\in[c,d]$, то заключаем, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0.

2. Пусть $\alpha(y_0)=\beta(y_0)$.

В этом случае $I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=0$; $I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ $\Rightarrow$

$$|I(y)|\le M\cdot[\beta(y)-\alpha(y)]. \tag{3}$$

Имеем $\lim\limits_{y\to y_0}[\beta(y)-\alpha(y)]=\beta(y_0)-\alpha(y_0)=0$. А тогда из (3) $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=0$ $[=I(y_0)]$. Видим, что и в этом случае установлена непрерывность $I(y)$ в точке y_0.

У нас y_0 – любое из $[c,d]$. Следовательно, $I(y)\in C([c,d])$. ◄

Теорема (о дифференцировании по параметру). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $(\overline{D})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$.

Пусть функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ определены в промежутке $[c,d]$ и имеют там производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$. Пусть $I(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Тогда для любого $y\in[c,d]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx+f\big(\beta(y),y\big)\cdot\beta'(y)-f\big(\alpha(y),y\big)\cdot\alpha'(y). \qquad (4)$$

▶ Выберем и закрепим любое $y_0\in[c,d]$.

I. Пусть $\alpha(y_0)<\beta(y_0)$. При доказательстве предыдущей теоремы было отмечено, что в этом случае существует окрестность: $u_{\delta_1}(y_0)$ такая, что для любого $y\in u_{\delta_1}(y_0)$ будет: $\alpha(y)<\gamma<\beta(y)$. Дадим y_0 приращение Δy – любое, но такое, что $\Delta y\neq 0$ и $y_0+\Delta y\in u_{\delta_1}(y_0)$. Будем иметь, следовательно, $\alpha(y_0+\Delta y)<\gamma<\beta(y_0+\Delta y)$. Положим $p=\max\{\alpha(y_0),\alpha(y_0+\Delta y)\}$; $q=\min\{\beta(y_0),\beta(y_0+\Delta y)\}$. Могут реализоваться следующие случаи:

1) $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0)$;
2) $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0+\Delta y)$;
3) $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0)$;
4) $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0+\Delta y)$.

1. Рассмотрим случай, когда $p=\alpha(y_0)$, $q=\beta(y_0)$. Имеем в этом случае

$$I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx, \qquad I(y_0+\Delta y)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx+\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx.$$

А тогда

$$I(y_0+\Delta y)-I(y_0)=$$

$$=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}\big[f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\big]dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx.$$

По теореме Лагранжа $f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)=f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y$. По частному случаю теоремы о среднем для определенного интеграла

$$\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\big[\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\big],$$

где $c_1 \in [\beta(y_0), \beta(y_0+\Delta y)] \;\Rightarrow\; c_1 \to \beta(y_0)$, если $\Delta y \to 0$;

$$\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx = f(c_2, y_0+\Delta y)\cdot[\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)],$$

где $c_2 \in [\alpha(y_0), \alpha(y_0+\Delta y)] \;\Rightarrow\; c_2 \to \alpha(y_0)$, если $\Delta y \to 0$. Следовательно,

$$\frac{J(y_0+\Delta y)-J(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)\,dx +$$

$$+f(c_1, y_0+\Delta y)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0+\Delta y)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y}.$$

Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, получаем:

$$I'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\,dx + f\big(\beta(y_0), y_0\big)\cdot\beta'(y_0) - f\big(\alpha(y_0), y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

2. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0+\Delta y)$.

В этом случае

$$I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} [f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)]\,dx +$$

$$+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y\cdot dx +$$

$$+f(c_1, y_0)\cdot[\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)] - f(c_2, y_0+\Delta y)\cdot[\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)]$$

$$\Rightarrow\; \frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)\,dx +$$

$$+f(c_1, y_0)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0+\Delta y)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y \to 0$, находим

$$I'(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx+f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0)-f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

3. Рассмотрим случай, когда $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0)$.

В этом случае

$$I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx+\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y)-I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)}\big[f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\big]dx+$$

$$+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y\cdot dx+$$

$$+f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\big[\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\big]-f(c_2,y_0)\cdot\big[\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)\big]$$

$$\Rightarrow\ \frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx+$$

$$+f(c_1,y_0+\Delta y)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y}-f(c_2,y_0)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y}$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y\to 0$, получим

$$I'(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx+f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0)-f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \quad (5)$$

4. Рассмотрим случай, когда $p=\alpha(y_0+\Delta y)$, $q=\beta(y_0+\Delta y)$.

В этом случае

$$I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx+\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx+\int\limits_{\beta(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx;$$

$$I(y_0+\Delta y)-I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)}\big[f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\big]dx+$$

$$+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x,y_0)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y\cdot dx+$$

$$+f(c_1,y_0)\cdot\left[\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\right]-f(c_2,y_0)\cdot\left[\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)\right]$$

$$\Rightarrow\ \frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx+$$

$$+f(c_1,y_0)\cdot\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y}-f(c_2,y_0)\cdot\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y\to 0$, находим

$$I'(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx+f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0)-f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \qquad (5)$$

II. Пусть $\alpha(y_0)=\beta(y_0)$.

В этом случае $I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=0$ (как интеграл, у которого совпадают нижний и верхний пределы интегрирования); $I(y_0+\Delta y)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx$. А тогда

$$I(y_0+\Delta y)-I(y_0)=\int\limits_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx=$$

$$=f(c,y_0+\Delta y)\cdot\left[\beta(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0+\Delta y)\right].$$

Здесь $\alpha(y_0+\Delta y)\le c\le\beta(y_0+\Delta y)\ \Rightarrow\ c\xrightarrow[\Delta y\to 0]{}\alpha(y_0)\ \left[=\beta(y_0)\right]$. Имеем

$$\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=$$

$$=f(c,y_0+\Delta y)\cdot\frac{\big(\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)\big)-\big(\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)\big)}{\Delta y}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y\to 0$, находим:

$$I'(y_0)=f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\left[\beta'(y_0)-\alpha'(y_0)\right]=f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\left[\beta'(y_0)-\alpha'(y_0)\right],$$

ибо $\alpha(y_0)=\beta(y_0)$. Последняя формула может быть записана также в виде

$$I'(y_0)=f\big(\beta(y_0),y_0\big)\cdot\beta'(y_0)-f\big(\alpha(y_0),y_0\big)\cdot\alpha'(y_0). \qquad (6)$$

Легко видеть, что формула (6) является частным случаем формулы (5) (она получается из (5), если положить в (5) $\beta(y_0)=\alpha(y_0)$).

Так как у нас y_0 – любое, принадлежащее $[c,d]$, то приходим к выводу, что $I'(y)$ существует для любого $y\in[c,d]$ и что

$$I'(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx+f\big(\beta(y),y\big)\cdot\beta'(y)-f\big(\alpha(y),y\big)\cdot\alpha'(y).\ \blacktriangleleft$$

§7. Примеры к главе 1

1. Дано: $I(y)=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$. Найти $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

$\blacktriangleright$ Так как подынтегральная функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна на всей плоскости Oxy, то она непрерывна, в частности, в прямоугольнике $(\overline{P})=\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -d\le y\le d,\end{cases}$ где $d>0$ – любое конечное число. По теореме §2 заключаем, что допустим предельный переход по параметру под знаком интеграла, когда $y\to 0$. Имеем

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}-x\,dx+\int\limits_{0}^{1}x\,dx=-\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\ \blacktriangleleft$$

2. Дано: $I(y)=\int\limits_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$. Найти $\lim\limits_{y\to 0} I(y)$.

$\blacktriangleright$ Здесь подынтегральная функция $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$. Она непрерывна на всей плоскости Oxy. Функции $\alpha(y)=y$, $\beta(y)=1+y$ непрерывны для всех $y\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, в частности, $f(x,y)$ непрерывна в области $(\overline{D})=\begin{cases}y\le x\le 1+y,\\ -d\le y\le d,\end{cases}$ где $d>0$ – любое конечное число, а функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ непрерывны на промежутке $[-d,d]$. Видим, что выполнены условия теоремы о непрерывности интеграла как функции параметра (см. §6). По этой теореме $I(y)\in C\big([-d,d]\big)$, а значит, $I(y)$ непрерывна в точке $y=0$. Следовательно, $\lim\limits_{y\to 0} I(y)=I(0)$, т. е.

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_y^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\ ◀$$

3. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ ($a>0$, $b>0$), применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла.

▶ Отметим прежде всего, что данный интеграл – несобственный, Подынтегральная функция имеет две особые точки. Это – точки $x=0$ и $x=1$. Имеем:

1) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0$ $\Rightarrow$ подынтегральная функция в правой полуокрестности точки $x=0$ – ограниченная.

2) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{1/x}=\lim\limits_{x\to 1-0}(bx^b-ax^a)=b-a$ – определенное число. $\Rightarrow$ подынтегральная функция в левой полуокрестности точки $x=1$ – ограниченная.

Положим

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}, & x\in(0,1);\\ 0, & x=0;\\ b-a, & x=1.\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{f}(x)\in C\big([0,1]\big)$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}(x)\in R\big([0,1]\big)$, а значит, данный интеграл $\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ сходится.

Введем в рассмотрение интеграл $I(x)=\int\limits_a^b x^y dy$ ($a>0$, $b>0$), $x\in[0,1]$.

Этот интеграл представляет собой функцию параметра x, определенную в промежутке $[0,1]$. Здесь $f(x,y)=x^y$ определена и непрерывна в прямоугольнике $(\overline{P})=\begin{cases}a\le y\le b,\\ 0\le x\le 1.\end{cases}$ А тогда по теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §5) имеем:

$$\int\limits_0^1 I(x)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_a^b x^y dy\right)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy.$$

Так как $I(x)=\int\limits_a^b x^y dy=\left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_{y=a}^{y=b}=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, то предыдущее равенство примет вид:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^1 x^y dx\right)dy \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int\limits_a^b\left.\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)\right|_{x=0}^{x=1}dy=\int\limits_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln(y+1)\Big|_{y=a}^{y=b}=\ln\frac{b+1}{a+1}. ◄$$

4. Вычислить $I'(y)$, если $I(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{-yx^2}dx$.

► Здесь $f(x,y)=e^{-yx^2}$, $\alpha(y)=y$, $\beta(y)=y^2$; $\alpha(y)\le\beta(y)$, если $y\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$; $\alpha(y)\ge\beta(y)$, если $y\in[0,1]$. Пусть $d_1>0$ – любое конечное число; $d_2>1$ – любое конечное число. Введем в рассмотрение области

$$(\overline{D_1})=\begin{cases}-d_1\le y\le 0,\\ y\le x\le y^2;\end{cases}\qquad (\overline{D_2})=\begin{cases}0\le y\le 1,\\ y^2\le x\le y;\end{cases}\qquad (\overline{D_3})=\begin{cases}1\le y\le d_2,\\ y\le x\le y^2.\end{cases}$$

В каждой из этих трех областей $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную $f'_y(x,y)=-x^2e^{-yx^2}$.

В каждом из промежутков: $[-d_1,0]$; $[0,1]$; $[1,d_2]$ существуют $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, причем $\alpha'(y)=1$, $\beta'(y)=2y$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) заключаем, что для любого $y\in\big([-d_1,0]\cup[1,d_2]\big)$ $I'(y)$ существует и $I'(y)=-\int\limits_y^{y^2}x^2e^{-yx^2}dx+e^{-y^5}\cdot 2y-e^{-y^3}$.

Пусть теперь y – любое из промежутка $[0,1]$. Имеем $I(y)=-\tilde{I}(y)$, где $\tilde{I}(y)=\int\limits_{y^2}^{y}e^{-yx^2}dx$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) для любого $y\in[0,1]$ $\tilde{I}'(y)$ существует и $\tilde{I}'(y)=-\int\limits_{y^2}^{y}x^2e^{-yx^2}dx+e^{-y^3}-e^{-y^5}\cdot 2y$.

Следовательно, для любого $y\in[0,1]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y) = -\widetilde{I}\,'(y), \text{ т. е. } I'(y) = \int_{y^2}^{y} x^2 e^{-yx^2}\,dx + e^{-y^5}\cdot 2y - e^{-y^3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I'(y) = -\int_{y}^{y^2} x^2 e^{-yx^2}\,dx + e^{-y^5}\cdot 2y - e^{-y^3}, \quad y\in[0,1].$$

Глава 2. Двойные интегралы

§1. Область и ее диаметр

Предварительно напомним некоторые сведения, относящиеся к понятию кривой на плоскости.

1. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – две функции, определенные и непрерывные на промежутке $[a,b]$, то множество точек плоскости $\{(\varphi(t),\psi(t))\}$, $t\in[a,b]$, называется *непрерывной кривой*.

2. Если $\varphi(a)=\varphi(b)$ и $\psi(a)=\psi(b)$, то непрерывная кривая называется *замкнутой*.

3. Замкнутая кривая называется *самонепересекающейся*, если две точки кривой $(\varphi(u),\psi(u))$ и $(\varphi(v),\psi(v))$ при $u<v$ могут совпасть лишь тогда, когда $u=a$, $v=b$.

4. Замкнутая самонепересекающаяся кривая (K) делит плоскость на два *связных* множества (D) и (G). (Любые две точки каждого их этих множеств можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей (K). Если же одна из этих точек принадлежит (D), а другая – принадлежит (G), то всякая соединяющая их непрерывная кривая пересекает (K).) Точки, лежащие на (K), не входят ни в (D), ни в (G). Одно из множеств (D), (G) является ограниченным, а другое – нет. То из этих двух множеств, которое является ограниченным, будем называть *областью*, ограниченной контуром (K). (У нас на рис. 2.1 (D) – область, ограниченная контуром (K).) Если к точками области (D) присоединить точки контура (K), то полученное множество будем называть *замкну-*

той областью, ограниченной контуром (K), и обозначать через $(\overline{D})$. Отметим, что замкнутая область $(\overline{D})$ есть ограниченное замкнутое множество.

Определение. Пусть $(\overline{D})$ – замкнутая область, ограниченная контуром (K). Пусть M и N – любые две точки, лежащие на (K). Пусть $\rho(M,N)$ – расстояние между точками M и N. Число $d = \sup\limits_{\substack{M\in(K)\\ N\in(K)}} \{\rho(M,N)\}$ называется *диаметром* $(\overline{D})$.

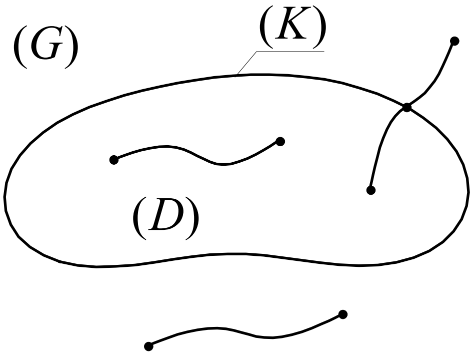


Рис. 2.1. К определению понятия области

Теорема. На контуре (K) существуют две точки M_0 и N_0 такие, что $\rho(M_0,N_0)=d$.

▶ Возьмем на контуре (K) точки M и N. Пусть $M=\big(\varphi(u),\psi(u)\big)$, $N=\big(\varphi(v),\psi(v)\big)$. Тогда $\rho(M,N)=\sqrt{\big[\varphi(v)-\varphi(u)\big]^2+\big[\psi(v)-\psi(u)\big]^2}$. Видим, что $\rho(M,N)$ есть функция аргументов u,v, определенная в квадрате $(\overline{P})=\begin{cases} a\le u\le b,\\ a\le v\le b,\end{cases}$ и, очевидно, непрерывная в $(\overline{P})$. По второй теореме Вейерштрасса существует точка $(u_0,v_0)\in(\overline{P})$, в которой эта функция принимает свое наибольшее значение. Остается только положить $M_0=\big(\varphi(u_0),\psi(u_0)\big)$, $N_0=\big(\varphi(v_0),\psi(v_0)\big)$. ◀

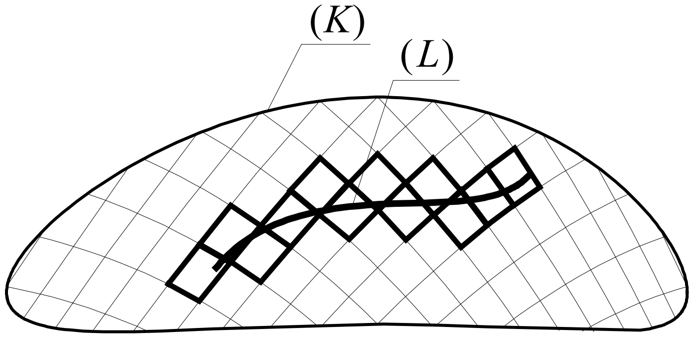


Рис. 2.2. К обобщенной теореме о простой кривой

В главе 3 (см. §1) учебного пособия [4] дано определение площади области $(\overline{D})$, установлено необходимое и достаточное условие квадрируемости этой области. Там же введено понятие простой кривой и доказана теорема о простой кривой. Следствием этой теоремы явилось утверждение, что область $(\overline{D})$, ограниченная простым контуром, квадрируема. Отметим здесь, что *теорема о простой кривой* допускает *обобщение*, а именно:

Обобщенная теорема о простой кривой. Пусть (L) – простая кривая, расположенная в области (D), ограниченной простым контуром (K). Разделим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k=1,2,\dots,n$. Пусть

Q – сумма площадей тех частичных областей $(\overline{D}_k)$, которые имеют с (L) хотя бы одну общую точку. Тогда, если λ – наибольший из диаметров частичных областей $(\overline{D}_k)$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} Q = 0$.

§2. Определение двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной простым контуром (K). Проделаем следующие операции.

1. Дробим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на n частичных областей $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, …, $(\overline{D}_n)$. Пусть площади этих частичных областей есть соответственно $F_1, F_2, \ldots, F_n$, а диаметры – $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,\, n}}\{d_k\}$ (λ – ранг дробления).

2. В каждой частичной области $(\overline{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k) и находим в ней значения функции f, т. е. находим $f(x_k, y_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на площадь соответствующей частичной области: $f(x_k, y_k)\cdot F_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot F_k .$$

Сумму σ будем называть *интегральной суммой Римана*. Отметим, что σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, так и от выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит ни от способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, ни от выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, то его называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области $(\overline{D})$ и обозначают символом $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\,dF$ или $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\,dxdy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\,dF = \lim_{\lambda\to 0}\sigma \qquad \left(\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\,dF = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)F_k\right). \tag{1}$$

Замечание. Соотношение $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ означает: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что для любого способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, будет: $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы ни были при этом выбраны точки (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$.

Если у функции $f(x, y)$, определенной в $(\overline{D})$, существует $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\, dF$, то будем говорить, что $f(x, y)$ *интегрируема в* $(\overline{D})$ и писать $f(x, y) \in R(\overline{D})$ ($f(x, y)$ принадлежит классу R в области $(\overline{D})$).

Установим теперь необходимое условие интегрируемости функции $f(x, y)$ в области $(\overline{D})$.

Теорема (об ограниченности функции $f(x, y)$, интегрируемой в $(\overline{D})$. Если функция $f(x, y) \in R(\overline{D})$, то $f(x, y)$ – ограниченная в области $(\overline{D})$.

▶ По условию $f(x, y) \in R(\overline{D})$. Пусть $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\, dxdy$. Но тогда любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$. В частности, числу $\varepsilon = 1$ (> 0) будет отвечать $\tilde{\delta} > 0$ такое, что для любого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < 1$.

Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, и закрепим его. (Тогда F_k, $k = \overline{1, n}$, будут определенными числами.) Для такого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$ будем иметь $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot F_k - I \right| < 1$.

Теперь выберем и закрепим точки (x_2, y_2), (x_3, y_3), … , (x_n, y_n) соответственно в областях $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, …, $(\overline{D}_n)$ (тогда $f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3)$, … , $f(x_n, y_n)$ будут определенными числами). Точку (x_1, y_1) оставим свободной в $(\overline{D}_1)$ (т. е. точка (x_1, y_1) может занимать любое положение в области $(\overline{D}_1)$). Будем иметь при любом положении точки (x_1, y_1) в $(\overline{D}_1)$:

$$\left| f(x_1, y_1) \cdot F_1 + \sum_{k=2}^{n} f(x_k, y_k) \cdot F_k - I \right| < 1.$$

Положим $I-\sum_{k=2}^{n} f(x_k,y_k)\cdot F_k = C$ (C – определенное число, не зависящее от выбора точки (x_1,y_1)). Предыдущее неравенство запишется теперь так:

$$\left|f(x_1,y_1)\cdot F_1 - C\right| < 1,\ \text{точка } (x_1,y_1)\in(\overline{D}_1).$$

Имеем:

$$f(x_1,y_1)\cdot F_1 = \left(f(x_1,y_1)\cdot F_1 - C\right) + C \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \left|f(x_1,y_1)\cdot F_1\right| \le \left|f(x_1,y_1)\cdot F_1 - C\right| + |C| \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \left|f(x_1,y_1)\cdot F_1\right| < 1 + |C| \ \Rightarrow\ \left|f(x_1,y_1)\right| < \frac{1+|C|}{F_1}.$$

Так как последнее неравенство верно для любого положения точки (x_1,y_1) в $(\overline{D}_1)$, то заключаем, что функция $f(x,y)$ – ограниченная в $(\overline{D}_1)$. Совершенно аналогично устанавливается ограниченность функции $f(x,y)$ в областях $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, …, $(\overline{D}_n)$.

Положим

$$M_1 = \sup_{(\overline{D}_1)}\left\{\left|f(x,y)\right|\right\},\ M_2 = \sup_{(\overline{D}_2)}\left\{\left|f(x,y)\right|\right\},\ \dots,\ M_n = \sup_{(\overline{D}_n)}\left\{\left|f(x,y)\right|\right\}.$$

Пусть $M=\max\left\{M_1, M_2, \dots, M_n\right\}$. Тогда $\left|f(x,y)\right|\le M$ для любой точки (x,y) из $(\overline{D})$. А это и означает, что $f(x,y)$ – ограниченная в $(\overline{D})$. ◄

Замечание. Доказанная теорема необратима, т. е. не всякая функция $f(x,y)$, заданная в $(\overline{D})$ и ограниченная там, оказывается интегрируемой в $(\overline{D})$. Следовательно, ограниченность функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$ является лишь необходимым условием интегрируемости этой функции в $(\overline{D})$.

§3. Признаки интегрируемости функций

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной простым контуром.

На вопрос, существует или не существует $\iint_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$, ответить, пользуясь непосредственным определением двойного интеграла, удается сравнительно легко лишь в отдельных частных случаях. В связи с этим оказывается важным установление признаков интегрируемости функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$. Но признаки интегрируемости $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ содержат понятия верхней и нижней сумм Дарбу. Поэтому необходимо ввести эти понятия.

Итак, пусть $f(x, y)$ – ограниченная функция, определенная в области $(\overline{D})$. Разложим $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D_k})$, $k = \overline{1, n}$, и положим $M_k = \sup\limits_{(\overline{D_k})}\{f(x, y)\}$; $m_k = \inf\limits_{(\overline{D_k})}\{f(x, y)\}$. Отметим, что числа m_k и M_k, $k = \overline{1, n}$, существуют, ибо множество $\{f(x, y)\}$, $(x, y) \in (\overline{D_k})$ – ограниченное и сверху, и снизу. Составим суммы $s = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k F_k$ и $S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k F_k$. Эти суммы называют соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*, отвечающими данному способу разбиения области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D_k})$.

Отметим, что для закрепленного способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D_k})$ суммы s и S – определенные числа. Если же способ разбиения изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S. Отметим далее, что интегральные суммы Римана σ даже для закрепленного способа дробления $(\overline{D})$ на части $(\overline{D_k})$ принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений (за счет различного выбора точек (x_k, y_k) в $(\overline{D_k})$.

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами.

1. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{D})$. Тогда для любой интегральной суммы Римана σ из $\{\sigma\}$ будет: $s \le \sigma \le S$.

2. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\overline{D})$. Тогда $s = \inf\{\sigma\}$, $S = \sup\{\sigma\}$.

3. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие какому-нибудь способу дробления области $(\overline{D})$. Добавим теперь еще одну простую кривую дробления (все прежние кривые дробления сохраняются). В результате у нас получится некоторый новый способ дробления области $(\overline{D})$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу дробления области $(\overline{D})$. Справедливо утверждение, что $\tilde{S} \le S$, $\tilde{s} \ge s$, т. е. что от добавления новых кривых дробления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

4. Выше было отмечено, что для закрепленного способа дробления области $(\overline{D})$ нижняя и верхняя суммы Дарбу s и S суть определенные числа. Если же способ дробления области $(\overline{D})$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа

s и S. Следовательно, как s, так и S принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений.

Пусть $\{s\}$ – множество значений, принимаемых нижней суммой Дарбу, $\{S\}$ – множество значений, принимаемых верхней суммой Дарбу. Справедливо утверждение:

Всякая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу, т. е. для всякой s из $\{s\}$ и для любой S из $\{S\}$ оказывается

$$s \le S .$$

Видим, что перечисленные здесь свойства сумм Дарбу являются дословным повторением аналогичных свойств сумм Дарбу, установленных для функций $f(x)$, заданных на промежутке $[a,b]$ (см. главу 1, §2 учебного пособия [4]) Следует отметить, что и доказательства этих свойств совершенно аналогичны прежним.

Приступим теперь к установлению признаков интегрируемости.

Теорема 1 (основной признак интегрируемости). Пусть функция $f(x,y)$ – ограниченная, заданная в области $(\overline{D})$. Для того, чтобы $f(x,y)\in R(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы было $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$ (разности $S-s$ составляются каждый раз из чисел s и S, отвечающих одному и тому же способу дробления области $(\overline{D})$).

▶ *Необходимость.* Дано: $f(x,y)\in R(\overline{D})$, $I=\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$. Доказать: $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$.

Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. По условию $f(x,y)\in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda<\delta$, для каждой σ из множества $\{\sigma\}$, отвечающих этому способу разбиения, будет $|\sigma-I|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Выберем и закрепим какой-нибудь способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda<\delta$. Будем иметь $|\sigma-I|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, для любой σ из $\{\sigma\}$ (здесь $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$), или, что то же самое,

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma<I+\frac{\varepsilon}{3},\quad \sigma\in\{\sigma\}. \tag{1}$$

1) Из соотношения (1) имеем, в частности, $\sigma<I+\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\sigma\in\{\sigma\}$ $\Rightarrow$ $I+\dfrac{\varepsilon}{3}$ – верхняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $S=\sup\{\sigma\}$. Поэтому

$$S \le I + \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$
(S – верхняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$).

2) Из соотношения (1) имеем также $\sigma > I - \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\}$ $\Rightarrow$ $I - \frac{\varepsilon}{3}$ – нижняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $s = \inf\{\sigma\}$. Поэтому
$$s \ge I - \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$
(s – нижняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $(\overline{D})$).

Из соотношений (2) и (3) следует, что
$$0 \le S - s \le \frac{2}{3}\varepsilon.$$
Тогда $0 \le S - s < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $|S - s| < \varepsilon$. Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Следовательно,
$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0.$$

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. Доказать: $f(x, y) \in R(\overline{D})$.

По условию, $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. Это означает, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, оказывается $|S - s| < \varepsilon$, или $S - s < \varepsilon$ (так как $S - s \ge 0$). Рассмотрим множества $\{s\}$ и $\{S\}$. Выберем и закрепим любую S и $\{S\}$. Обозначим ее через S_0. По свойству 4) сумм Дарбу, имеем $s \le S_0$, $s \in \{s\}$. Это означает, что $\{s\}$ ограничено сверху. Но тогда, как мы знаем, существует $\sup\{s\}$. Пусть $A = \sup\{s\}$ (A – определенное число). Ясно, что $s \le A$, $s \in \{s\}$. Ясно далее, что $A \le S_0$ (так как A – точная верхняя граница $\{s\}$, а S_0 – просто верхняя граница этого множества). У нас S_0 – любая из $\{S\}$. Следовательно, $A \le S$, $S \in \{S\}$. Таким образом, получили
$$s \le A \le S. \tag{4}$$
Отметим, что в соотношении (4) s и S могут отвечать как различным, так и одному и тому же способу разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому способу разбиения $(\overline{D})$, а s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу. Одновременно будут иметь место соотношения
$$s \le \sigma \le S, \quad \sigma \in \{\sigma\}; \quad s \le A \le S.$$

Тогда $-(S-s)\le\sigma-A\le(S-s)$, $\sigma\in\{\sigma\}$ или $|\sigma-A|\le(S-s)$, $\sigma\in\{\sigma\}$. Если брать любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части, у которого $\lambda<\delta$, то будет $S-s<\varepsilon$, а значит,

$$|\sigma-A|<\varepsilon,\quad \sigma\in\{\sigma\}.$$

Последнее означает, что $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma \;\Rightarrow\; f(x,y)\in R(\overline{D})$. ◀

Замечание. Имеем

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}M_kF_k-\sum_{k=1}^{n}m_kF_k=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)F_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_kF_k.$$

Здесь $\omega_k=M_k-m_k$ – колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D}_k)$. Теперь основной признак интегрируемости может быть сформулирован так.

Пусть функция $f(x,y)$ – ограниченная, заданная в области $(\overline{D})$. Для того, чтобы $f(x,y)\in R(\overline{D})$, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon>0$ отвечало $\delta>0$ такое, что для любого способа разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda<\delta$, было бы

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_kF_k<\varepsilon.$$

Теорема 2. Если $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $f(x,y)\in R(\overline{D})$ (т. е. если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{D})$, то $\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dxdy$ существует).

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. По условию $f(x,y)\in C(\overline{D})$. Так как $(\overline{D})$ – ограниченное замкнутое множество, то по теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{D})$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любого разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, у которого $\lambda<\delta$, будет $\omega_k<\dfrac{\varepsilon}{F}$ одновременно для всех $k=\overline{1,n}$ (см. следствие из теоремы Кантора; здесь F – площадь области $(\overline{D})$). Возьмем любой способ разбиения $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ ($k=\overline{1,n}$), у которого $\lambda<\delta$. Будем иметь для такого способа разбиения $(\overline{D})$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_kF_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{F}\cdot F_k=\frac{\varepsilon}{F}\sum_{k=1}^{n}F_k=\frac{\varepsilon}{F}\cdot F=\varepsilon.$$

Неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_kF_k<\varepsilon$ получено нами лишь в предположении, что $\lambda<\delta$. Последнее означает, что $f(x,y)\in R(\overline{D})$. ◀

Теорема 3. Пусть ограниченная функция $f(x, y)$ задана в области $(\overline{D})$ и непрерывна там всюду, за исключением множества точек, лежащих на конечном числе простых кривых. Тогда $f(x, y) \in R(\overline{D})$.

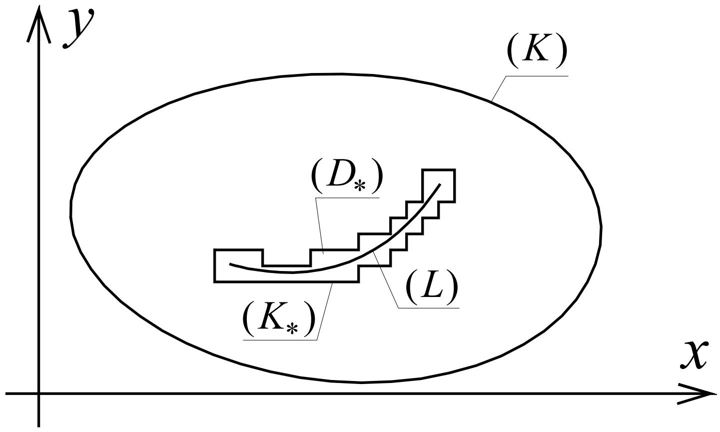


Рис. 2.3. К доказательству теоремы 3

▶ Пусть для определенности у функции $f(x, y)$ в $(\overline{D})$ имеется лишь одна линия разрыва (L). Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По теореме о простой кривой линию (L) можно заключить внутрь многоугольной области (D_*), площадь которой меньше ε.

Контур (K_*) области (D_*) есть замкнутая ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. (L) и (K_*) не пересекаются.

Пусть $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ – область, остающаяся после удаления (D_*) из $(\overline{D})$. (Контур (K_*) причисляем к области $(\overline{D}) \setminus (D_*)$). Ясно, что $f(x, y)$ – непрерывна в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$.

Так как $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ – ограниченное замкнутое множество, то $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых двух точек (x', y'); (x'', y'') из $(\overline{D}) \setminus (D_*)$, для которых $\rho\big((x', y'); (x'', y'')\big) < \delta$ будет $\left| f(x'', y'') - f(x', y') \right| < \varepsilon$.

Контур (K_*) есть простая кривая. По обобщенной теореме о простой кривой, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$ такое, что для любого способа дробления, у которого $\lambda < \delta_2$, сумма площадей тех частичных областей, которые задевают (K_*), будет меньше ε.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Разобьем область $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D_k})$, $k = \overline{1, n}$, так, чтобы оказалось $\lambda < \delta$ и составим разность сумм Дарбу $S - s = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot F_k$.

Из областей $(\overline{D_1})$, $(\overline{D_2})$, … , $(\overline{D_n})$ образуем три группы.

В группу I отнесем те из $(\overline{D_k})$, $k = \overline{1, n}$, которые лежат в $(\overline{D}) \setminus (D_*)$ и не задевают контура (K_*).

В группу II отнесем те из $(\overline{D}_k)$, $k=\overline{1,n}$, которые лежат в (D_*) и не задевают контура (K_*).

В группу III отнесем те $(\overline{D}_k)$, которые задевают контур (K_*).

Тогда и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k F_k$ разобьется на три суммы $\sum_{\mathrm{I}}$, $\sum_{\mathrm{II}}$, $\sum_{\mathrm{III}}$. В сумме $\sum_{\mathrm{I}}$ будет $\omega_k<\varepsilon$ и поэтому $\sum_{\mathrm{I}}\omega_k F_k<\varepsilon\cdot F$. В суммах $\sum_{\mathrm{II}}$ и $\sum_{\mathrm{III}}$ будет $\omega_k\le\Omega$, где Ω – колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ (число Ω существует, ибо $f(x,y)$ – ограниченная в $(\overline{D})$). Так как суммы площадей областей $(\overline{D}_k)$, попавших в группу II и в группу III меньше ε, то будем иметь:

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}}\omega_k F_k\le\Omega\cdot\sum\nolimits_{\mathrm{II}}F_k<\Omega\cdot\varepsilon,$$
$$\sum\nolimits_{\mathrm{III}}\omega_k F_k\le\Omega\cdot\sum\nolimits_{\mathrm{III}}F_k<\Omega\cdot\varepsilon.$$

А тогда

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}\omega_k F_k<\varepsilon(F+2\Omega) \qquad (5)$$

(число $\varepsilon(F+2\Omega)$ сколь угодно мало вместе с ε).

Так как для достижения неравенства (5) нам потребовалось лишь чтобы было $\lambda<\delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s)=0$, а это означает, что $f(x,y)\in R(\overline{D})$.

§4 Свойства двойных интегралов

1°. $\iint\limits_{(\overline{D})}dF=F$ (F – площадь области $(\overline{D})$).

▶ В самом деле, здесь $f(x,y)\equiv 1$ всюду в $(\overline{D})$. Поэтому, взяв любое разбиение области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$, $k=\overline{1,n}$, и выбрав произвольно точки (x_k,y_k) в $(\overline{D}_k)$, будем иметь $f(x_1,y_1)=1$; $f(x_2,y_2)=1$, $f(x_3,y_3)=1$, … , $f(x_n,y_n)=1$. Следовательно,

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot F_k=\sum_{k=1}^{n}1\cdot F_k=\sum_{k=1}^{n}F_k=F \quad\Rightarrow\quad \lim_{\lambda\to 0}\sigma=F. \blacktriangleleft$$

2°. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и α – произвольное число, то $\alpha f(x,y)\in R(\overline{D})$, причем $\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF=\alpha\cdot\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF$.

▶ Возьмем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ и составим интегральную сумму Римана для функции $\alpha f(x,y)$. Будем иметь

$$\sigma(\alpha f)=\sum_{k=1}^{n}\alpha f(x_k,y_k)F_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)F_k=\alpha\cdot\sigma(F).$$

По условию, $f(x,y)\in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ существует, конечный и равный $\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)=\alpha\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)=\alpha\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF$, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)$ существует, конечный $\Rightarrow$ $\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF$ существует, причем

$$\iint\limits_{(\overline{D})}\alpha f(x,y)\,dF=\alpha\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF.$$ ◀

3°. Если $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $g(x,y)\in R(\overline{D})$, то $\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)\in R(\overline{D})$, причем

$$\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF=\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF\pm\iint\limits_{(\overline{D})}g(x,y)\,dF.$$

▶ Берем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$ и составляем интегральную сумму Римана для функции $f(x,y)\pm g(x,y)$. Будем иметь

$$\sigma(f\pm g)=\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k,y_k)\pm g(x_k,y_k)\big)F_k=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)F_k\pm\sum_{k=1}^{n}g(x_k,y_k)F_k=$$
$$=\sigma(f)\pm\sigma(g).$$

По условию $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $g(x,y)\in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ существуют конечные $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(g)$. Но тогда существует конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)$, причем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)\pm\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(g)$ $\Rightarrow$ $\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF$ существует, причем $\iint\limits_{(\overline{D})}\big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dF=\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF\pm\iint\limits_{(\overline{D})}g(x,y)\,dF$. ◀

4°. Пусть $f(x,y)\in R(\overline{D})$. Если изменить значения функции $f(x,y)$ вдоль какой-нибудь простой кривой (L) (с тем лишь условием, чтобы и измененная функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в $(\overline{D})$ и ее двойной интеграл по области $(\overline{D})$ равен $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$.

▶ Если составить интегральные суммы Римана для измененной и исходной функций, то они могут разниться лишь теми слагаемыми, которые относятся к областям $(\overline{D}_k)$, задевающим кривую (L). Но, по обобщенной теореме о простой кривой, общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$, откуда уже легко заключить, что обе интегральные суммы стремятся к общему пределу, т. е. к $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF$.

Таким образом, существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. ◀

5°. Если область $(\overline{D})$, в которой задана функция $f(x,y)$, разложена простой кривой (L) на две области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$, то из интегрируемости функции $f(x,y)$ во всей области $(\overline{D})$ следует ее интегрируемость в областях $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$, и обратно – из интегрируемости функции $f(x,y)$ в обеих областях $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$ вытекает ее интегрируемость в области $(\overline{D})$. При этом

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_2)} f(x,y)\,dF. \tag{1}$$

▶ Разложим области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$ произвольными сетями простых кривых на части; тем самым и $(\overline{D})$ разложится на части $(\overline{D}_1), (\overline{D}_2), \ldots, (\overline{D}_n)$. Если значком k' отметить частичные области, содержащиеся в $(\overline{D}_1)$, а значком k'' – частичные области, содержащиеся в $(\overline{D}_2)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k F_k = \sum \omega_{k'} F_{k'} + \sum \omega_{k''} F_{k''}.$$

1) Пусть функция $f(x,y) \in R(\overline{D})$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k F_k = 0$, а, следовательно, и подавно $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum \omega_{k'} F_{k'} = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum \omega_{k''} F_{k''} = 0$. Последнее означает, что $f(x,y) \in R(\overline{D}_1)$ и $f(x,y) \in R(\overline{D}_2)$.

2) Пусть теперь дано, что функция $f(x,y) \in R(\overline{D}_1)$ и $f(x,y) \in R(\overline{D}_2)$. Но тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum \omega_{k'} F_{k'} = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum \omega_{k''} F_{k''} = 0$, а, следовательно, и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum \omega_k F_k = 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) \in R(\overline{D})$.

Однако нужно помнить, что $\sum_{k=1}^{n}\omega_k F_k$ построена не для произвольного разбиения области $(\overline{D})$ на части: ведь мы исходим из разложения порознь областей $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$. Чтобы от произвольного разложения области $(\overline{D})$ перейти к разложению рассмотренного частного вида, нужно присоединить к линиям деления кривую (L). Тогда соответствующие суммы будут разниться лишь слагаемыми, отвечающими тем частичным областям, которые задевают кривую (L). Но по обобщенной теореме о простой кривой общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$ и, следовательно, соответствующие суммы будут разниться на бесконечно малую величину. Значит, условие интегрируемости функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$ будет выполнено.

Доказываемая формула (1) получается из равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)F_k = \sum f(x_{k'},y_{k'})F_{k'} + \sum f(x_{k''},y_{k''})F_{k''}$$

переходом в нем к пределу при $\lambda \to 0$.

6°. Пусть $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и $g(x,y)\in R(\overline{D})$, и пусть всюду в $(\overline{D})$ выполняется неравенство $f(x,y)\le g(x,y)$. Тогда

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le \iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF .$$

▶ Произвольной сетью простых кривых разобьем $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_k)$. В каждой частичной области $(\overline{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k,y_k). Ясно, что $f(x_k,y_k)\le g(x_k,y_k)$, $k=\overline{1,n}$. Умножим обе части этого неравенства на F_k ($F_k>0$). Получим $f(x_k,y_k)F_k \le g(x_k,y_k)F_k$. Просуммируем полученные неравенства по значку k от 1 до n. Будем иметь $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)F_k \le \sum_{k=1}^{n} g(x_k,y_k)F_k$. Переходя здесь к пределу при $\lambda\to 0$, получим

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le \iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF . \blacktriangleleft$$

7°. Пусть $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и пусть всюду в $(\overline{D})$: $m\le f(x,y)\le M$. Тогда $m\cdot F \le \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF \le M\cdot F$.

▶ Это следует из свойств 6°, 2°, 1°. ◀

8°. Теорема о среднем значении. Пусть $f(x,y)\in R(\overline{D})$ и пусть всюду в $(\overline{D})$: $m\le f(x,y)\le M$. Тогда: существует число μ, удовлетворяющее условию $m\le \mu\le M$, такое, что будет $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=\mu\cdot F$.

▶ Выше (см. 7°) установлено, что в этом случае выполняется неравенство $mF\le \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF\le MF$. Разделим все части этого неравенства на F ($F>0$): $m\le \frac{1}{F}\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF\le M$. Обозначим $\frac{1}{F}\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=\mu$ (ясно, что $m\le \mu\le M$). Тогда $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=\mu\cdot F$, а это и требовалось установить. ◀

9°. Частный случай теоремы о среднем значении. Если функция $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то в $(\overline{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ,η) такая, что будет:

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=f(\xi,\eta)\cdot F.$$

▶ По условию $f(x,y)\in C(\overline{D})$ $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $f(x,y)$ достигает в $(\overline{D})$ своего наименьшего m и наибольшего M значений. Так как $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $f(x,y)\in R(\overline{D})$. Тогда по теореме о среднем значении $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=\mu\cdot F$, где $m\le \mu\le M$. Значения m и M функция $f(x,y)$ принимает в $(\overline{D})$. Если же $m<\mu<M$, то по теореме о промежуточном значении для функции $f(x,y)\in C(\overline{D})$ заключаем: в области $(\overline{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ,η) такая, что будет $f(\xi,\eta)=\mu$, а значит, и в этом случае

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF=f(\xi,\eta)\cdot F. \blacktriangleleft$$

10°. Если функция $f(x,y)\in R(\overline{D})$, то и функция $|f(x,y)|\in R(\overline{D})$, причем

$$\left|\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF\right|\le \iint\limits_{(\overline{D})} |f(x,y)|\,dF.$$

▶ По условию $f(x,y)\in R(\overline{D})$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ – ограниченная в $(\overline{D})$, т. е. существует число $L>0$ такое, что $|f(x,y)|\le L$ в $(\overline{D})$. Последнее означает, что функция $|f(x,y)|$ – ограниченная в $(\overline{D})$. Следовательно, существуют $m=\inf\limits_{(\overline{D})}\{f(x,y)\}$, $M=\sup\limits_{(\overline{D})}\{f(x,y)\}$, $\widetilde{m}=\inf\limits_{(\overline{D})}\{|f(x,y)|\}$, $\widetilde{M}=\sup\limits_{(\overline{D})}\{|f(x,y)|\}$, а значит, существуют $\Omega=M-m$ и $\widetilde{\Omega}=\widetilde{M}-\widetilde{m}$ (Ω – колебание функции $f(x,y)$ в $(\overline{D})$, а $\widetilde{\Omega}$ – колебание $|f(x,y)|$ в $(\overline{D})$). Легко понять, что $\widetilde{\Omega}\le\Omega$.

Возьмем произвольное разбиение области $(\overline{D})$ сетью простых кривых на части $(\overline{D}_k)$, $k=\overline{1,n}$. Пусть ω_k – колебание $f(x,y)$ в $(\overline{D}_k)$, а $\widetilde{\omega}_k$ – колебание $|f(x,y)|$ в $(\overline{D}_k)$. Имеем $0\le\widetilde{\omega}_k\le\omega_k$, $k=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $0\le\widetilde{\omega}_kF_k\le\omega_kF_k$, $k=\overline{1,n}$. Следовательно,

$$0\le\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\omega}_kF_k\le\sum_{k=1}^{n}\omega_kF_k. \qquad (2)$$

Так как $f(x,y)\in R(\overline{D})$, то $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_kF_k=0$. Тогда из (2) заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{\omega}_kF_k=0$. Последнее означает, что $|f(x,y)|\in R(\overline{D})$. Имеем, далее,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)F_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k,y_k)|F_k,$$

т. е. $|\sigma(f)|\le\sigma(|f|)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda\to0$, получим

$$\left|\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dF\right|\le\iint\limits_{(\overline{D})}|f(x,y)|\,dF. \blacktriangleleft$$

§5. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в прямоугольнике $(\overline{P})=\begin{cases} a\le x\le b,\\ c\le y\le d.\end{cases}$

1) Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$, т. е. при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию аргумента y, заданную на промежутке $[c,d]$. Станем обозначать $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\varphi(y)$, $y\in[c,d]$. Допустим теперь, что эта функция $\varphi(y)\in R([c,d])$. Тогда $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ называется *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$.

2) Допустим еще, что при каждом закрепленном x из $[a,b]$ существует $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Ясно, что каждому x из $[a,b]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение интеграла $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Следовательно, $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ представляет собой функцию аргумента x, определенную на промежутке $[a,b]$. Станем обозначать $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\psi(x)$, $x\in[a,b]$. Допустим, что эта функция $\psi(x)\in R([a,b])$. Тогда $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ называется еще одним *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в $(\overline{P})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$ и $I_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то они равны, т. е. $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$.

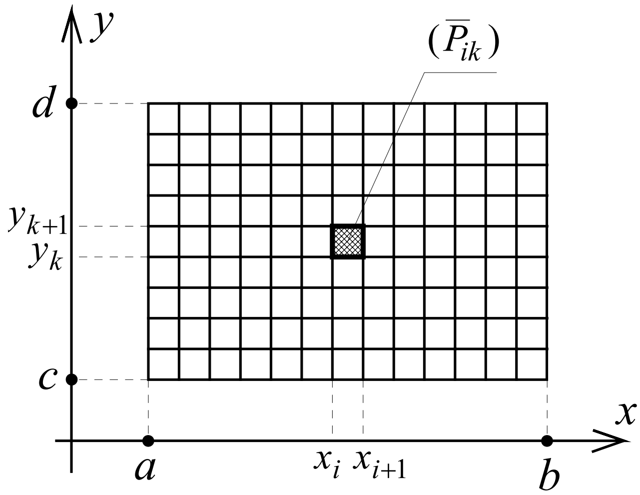


Рис. 2.4. К вычислению двойного интеграла в случае прямоугольной области

▶ Разобьем $(\overline{P})$ отрезками прямых $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$), $y = y_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$, $y_0 = c$, $y_m = d$), на частичные прямоугольники $(\overline{P}_{ik})$, где $(\overline{P}_{ik}) = \begin{cases} x_i \le x \le x_{i+1}, \\ y_k \le y \le y_{k+1}. \end{cases}$ Пусть $m_{ik} = \inf\limits_{(\overline{P}_{ik})} \{ f(x,y) \}$, $M_{ik} = \sup\limits_{(\overline{P}_{ik})} \{ f(x,y) \}$. Значит, если точка $(x,y) \in (\overline{P}_{ik})$, то

$$m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}. \tag{1}$$

Возьмем любое y из $[y_k, y_{k+1}]$ и закрепим его. Сделав это, проинтегрируем неравенство (1) по x от x_i до x_{i+1}. Получим

$$m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \le \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx \le M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \tag{2}$$

Интеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$ существует, так как существует по условию $I_{\text{повт.}}$, а это значит, что при любом закрепленном y из $[c,d]$ $f(x,y) \in R([a,b])$; тем более $f(x,y) \in R([x_i, x_{i+1}])$. Просуммируем неравенства (2) по значку i от 0 до $n-1$

(во всех этих неравенствах считаем y одним и тем же, взятым из $[y_k, y_{k+1}]$). Будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1}-x_i) \le \int_a^b f(x,y)\,dx \le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1}-x_i). \qquad (3)$$

Проинтегрируем неравенство (3) по y от y_k до y_{k+1}. Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k) \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_a^b f(x,y)\,dx \le \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k). \quad (4)$$

Просуммируем неравенства (4) по значку k от 0 до $m-1$. Будем иметь

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)}_{=F_{ik}}}_{=s} \le \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \le$$

$$\le \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k)}_{=F_{ik}}}_{=S} \iff s \le I_{\text{повт.}} \le S.$$

Так как $s \le I_{\text{дв.}} \le S$, то $-(S-s) \le I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} \le (S-s)$, т. е. $\left|I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}}\right| \le S - s$. По условию, $I_{\text{дв.}}$ существует $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S-s) = 0$. Следовательно, $I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} = 0 \Rightarrow I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$. ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается:

Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$, то $I_{\text{дв.}} = \widetilde{I}_{\text{повт.}}$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Пусть $\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$. Тогда функция $\varphi(y) \in C([c,d])$.

▶ Эта теорема была доказана ранее. См. главу 1, §3. О непрерывности интеграла как функции параметра. ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается справедливость утверждения:

Пусть $f(x,y) \in C(\overline{P})$ и пусть $\psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b]$. Тогда функция $\psi(x) \in C([a,b])$.

Следствие. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в $(\overline{P})$, то существуют $I_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

▶ Действительно, в этом случае $\varphi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \in C([c,d])$, а $\psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \in C([a,b])$. Следовательно, $\varphi(y) \in R([c,d])$; $\psi(x) \in R([a,b])$, т. е. $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy = I_{\text{повт.}}$ и $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx = \widetilde{I}_{\text{повт.}}$ существуют. ◀

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то $f(x,y) \in R(\overline{P})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy$.

Таким образом, приходим к **выводу**: если $f(x,y) \in C(\overline{P})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$, $I_{\text{повт.}}$, $\widetilde{I}_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа, получаем, что $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{5}$$

и $I_{\text{дв.}} = \widetilde{I}_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{6}$$

Пример 1. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{P})} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, где $(\overline{P}) = \begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ 1 \le y \le 2. \end{cases}$

▶ По формуле (5) имеем $\iint\limits_{(\overline{P})} \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 dy \int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$. Находим сначала внутренний интеграл:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}\Bigg|_{x=3}^{x=4} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

А тогда

$$\iint_{(\overline{P})} \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy = \ln\frac{y+3}{y+4}\Bigg|_{y=1}^{y=2} = \ln\frac{5}{6} - \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{25}{24}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить $I = \iint_{(\overline{P})} \frac{y\,dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где $(\overline{P}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$

▶ Здесь для вычисления I удобнее воспользоваться формулой (6), т. е. взять внешнее интегрирование по x, а внутреннее – по y. Будем иметь: $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. Находим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

А тогда

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right) dx = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + \ln\sqrt{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если вычислять I по формуле (5), то квадратуры окажутся более сложными. В самом деле, будем иметь: $I = \int_0^1 y\,dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. Находим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+y^2}}.$$

А тогда

$$I = \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

§6. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области

Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ задана в области $(\overline{D})$, ограниченной линиями: $y=c$, $y=d$ $(c<d)$ и $x=\alpha(y)$; $x=\beta(y)$, где $\alpha(y)$, $\beta(y)$ – функции, непрерывные на промежутке $[c,d]$ и такие, что $\alpha(y)\le\beta(y)$, $y\in[c,d]$.

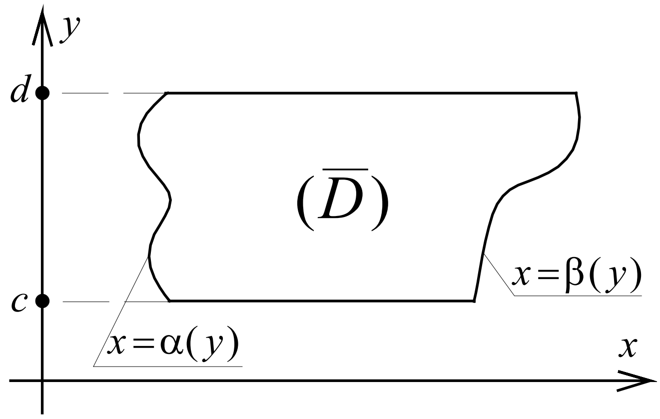


Рис. 2.5. К определению повторного интеграла от функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$

Определение. Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ существует $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$. Тогда $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ представляет собой функцию аргумента y, определенную на промежутке $[c,d]$, т. е. $\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \underset{\text{обозн.}}{=} \varphi(y)$, $y\in[c,d]$. Если эта функция $\varphi(y)$ оказывается интегрируемой на промежутке $[c,d]$, то $\int\limits_{c}^{d}\varphi(y)\,dy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ называется *повторным интегралом* от функции $f(x,y)$ в области $(\overline{D})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x,y)$, заданной в области $(\overline{D})$, существуют одновременно оба интеграла: $I_{\text{дв.}}=\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ и

$I_{\text{повт.}}=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, то они равны, т. е. $I_{\text{дв.}}=I_{\text{повт.}}$.

▶ По условию $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на $[c,d]$. Значит, они – ограниченные на $[c,d]$. Следовательно, найдутся числа a и b такие, что будет: $a<\alpha(y)\le\beta(y)<b$, $y\in[c,d]$. Построим прямоугольник $(\overline{P})=\begin{cases}a\le x\le b,\\ c\le y\le d.\end{cases}$ Ясно, что $(\overline{D})\subset(\overline{P})$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(x,y)$, определив ее в прямоугольнике $(\overline{P})$ следующим образом:

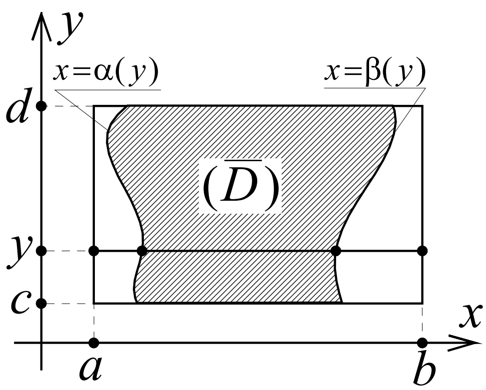


Рис. 2.6. К доказательству теоремы 1

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) \text{ в } (\overline{D}), \\ 0 \quad \text{в} \quad (\overline{P})\setminus(\overline{D}). \end{cases}$$

Покажем, что у функции $g(x,y)$ в $(\overline{P})$ существуют оба интеграла $I^*_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF$ и

$$I^*_{\text{повт.}} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b g(x,y)\,dx .$$

1) Действительно, $g(x,y)\in R(\overline{D})$, ибо в $(\overline{D})$ $g(x,y)\equiv f(x,y)$. Кроме того, $g(x,y)\in R\big((\overline{P})\setminus(D)\big)$, ибо $g(x,y)=0$ всюду в $(\overline{P})\setminus(D)$, за исключением, быть может, множества точек, лежащих на двух простых кривых: $x=\alpha(y)$ и $x=\beta(y)$, $y=[c,d]$ (мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функций вдоль конечного числа простых кривых). Значит, $g(x,y)\in R(\overline{P})$, т. е. $I^*_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF$ существует. Имеем, далее,

$$I^*_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{P})} g(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D})} g(x,y)\,dF + \underbrace{\iint\limits_{(\overline{P})\setminus(D)} g(x,y)\,dF}_{=0} =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF + 0 = I_{\text{дв.}} .$$

Итак, $I^*_{\text{дв.}}$ существует, и

$$I^*_{\text{дв.}} = I_{\text{дв.}} . \tag{1}$$

2) Покажем теперь, что у функции $g(x,y)$ в $(\overline{P})$ существует $I^*_{\text{повт.}}$. Для этого возьмем любое y из $[c,d]$ и закрепим его. Имеем

$$[a,b]=\big[a,\alpha(y)\big]\cup\big[\alpha(y),\beta(y)\big]\cup\big[\beta(y),b\big].$$

Функция $g(x,y)$ интегрируема по x на каждом из этих трех промежутков, ибо на $\big[\alpha(y),\beta(y)\big]$ она совпадает с $f(x,y)$, а на остальных двух – $g(x,y)=0$ всюду за исключением, быть может, двух точек. Имеем, далее,

$$\int\limits_a^b g(x,y)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^{\alpha(y)} g(x,y)\,dx}_{=0} + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x,y)\,dx + \underbrace{\int\limits_{\beta(y)}^{b} g(x,y)\,dx}_{=0} = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx .$$

По условию, правая часть последнего равенства интегрируема на промежутке $[c,d]$ (по условию, $I_{\text{повт.}}$ существует). Значит, интегрируема на промежутке $[c,d]$ и левая часть этого равенства, т. е. существует $I^*_{\text{повт.}}=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b g(x,y)\,dx$.

Таким образом, показано, что $I^*_{\text{повт.}}$ существует и что

$$I^*_{\text{повт.}}=I_{\text{повт.}}. \tag{2}$$

Так как у ограниченной функции $g(x,y)$, заданной в прямоугольнике $(\overline{P})$, существуют оба интеграла $I^*_{\text{дв.}}$ и $I^*_{\text{повт.}}$, то по теореме 1 предыдущего параграфа заключаем, что

$$I^*_{\text{дв.}}=I^*_{\text{повт.}}. \tag{3}$$

У нас $I^*_{\text{дв.}}=I_{\text{дв.}}$, $I^*_{\text{повт.}}=I_{\text{повт.}}$. Следовательно, $I_{\text{дв.}}=I_{\text{повт.}}$. ◀

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)\in C(\overline{D})$, и пусть $\varphi(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$, $y\in[c,d]$. Тогда $\varphi(y)\in C([c,d])$.

▶ Эта теорема была доказана ранее (см. гл. 1, §6, теорема о непрерывности интеграла как функции параметра). ◀

Следствие. Если функция $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то существует

$$I_{\text{повт.}}=\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то $f(x,y)\in R(\overline{D})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}}=\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$. Таким образом, приходим к заключению: если $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$ и $I_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа приходим к выводу, что $I_{\text{дв.}}=I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{4}$$

Замечание 1. Если область $(\overline{D})$ представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена кривыми $y=\tilde{\alpha}(x)$, $y=\tilde{\beta}(x)$, $x\in[a,b]$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$ (функции $\tilde{\alpha}(x)$ и $\tilde{\beta}(x)$ предполагаются непрерыв-

ными на промежутке $[a,b]$ и такими, что $\widetilde{\alpha}(x) \le \widetilde{\beta}(x)$, $x \in [a,b]$), то вместо формулы (4) придем к формуле

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\widetilde{\alpha}(x)}^{\widetilde{\beta}(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (5)$$

Разумеется, что при этом предполагается, что $f(x,y) \in C(\overline{D})$, а, следовательно, $I_{\text{дв.}} = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ и $\widetilde{I}_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\widetilde{\alpha}(x)}^{\widetilde{\beta}(x)} f(x,y)\,dy$ существуют.

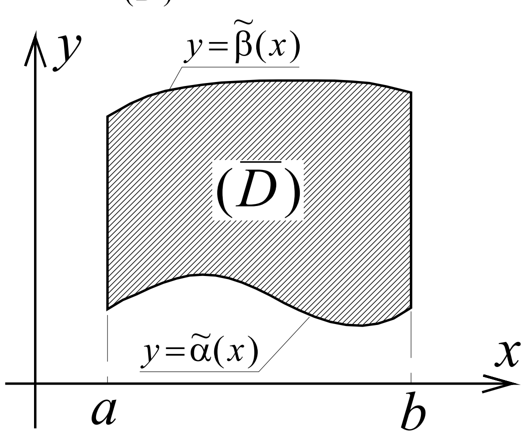


Рис. 2.7. К замечанию 1

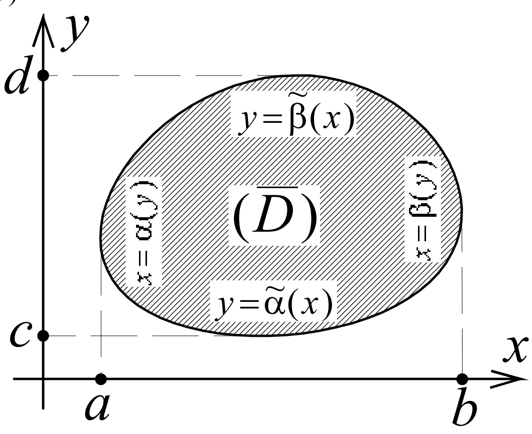


Рис. 2.8. К замечанию 2

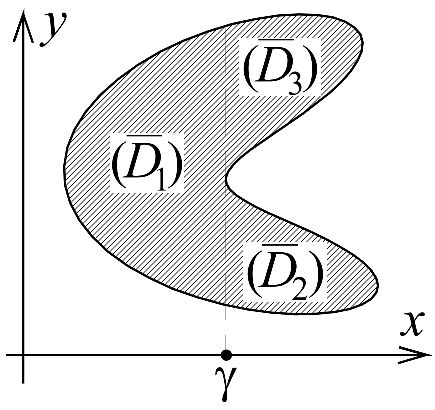


Рис. 2.9. К замечанию 3

Замечание 2. Если контур области $(\overline{D})$ пересекается лишь в двух точках как параллелями оси абсцисс, так и параллелями оси ординат (как, например, в случае, изображенном на рис. 2.8), то справедливы обе формулы (4) и (5). При этом, конечно, предполагается, что $f(x,y) \in C(\overline{D})$. Функции $\widetilde{\alpha}(x), \widetilde{\beta}(x) \in C([a,b])$. Функции $\alpha(y), \beta(y) \in C([c,d])$.

Замечание 3. В случае более сложного контура область $(\overline{D})$ обычно разлагается на конечное число частей рассмотренного типа (например, на рис. 2.9 область $(\overline{D})$ рассекается прямой $x = \gamma$ на три такие части: $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$). Тогда и искомый двойной интеграл представляется суммой двойных интегралов, распространенных в отдельности на эти части:

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dF = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_2)} f(x,y)\,dF + \iint\limits_{(\overline{D}_3)} f(x,y)\,dF.$$

§7. Примеры к главе 2

1. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} (x^2 + y)\,dxdy$, где $(\overline{D})$ – область, ограниченная двумя параболами: $y = x^2$ и $y^2 = x$.

▶ Полезно сделать чертеж (хотя бы грубо), чтобы получить общее представление об области. Решая совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения: $(0,0)$ и $(1,1)$.

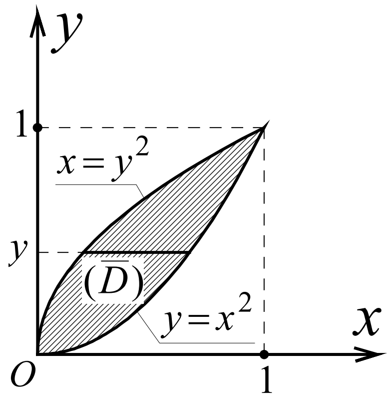


Рис. 2.10. К примеру 1

Если внешнее интегрирование производить по y, то промежутком изменения y будет $[0,1]$. Взяв произвольное значение y из промежутка $[0,1]$, видим по рисунку, что x изменяется от $x = y^2$ до $x = \sqrt{y}$. Будем иметь, следовательно, $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y)\,dx$.

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + yx\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{3}y^{3/2} + y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3 = \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3\right) dy = \frac{33}{140}. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, где $(\overline{D})$ – область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

▶ Наносим все эти три линии на рисунок (рис. 2.11). Совместным решением уравнений легко получить, что прямая $x = 2$ пересекает прямую $y = x$ в точке $(2,2)$, а гиперболу $xy = 1$ – в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; прямая же $y = x$ и гипербола $xy = 1$ (в пределах первого квадранта, где и лежит рассматриваемая область) пересекаются в точке $(1,1)$.

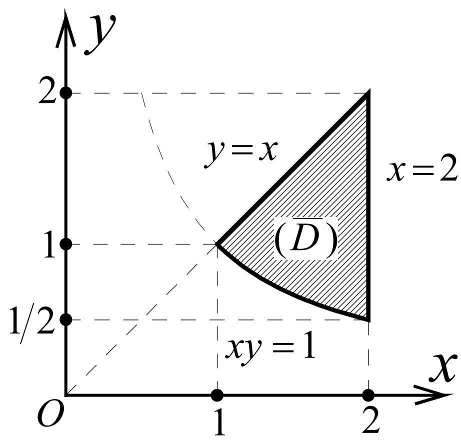


Рис. 2.11. К примеру 2

Если внешнее интегрирование производить по x, то промежуток изменения x будет $[1, 2]$. Взяв произвольное значение x из этого промежутка, видим по рисунку, что y изменяется от $y = \frac{1}{x}$ до $y = x$. Будем иметь, следовательно, $I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy$. Но $\int\limits_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy = -\frac{x^2}{y}\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x$, так что $I = \int\limits_{1}^{2} (x^3 - x)\, dx = \frac{9}{4}$.

В то время как в примере 1 вычисление двойного интеграла по обеим формулам (4) или (5) представлялось одинаково простым, в примере 2 дело обстоит иначе: вычисление по формуле (4) здесь было бы сложнее. Тем не менее мы выполним его, ибо поучительно дать себе отчет в причине указанного обстоятельства.

Прямая, параллельная оси Ox, пересекает контур области $(\overline{D})$ в двух точках, так что формула (4) применима. Но кривая, ограничивающая нашу область слева, состоит из двух частей: куска гиперболы и куска прямой, которые определяются различными уравнениями. Иными словами, функция $x = \alpha(y)$ задается различными формулами в различных частях промежутка $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ изменения y. Именно,

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{если} \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ y, & \text{если} \quad y \in [1, 2]. \end{cases}$$

Поэтому интегрирование по y следует разбить на два промежутка: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и $[1, 2]$. Следовательно, будем иметь:

$$I = \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx .$$

Так как

$$\int\limits_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}, \qquad \int\limits_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2}\Bigg|_{x=y}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

то

$$I=\int\limits_{1/2}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}.\blacktriangleleft$$

С подобными обстоятельствами приходится считаться: из двух возможных путей вычисления двойного интеграла, естественно, выбирают более простой.

3. Вычислить $I=\iint\limits_{(\overline{D})}\sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy$, где $(\overline{D})$ – область, ограниченная прямыми $y=0$, $x=1$, $y=x$.

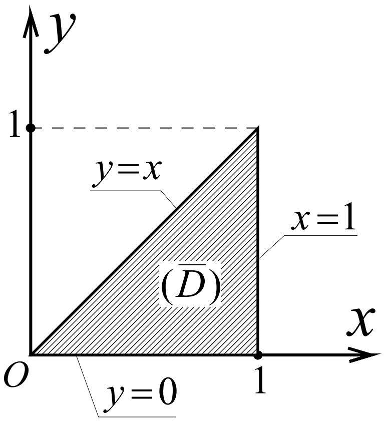


Рис. 2.12. К примеру 3

Если внешнее интегрирование производить по x, то промежуток изменения x будет $[0,1]$. Взяв произвольное значение x из промежутка $[0,1]$, видим по рисунку, что y изменяется от $y=0$ до $y=x$. Будем иметь, следовательно, $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{y=0}^{y=x}\sqrt{4x^2-y^2}\,dy$. Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{y=0}^{y=x}\sqrt{4x^2-y^2}\,dy=\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$I=\int\limits_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2dx=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

В примере 3 вычисление I можно было вести и по формуле (4), т. е. производить внешнее интегрирование по y. Но в этом случае мы натолкнемся на более трудные квадратуры. Чтобы убедиться в этом, станем вычислять I по формуле (4). Имеем: $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{x=y}^{x=1}\sqrt{4x^2-y^2}\,dx$. Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_{x=y}^{x=1}\sqrt{4x^2-y^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4x^2-y^2}-\frac{y^2}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-y^2}\right)\right]\Bigg|_{x=y}^{x=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4-y^2}-\frac{y^2}{2}\ln\left(2+\sqrt{4-y^2}\right)-y^2\sqrt{3}+\frac{y^2}{2}\ln\left(2y+\sqrt{3}y\right)\right].$$

А тогда

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\sqrt{4-y^2}-\sqrt{3}y^2+\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}y^2+\frac{y^2}{2}\ln\frac{y}{2+\sqrt{4-y^2}}\right]dy.$$

Сопоставляя это выражения для I с ранее полученным: $I=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2dx$, видим, что вычисление I по формуле (5) предпочтительнее. Подобное обстоятельство следует учитывать при выборе формулы для вычисления двойного интеграла. ◀

Для приобретения навыков в расстановке пределов интегрирования в случае криволинейной области полезны следующие упражнения.

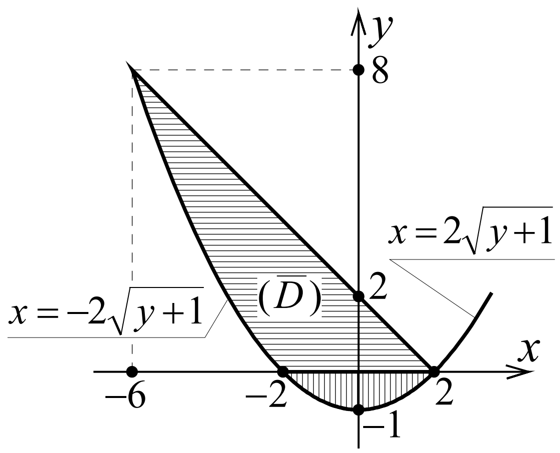


Рис. 2.13. К задаче 1

Задача 1. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I=\int_{-6}^{2}dx\int_{y=\frac{x^2}{4}-1}^{y=2-x}f(x,y)\,dy.$$

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами: $-6\le x\le 2$, $\frac{x^2}{4}-1\le y\le 2-x$. Изобразим эту область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 2.13 видим, что если брать внешнее интегрирование по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить на две области $(\overline{D_1})$ и $(\overline{D_2})$ линией $y=0$. Тогда: $(\overline{D_1})$ будет определяться неравенствами: $-1\le y\le 0$, $-2\sqrt{y+1}\le x\le 2\sqrt{y+1}$, а $(\overline{D_2})$ – неравенствами $0\le y\le 8$, $-2\sqrt{y+1}\le x\le 2-y$. Будем иметь, следовательно,

$$I=\int_{-1}^{0}dy\int_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2\sqrt{y+1}}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{8}dy\int_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2-y}f(x,y)\,dx.\ ◀$$

Задача 2. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=1-x^2}f(x,y)\,dy.$$

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами

$$-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le 1-x^2.$$

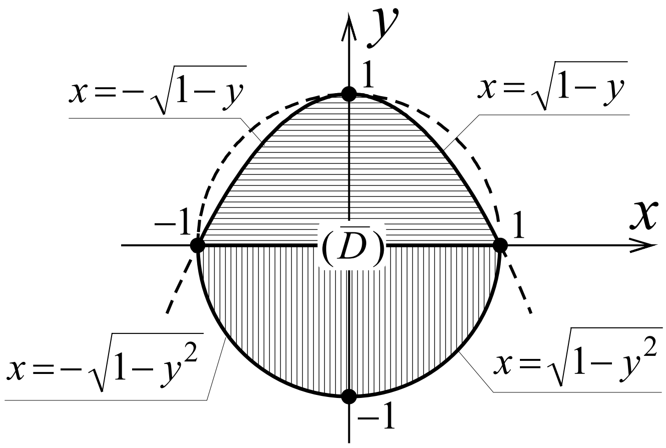


Рис. 2.14. К задаче 2

Изобразим область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 2.14 видим, что если внешнее интегрирование производить по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить линией $y=0$ на две области $(\overline{D}_1)$ и $(\overline{D}_2)$. Область $(\overline{D}_1)$ определяется неравенствами: $-1 \le y \le 0$, $-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$, а область $(\overline{D}_2)$ – неравенствами $0 \le y \le 1$, $-\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{x=-\sqrt{1-y}}^{x=\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx . \blacktriangleleft$$

Задача 3. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I = \int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$ $(a>0)$.

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется совместными неравенствами: $0 \le x \le 2a$; $\sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax}$. Изобразим область $(\overline{D})$ на рисунке. Из рис. 2.15 видим, что если внешнее интегрирование производить по y, то область $(\overline{D})$ следует разбить линией: $y=a$ на три области: $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$.

Область $(\overline{D}_1)$ определяется неравенствами:

$$0 \le y \le a, \quad \frac{y^2}{2a} \le x \le a - \sqrt{a^2-y^2};$$

область $(\overline{D}_2)$ – неравенствами:

$$0 \le y \le a, \quad a + \sqrt{a^2-y^2} \le x \le 2a;$$

область $(\overline{D}_3)$ – неравенствами

$$a \le y \le 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a .$$

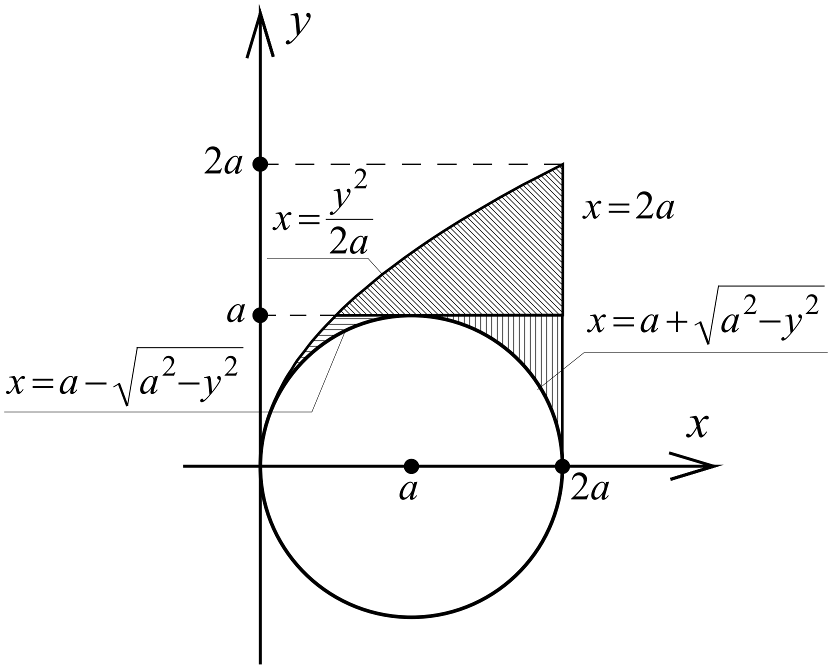


Рис. 2.15. К задаче 3

Следовательно, будем иметь:

$$I=\int_0^a dy \int_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^a dy \int_{x=a+\sqrt{a^2-y^2}}^{x=2a} f(x,y)\,dx+\int_a^{2a} dy \int_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=2a} f(x,y)\,dx\,. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Вычислить $I=\iint\limits_{(\overline{D})}\left|\cos(x+y)\right|dxdy$, где $(\overline{D})=\begin{cases}0\le x\le\pi,\\ 0\le y\le\pi.\end{cases}$

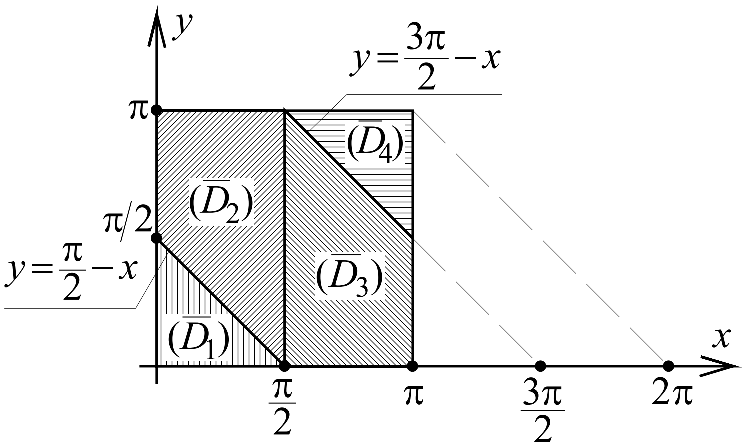


Рис. 2.16. К задаче 4

▶ Отметим прежде всего, что $\cos(x+y)\ge 0$ в областях:

$$(\overline{D}_1)=\left\{0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}-x\right\} \text{ и } (\overline{D}_4)=\left\{\frac{\pi}{2}\le x\le\pi;\ \frac{3\pi}{2}-x\le y\le\pi\right\}.$$

$\cos(x+y)\le 0$ в областях:

$$(\overline{D}_2)=\left\{0\le x\le\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}-x\le y\le\pi\right\}\ \text{ и }\ (\overline{D}_3)=\left\{\frac{\pi}{2}\le x\le\pi;\ 0\le y\le\frac{3\pi}{2}-x\right\}.$$

Имеем поэтому

$$I=\iint\limits_{(\overline{D})}\left|\cos(x+y)\right|dxdy=\iint\limits_{(\overline{D}_1)}\cos(x+y)\,dxdy-\iint\limits_{(\overline{D}_2)}\cos(x+y)\,dxdy-$$

$$-\iint\limits_{(\overline{D}_3)}\cos(x+y)\,dxdy+\iint\limits_{(\overline{D}_4)}\cos(x+y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}dx\int\limits_{y=0}^{y=\pi/2-x}\cos(x+y)\,dy-\int\limits_0^{\pi/2}dx\int\limits_{y=\pi/2-x}^{y=\pi}\cos(x+y)\,dy-$$

$$-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}dx\int\limits_{y=0}^{y=3\pi/2-x}\cos(x+y)\,dy+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}dx\int\limits_{y=3\pi/2-x}^{y=\pi}\cos(x+y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}dx-\int\limits_0^{\pi/2}\sin(x+y)\Big|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{3\pi}{2}-x}dx+$$

$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin(x+y)\Big|_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx=\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,dx+\int\limits_0^{\pi/2}(1+\sin x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1+\sin x)\,dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1-\sin x)\,dx=2\int\limits_0^{\pi/2}dx+2\int\limits_{\pi/2}^{\pi}dx=\pi+\pi=2\pi\,.\ ◄$$

Задача 5. Вычислить $I=\iint\limits_{(\overline{D})}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy$, где $(\overline{D})=\left\{x^2+y^2\le 4\right\}$.

► $x^2-y^2+2=0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$. Ветви этой гиперболы являются линиями разрыва подынтегральной функции. Так как подынтегральная функция – ограниченная в $(\overline{D})$ и непрерывная там всюду, за исключением точек, лежащих на двух простых кривых, то двойной интеграл I существует.

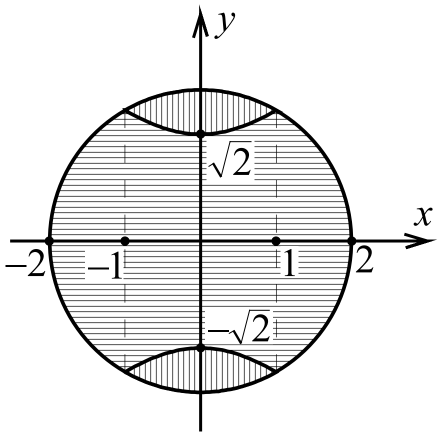


Рис. 2.17. К задаче 5

Пусть

$$(\overline{D}_1)=\left\{-1\le x\le 1;\ \sqrt{x^2+2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\},$$

$$(\overline{D}_3)=\left\{-1\le x\le 1;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le -\sqrt{x^2+2}\right\},$$

$$(\overline{D}_2)=\left\{-2\le x\le -1;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}\bigcup$$
$$\bigcup\left\{-1\le x\le 1;\ -\sqrt{x^2+2}\le y\le\sqrt{x^2+2}\right\}\bigcup$$
$$\bigcup\left\{1\le x\le 2;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Имеем в $(D_1)\bigcup(D_3)$: $x^2-y^2+2<0$, а в (D_2): $x^2-y^2+2>0$. Мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. Поэтому

$$I=\iint\limits_{(\overline{D}_2)}dxdy-\iint\limits_{(\overline{D}_1)}dxdy-\iint\limits_{(\overline{D}_3)}dxdy=F_{\overline{D}_2}-F_{\overline{D}_1}-F_{\overline{D}_3},$$

где $F_{\overline{D}_1}$, $F_{\overline{D}_2}$, $F_{\overline{D}_3}$ – площади областей $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$. Так как $F_{(\overline{D})}=4\pi$, $F_{(\overline{D}_3)}=F_{(\overline{D}_1)}$, то $F_{(\overline{D}_2)}=4\pi-2F_{(\overline{D}_1)}$ и, следовательно, $I=4\pi-4F_{(\overline{D}_1)}$. Так как область $(\overline{D}_1)$ симметрична относительно оси Oy, то

$$F_{(\overline{D}_1)}=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_{y=\sqrt{x^2+2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}dy=2\int\limits_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x^2+2}\right)dx=$$

$$=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}-\frac{2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(1+\sqrt{3}\right)+\ln\sqrt{2}\right]=\frac{2\pi}{3}+2\ln\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

А тогда

$$I=4\pi-\frac{8\pi}{3}-8\ln\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3}+4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).\ \blacktriangleleft$$

Задача 6. Вычислить $I=\iint\limits_{(\overline{D})}\sqrt{\mathrm{E}(y-x^2)}\,dxdy$, где $(\overline{D})=\left\{x^2\le y\le 4\right\}$.

$\blacktriangleright$ По определению функции E, имеем:

если $0\le y-x^2<1$, т. е. если $x^2\le y<1+x^2$, то $\mathrm{E}(y-x^2)=0$;

если $1\le y-x^2<2$, т. е. если $1+x^2\le y<2+x^2$, то $\mathrm{E}(y-x^2)=1$;

если $2\le y-x^2<3$, т. е. если $2+x^2\le y<3+x^2$, то $\mathrm{E}(y-x^2)=2$;

если $3\le y-x^2<4$, т. е. если $3+x^2\le y<4+x^2$, то $\mathrm{E}(y-x^2)=3$.

Следовательно, $\mathrm{E}(y-x^2)=0$ в (D_1); $\mathrm{E}(y-x^2)=1$ в (D_2); $\mathrm{E}(y-x^2)=2$ в (D_3); $\mathrm{E}(y-x^2)=3$ в (D_4). Видим, что подынтегральная функция терпит разрыв на конечном числе простых кривых, лежащих в области $(\overline{D})$. В остальных точках области $(\overline{D})$ она непрерывная. Так как подынтегральная функция еще и ограниченная в $(\overline{D})$, то двойной интеграл I существует. Принимая во внимание, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых, можем написать, что:

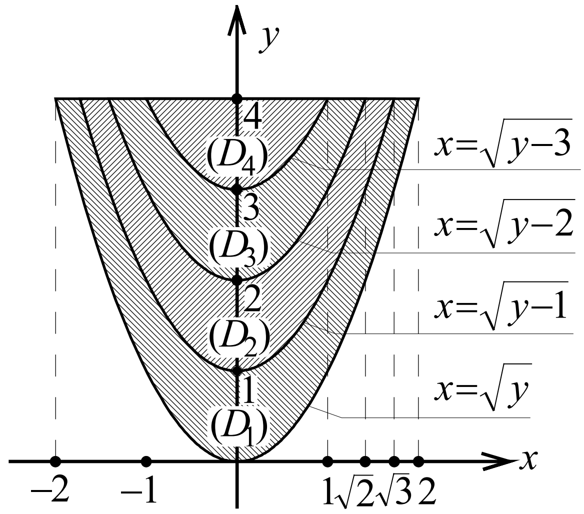


Рис. 2.18. К задаче 6

$$I=\iint\limits_{(\overline{D}_1)}0\cdot dxdy+\iint\limits_{(\overline{D}_2)}1\cdot dxdy+\iint\limits_{(\overline{D}_3)}\sqrt{2}\,dxdy+\iint\limits_{(\overline{D}_4)}\sqrt{3}\,dxdy\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ I=F_{\overline{D}_2}+\sqrt{2}\cdot F_{\overline{D}_3}+\sqrt{3}\cdot F_{\overline{D}_4}$, где $F_{\overline{D}_2}$, $F_{\overline{D}_3}$, $F_{\overline{D}_4}$ – площади областей $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, $(\overline{D}_4)$ соответственно. Так как области $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, $(\overline{D}_4)$ симметричны относительно оси Oy, то:

$$F_{\overline{D}_4}=2\int\limits_3^4 dy\int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-3}}dx=2\int\limits_3^4\sqrt{y-3}\,dy=2\cdot\frac{2}{3}(y-3)^{3/2}\Big|_{y=3}^{y=4}=\frac{4}{3};$$

$$F_{\overline{D}_3}=2\int\limits_2^4 dy\int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-2}}dx-F_{D_4}=2\int\limits_2^4\sqrt{y-2}\,dy-\frac{4}{3}=2\cdot\frac{2}{3}(y-2)^{3/2}\Big|_{y=2}^{y=4}-\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right);$$

$$F_{\overline{D}_2}=2\int\limits_1^4 dy\int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y-1}}dx-(F_{\overline{D}_3}+F_{\overline{D}_4})=2\int\limits_1^4\sqrt{y-1}\,dy-\frac{8\sqrt{2}}{3}=$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}(y-1)^{3/2}\Big|_{y=1}^{y=4}-\frac{8\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

А тогда

$$I=\left(4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)+\sqrt{2}\cdot\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)+\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{2}+4\right).\ \blacktriangleleft$$

Глава 3. Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого рода

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу.

Имеется спрямляемая пространственная кривая (l) длины s. Пусть на (l) непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине. Плотность $\rho(x,y,z)$ кривой (l) в точке (x,y,z) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку). Требуется найти массу m кривой (l).

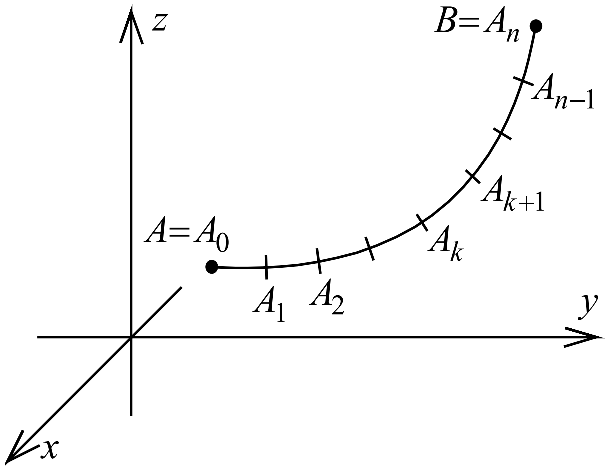


Рис. 3.1. К задаче по определению массы кривой

▶ Разбиваем кривую (l) точками $A_0=A,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n=B$ произвольным образом на n частичных дуг A_kA_{k+1} $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ с длинами $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{n-1}$. Полагаем $\lambda=\max\limits_{k=\overline{0,\,n-1}}\{s_k\}$. Предполагаем частичные дуги A_kA_{k+1} столь малыми, что на $\smile A_kA_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)$, где точка $(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)$ – любая, принадлежащая $\smile A_kA_{k+1}$. Тогда масса Δm_k частичной дуги A_kA_{k+1} привой (l) будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k=\rho(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot s_k\,.$$

Масса m всей кривой (l) будет выражаться приближенно суммой

$$m\approx\rho(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)\cdot s_0+\rho(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1)\cdot s_1+\ldots+\rho(\bar{x}_{n-1},\bar{y}_{n-1},\bar{z}_{n-1})\cdot s_{n-1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\rho(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot s_k\,.$$

Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги A_kA_{k+1}, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу A_kA_{k+1} однородной. Поэтому за массу m кривой (l) естественно принять:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\rho(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot s_k\,. \blacktriangleleft$$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть в пространстве расположена спрямляемая кривая (l), имеющая концы в точках A и B, и пусть во всех точках кривой (l) определена функция $f(x,y,z)$. Проделаем следующие операции.

1. Разобьем кривую (l) точками $A_0 = A$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, $A_n = B$, следующими друг за другом вдоль кривой (l) в направлении от A к B, на частичные дуги $\smile A_k A_{k+1}$. Пусть s_k – длина $\smile A_k A_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\, n-1}} \{s_k\}$ (λ – ранг дробления).

2. На каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение функции f, т. е. находим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги: $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k .$$

Отметим, что значение суммы σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, так и от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, ни от способа выбора точек $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то его называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x,y,z)$ по кривой (l) и обозначают символом

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\, ds. \qquad (1)$$

Если, в частности, кривая (l) лежит в плоскости Oxy, то функция f от координаты z не зависит, и вместо (1) появляется интеграл

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\, ds. \qquad (2)$$

Замечание 1. Из самого определения криволинейного интеграла первого рода вытекает следующее свойство:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\, ds = \int\limits_{\smile BA} f(x,y,z)\, ds,$$

т. е. направление, которое может быть придано пути интегрирования, никакой роли не играет. В самом деле, ведь длина s_k дуги $\smile A_k A_{k+1}$ не зависит от того, какая из точек A_k и A_{k+1} принята за начало и какая – за конец дуги.

Замечание 2. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой (l) определяется по формуле: $m = \int\limits_{\smile AB} \rho(x,y,z)\,ds$.

3°. Теорема (о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по плоской кривой).

1. Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$, где φ и ψ – функции, заданные на промежутке $[p,q]$ и имеющие там непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Пусть $\big(\varphi(p),\psi(p)\big) = A$, $\big(\varphi(q),\psi(q)\big) = B$. Пусть точки $\big(\varphi(t),\psi(t)\big)$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p,q]$. (Считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек.)

2. Пусть функция $f(x,y)$ задана на $\smile AB$ и непрерывна там.

Тогда $I = \int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_p^q f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt \quad (p < q). \qquad (3)$$

(подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла (3) должен быть меньше верхнего).

▶ Заметим сначала, что интеграл, стоящий в правой части (3), существует, ибо подынтегральная функция в нем непрерывна на промежутке $[p,q]$.

Напомним, что в условиях теоремы кривая $\smile AB$ спрямляема и ее длина s равна: $s = \int\limits_p^q \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt$ $(p < q)$. Составим сумму Римана σ для криволинейного интеграла $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$. Для этого надо разбить $\smile AB$ точками A_k на дуги $A_k A_{k+1}$ $(k = \overline{0, n-1})$. Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[p,q]$ произвольным образом точками $t_0 = p < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = q$ и положить $A_k = \big(\varphi(t_k),\psi(t_k)\big)$, $k = \overline{0, n}$. Тогда

$$s_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{4}$$

Затем на каждой частичной дуге $\smile A_k A_{k+1}$ нужно взять произвольную точку $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$. Будем иметь тогда:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\right) \cdot \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла (4)

$$s_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt = \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_k)\right)^2} \cdot (t_{k+1} - t_k),$$

где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Поэтому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\right) \cdot \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_k)\right)^2} \cdot \Delta t_k.$$

Полученное выражение для σ сходно с суммой Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), но таковой не является, так как θ_k и τ_k, вообще говоря, различны.

Составим сумму

$$\sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)\right) \cdot \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_k)\right)^2} \cdot \Delta t_k.$$

Это уже настоящая сумма Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), т. е. для интеграла

$$I_* = \int\limits_p^q f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \cdot \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Было отмечено, что I_* существует. Следовательно, $\sigma_* \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ ($\lambda_* = \max\limits_{k=\overline{0, n-1}} \{\Delta t_k\}$). Заметим, что $(\lambda \to 0) \Leftrightarrow (\lambda_* \to 0)$. Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \tag{5}$$

Из (5) видно, что теорема будет доказана, если показать, что $\lim\limits_{\lambda_* \to 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$.

Имеем
$$\sigma-\sigma_*=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\big(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k)\big)-f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\big)\right]\cdot s_k .$$
Возьмем $\varepsilon>0$ – любое, сколь угодно малое. Функция $f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\in C([p,q])$, как суперпозиция непрерывных функций. Значит, она и равномерно непрерывна на промежутке $[p,q]$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[p,q]$, для которых $|t''-t'|<\delta$, будет
$$\left|f\big(\varphi(t''),\psi(t'')\big)-f\big(\varphi(t'),\psi(t')\big)\right|<\varepsilon .$$
Возьмем любое разбиение промежутка $[p,q]$ на части $[t_k,t_{k+1}]$, у которого ранг дробления $\lambda_*<\delta$. Так как θ_k и $\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]$, то $|\theta_k-\tau_k|\le t_{k+1}-t_k\le\lambda_*<\delta$. Следовательно, для любого $k=\overline{0,n-1}$ будем иметь:
$$\left|f\big(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k)\big)-f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)\big)\right|<\varepsilon .$$
Поэтому, считая дробление промежутка $[p,q]$ таким, что $\lambda_*<\delta$, получим $|\sigma-\sigma_*|<\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon\cdot s_k=\varepsilon\cdot s$ (здесь s – длина $\smile AB$). Так как для достижения неравенства $|\sigma-\sigma_*|<\varepsilon\cdot s$ потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_*<\delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda_*\to 0}(\sigma-\sigma_*)=0$, а значит, и $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\sigma-\sigma_*)=0$. ◀

Частные случаи.

I. Пусть кривая $\smile AB$ дана явным уравнением: $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, $a<b$. Тогда:

1) если функция $\varphi(x)$ имеет на промежутке $[a,b]$ непрерывную производную $\varphi'(x)$ и

2) если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$ существует, и
$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds=\int\limits_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}\,dx .$$

II. Пусть $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах: $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$. Тогда:

1) если функция $r(\varphi)$ имеет на промежутке $[\alpha,\beta]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$ и

2) если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds$ существует, и

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)\sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Замечание. Совершенно аналогично доказывается теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по пространственной кривой.

Теорема.

1. Пусть пространственная кривая $\smile AB$ задана уравнениями:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in[p,q] \text{ и } p<q \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

(считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек).

2. Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют на промежутке $[p,q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

3. Пусть $\big(\varphi(p),\psi(p),\omega(p)\big)=A$, $\big(\varphi(q),\psi(q),\omega(q)\big)=B$ и точки $\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p,q]$.

Тогда, если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на $\smile AB$, то $I=\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,ds$ существует и выражается через обыкновенный определенный интеграл по формуле:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,ds=\int\limits_{p}^{q} f\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2+\big(\omega'(t)\big)^2}\,dt \quad (p<q).$$

Примеры.

1. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}(x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, где (l) – дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

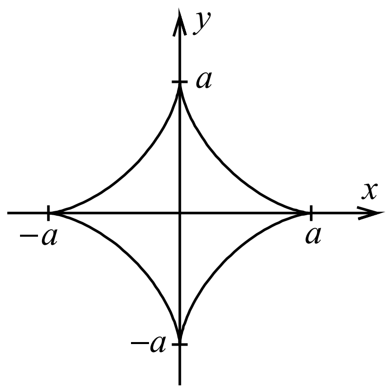


Рис. 3.2. К примеру 1

▶ Вычисление I удобнее производить, взяв уравнение астроиды (l) в параметрической форме:

$$(l)=\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Имеем $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$; $y'_t=3a\sin^2 t\cos t$;

$$ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\cdot dt=3a\left|\sin t\cos t\right|dt.$$

Поэтому

$$I=\int_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cdot 3a\left|\sin t\cos t\right|dt=$$

$$=3a^{7/3}\left[\int_0^{\pi/2}(\cos^5\sin t+\sin^5\cos t)\,dt-\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^5\sin t+\sin^5\cos t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{3\pi/2}(\cos^5\sin t+\sin^5\cos t)\,dt-\int_{3\pi/2}^{2\pi}(\cos^5\sin t+\sin^5\cos t)\,dt\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}a^{7/3}\left[(-\cos^6 t+\sin^6 t)\Big|_0^{\pi/2}+(\cos^6 t-\sin^6 t)\Big|_{\pi/2}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+(-\cos^6 t+\sin^6 t)\Big|_{\pi}^{3\pi/2}+(\cos^6 t-\sin^6 t)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right]=\frac{a^{7/3}}{2}\left[2+2+2+2\right]=4a^{7/3}.\ ◀$$

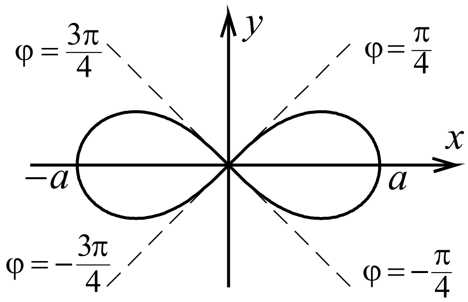


Рис. 3.3. К примеру 2

2. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}|y|\,ds$, где (l) – дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

▶ Перейдем к полярным координатам: $\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi.\end{cases}$ Тогда уравнение лемнискаты получим в виде: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Имеем

$$r'_\varphi=-a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};\qquad r^2+(r'_\varphi)^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi};\qquad ds=\sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}\,d\varphi=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$|y|=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot|\sin\varphi|$, $|y|\,ds=a^2|\sin\varphi|\,d\varphi$. Поэтому

$$I=a^2\left[\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi+\int_{3\pi/4}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi-\int_{-\pi}^{-3\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi-\int_{-\pi/4}^{0}\sin\varphi\,d\varphi\right]=$$

$$=a^2\left[-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4}-\cos\varphi\Big|_{3\pi/4}^{\pi}+\cos\varphi\Big|_{-\pi}^{-3\pi/4}+\cos\varphi\Big|_{-\pi/4}^{0}\right]=a^2\cdot\left(4-2\sqrt{2}\right).\ ◀$$

3. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}(x+y)\,ds$, где (l) – контур треугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

▶ $(l)=(l_1)\cup(l_2)\cup(l_3)$;

$$I=\int\limits_{(l)}(x+y)\,ds=\int\limits_{(l_1)}(x+y)\,ds+\int\limits_{(l_2)}(x+y)\,ds+\int\limits_{(l_3)}(x+y)\,ds.$$

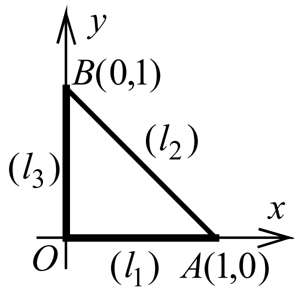


Рис. 3.4.
К примеру 3

1) $(l_1)=OA$: $y=0$, $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$

$$ds=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=dx;$$

$$I_1=\int\limits_{(l_1)}(x+y)\,ds=\int\limits_0^1(x+0)\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

2) $(l_2)=AB$: $y=1-x$, $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $ds=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$;

$$I_2=\int\limits_{(l_2)}(x+y)\,ds=\int\limits_0^1(x+1-x)\sqrt{2}\,dx=\int\limits_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\,x\Big|_0^1=\sqrt{2}.$$

3) $(l_3)=OB$: $x=0$; $y\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $ds=\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy=dy$;

$$I_3=\int\limits_{(l_3)}(x+y)\,ds=\int\limits_0^1(0+y)\,dy=\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}=1+\sqrt{2}.\ ◀$$

4. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}z\,ds$, где (l) – коническая винтовая линия:

$$\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t, \quad t\in[0,t_0].\\ z=t,\end{cases}$$

▶ Имеем: $x'_t=\cos t-t\sin t$; $y'_t=\sin t+t\cos t$; $z'_t=1$;

$$ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt=\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

Тогда

$$I=\int\limits_{(l)}z\,ds=\int\limits_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}\,dt=\left.\frac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\right|_0^{t_0}=\frac{1}{2}\Big((2+t_0)^{3/2}-2^{3/2}\Big).\ ◀$$

5. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}x^2ds$, где (l) – окружность: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

▶ Плоскость $x+y+z=0$ проходит через начало координат и пересекается со сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ по окружности радиуса a. Таким образом, (l) – окружность радиуса a $\Rightarrow$ длина (l) равна $2\pi a$. Легко понять, что $\int\limits_{(l)} x^2 ds = \int\limits_{(l)} y^2 ds = \int\limits_{(l)} z^2 ds$. А тогда $I = \int\limits_{(l)} x^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_{(l)} (x^2+y^2+z^2)\, ds$. Заметим, что на (l), т. е. на окружности радиуса a с центром в точке O, подынтегральная функция равна a^2. Следовательно, $I = \frac{1}{3}\int\limits_{(l)} a^2 ds = \frac{a^2}{3}\int\limits_{(l)} ds$. Но $\int\limits_{(l)} ds$ равен значению длины окружности (l), т. е. $2\pi a$. Поэтому $I = \frac{2\pi a^3}{3}$. ◀

§2. Криволинейные интегралы второго рода

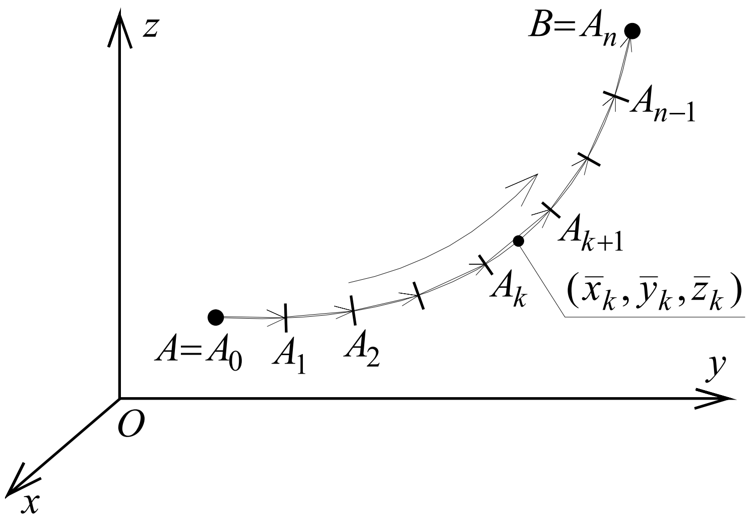


Рис. 3.5. К определению криволинейного интеграла второго рода

1°. Определение. Пусть в пространстве дана непрерывная кривая $\smile AB$. Пусть на $\smile AB$ задана функция $f(x,y,z)$. Выберем на $\smile AB$ какое-нибудь направление (одно из двух возможных), например, от точки A к точке B. Проделаем следующие операции.

1. Разбиваем $\smile AB$ точками $A_0 = A$, A_1, A_2, … , A_{n-1}, $A_n = B$ на n частичных дуг $\smile A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Точки $A_k(x_k, y_k, z_k)$ следуют друг за другом вдоль $\smile AB$ в направлении от точки A к точке B. Пусть d_k – диаметр $\smile A_k A_{k+1}$ ($d_k = \sup\limits_{\substack{M\in \smile A_k A_{k+1},\\ N\in \smile A_k A_{k+1}}} \{\rho(M,N)\}$), и пусть $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\, n-1}} \{d_k\}$.

2. На каждой $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение данной функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Соединим концы каждой частичной дуги хордой и придадим этим хордам направления соответствующих дуг. Получим направленную ломаную. Звенья этой ломаной есть векторы

$\overrightarrow{\Delta l_0},\ \overrightarrow{\Delta l_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{\Delta l_{n-1}}$. Спроектируем эти векторы на ось Ox. Получим числа $\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}$ ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{\Delta l_k}$). Эти числа могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

3. Каждое вычисленное значение функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ умножаем на проекцию соответствующего звена ломаной на ось Ox. Получим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\cdot\Delta x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\cdot\Delta x_k$$ (σ – интегральная сумма).

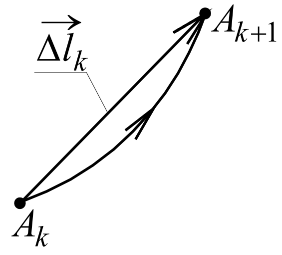


Рис. 3.6. К определению криволинейного интеграла второго рода

5. Измельчаем дробление $\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$ так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$. Если существует конечный $I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения $\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$, ни от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой $\smile AB$ (по x) и обозначается $\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\,dx$.

Замечания.

1. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при перемене направления линии, по которой производится интегрирование, т. е.

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\,dx = -\int\limits_{\smile BA} f(x, y, z)\,dx.$$

Это ясно, ибо проекции звеньев ломаной $\overrightarrow{\Delta l_k}$ на ось Ox существенно зависят от направления $\smile A_k A_{k+1}$ и меняют знак с изменением этого направления на обратное.

2. Если звенья $\overrightarrow{\Delta l_k}$ направленной ломаной проектировать на ось Oy, то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x, y, z)$ по $\smile AB$ (по y):

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y, z)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta y_k.$$

3. Если звенья $\overrightarrow{\Delta l_k}$ направленной ломаной проектировать на ось Oz, то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x, y, z)$ по $\smile AB$ (по z):

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta z_k .$$

4. Если на кривой $\smile AB$ определены три функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и если существуют интегралы $\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx$, $\int\limits_{\smile AB} Q(x,y,z)\,dy$, $\int\limits_{\smile AB} R(x,y,z)\,dz$, то их сумму называют криволинейным интегралом второго рода («общего вида») и полагают

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + \int\limits_{\smile AB} Q(x,y,z)\,dy + \int\limits_{\smile AB} R(x,y,z)\,dz .$$

Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

2°. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Теорема.

1. Пусть кривая $\smile AB$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases}$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ – функции, заданные и непрерывные на промежутке $[a,b]$. Кроме того, у функции $\varphi(t)$ на $[a,b]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$. Пусть $\big(\varphi(a),\psi(a),\omega(a)\big) = A$, $\big(\varphi(b),\psi(b),\omega(b)\big) = B$, причем $A \neq B$, т. е. кривая $\smile AB$ – незамкнутая. Пусть точки $\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[a,b]$.

2. Пусть функция $f(x,y,z)$, заданная на $\smile AB$, непрерывна там.

Тогда $I = \int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,dx$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt . \qquad (1)$$

Замечания.

1. Интеграл $I_* = \int\limits_a^b f\big(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt$ существует, ибо подынтегральная функция в нем непрерывна на $[a,b]$.

2. Нижний предел в I_* должен отвечать началу пути интегрирования в I, а верхний предел – концу пути интегрирования.

▶ Составим интегральную сумму σ для I. Для этого надо разбить $\smile AB$ точками $A_k(x_k, y_k, z_k)$ на частичные дуги $\smile A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($A_0 = A$, $A_n = B$). Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[a,b]$ произвольным образом точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и положить $A_k\big(\varphi(t_k), \psi(t_k), \omega(t_k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Затем на каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ надо взять произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$, $\bar{z}_k = \omega(\theta_k)$. Тогда получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f\big(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)\big)\big(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)\big).$$

По формуле Лагранжа $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$, где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Поэтому $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\big(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)\big) \cdot \varphi'(\tau_k)\Delta t_k$. Видим, что эта сумма похожа на интегральную сумму Римана для определенного интеграла I_*, но таковой не является, ибо, вообще говоря, $\theta_k \neq \tau_k$.

Составим сумму $\sigma_* = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\big(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k)\big) \cdot \varphi'(\tau_k)\Delta t_k$. Это уже настоящая интегральная сумма Римана для I_*. Было отмечено выше, что интеграл I_* существует, и потому $\sigma_* \to I_*$ при $\lambda_* \to 0$ ($\lambda_* = \max\limits_{k=\overline{0,\, n-1}} \{\Delta t_k\}$). Отметим, что $\lambda \to 0$, если $\lambda_* \to 0$.

Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \tag{2}$$

Из (2) видим, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\substack{\lambda_* \to 0 \\ (\lambda \to 0)}} (\sigma - \sigma_*) = 0.$$

Имеем

$$\sigma-\sigma_*=\sum_{k=0}^{n-1}\Big[f\big(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k),\omega(\theta_k)\big)-f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k),\omega(\tau_k)\big)\Big]\cdot\varphi'(\tau_k)\Delta t_k .$$

По условию $\varphi'(t)\in C\big([a,b]\big) \;\Rightarrow\; \varphi'(t)$ – ограниченная в $[a,b]$, т. е. существует число $M>0$ такое, что $|\varphi'(t)|\le M$ для всех $t\in[a,b]$. Поэтому

$$|\sigma-\sigma_*|\le M\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Big|f\big(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k),\omega(\theta_k)\big)-f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k),\omega(\tau_k)\big)\Big|\cdot\Delta t_k .$$

Функция $f\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\in C\big([a,b]\big)$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow$ $f\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$ – равномерно непрерывная в $[a,b]$. Значит, всякому $\varepsilon>0$ (сколь угодно малому) отвечает $\delta>0$ такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[a,b]$, для которых $|t''-t'|<\delta$, будет

$$\Big|f\big(\varphi(t''),\psi(t''),\omega(t'')\big)-f\big(\varphi(t'),\psi(t'),\omega(t')\big)\Big|<\varepsilon .$$

Возьмем дробление промежутка $[a,b]$ на части $[t_k,t_{k+1}]$ любым, но таким, чтобы было $\lambda_*<\delta$. У нас θ_k и $\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]$. Следовательно, $|\theta_k-\tau_k|\le t_{k+1}-t_k\le\lambda_*<\delta$, для любого $k=0,1,2,\dots,n-1$. А тогда для любого $k=0,1,2,\dots,n-1$ будем иметь

$$\Big|f\big(\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k),\omega(\theta_k)\big)-f\big(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k),\omega(\tau_k)\big)\Big|<\varepsilon .$$

Следовательно, $|\sigma-\sigma_*|<M\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon\cdot\Delta t_k \;\Rightarrow$

$$|\sigma-\sigma_*|<\varepsilon\cdot M\cdot(b-a). \tag{3}$$

Отметим, что число $\varepsilon\cdot M(b-a)$ сколь угодно мало вместе с ε. Так как для достижения неравенства (3) потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_*<\delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda_*\to0}(\sigma-\sigma_*)=0$, а значит, $\lim\limits_{\lambda\to0}(\sigma-\sigma_*)=0$. ◄

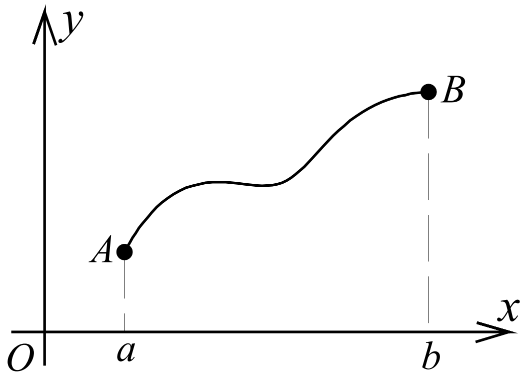


Рис. 3.7. К частному случаю I

Частные случаи.

I. 1) Пусть кривая $\smile AB$ плоская, заданная явным уравнением $y=\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $[a,b]$, причем a – абсцисса точки A, а b – абсцисса точки B.

2) Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на кривой $\smile AB$.

Тогда $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx$ существует, и

$$\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\,dx\,.$$

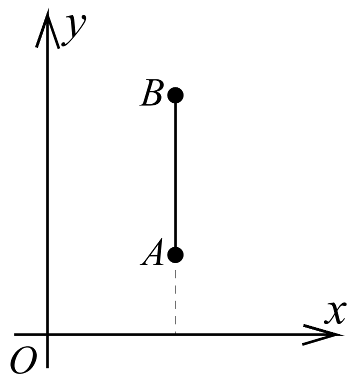


Рис. 3.8. К частному случаю II

II. Пусть $\smile AB$ – прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox. Тогда $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx$ существует для любой функции $f(x,y)$, определенной на $\smile AB$, причем $\int\limits_{\smile AB} f(x,y)\,dx = 0$.

3°. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода.

Механический смысл криволинейного интеграла второго рода вытекает из решения следующей задачи.

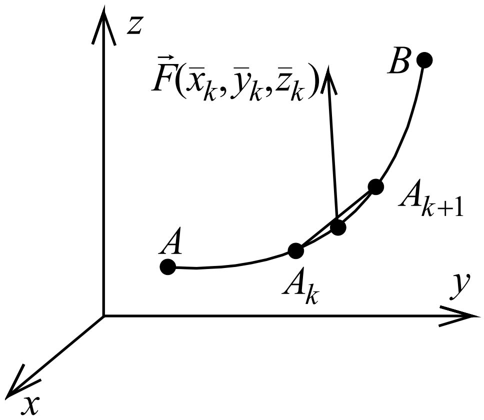


Рис. 3.9. К решению задачи

Задача. Материальная точка перемещается по кривой $\smile AB$ из точки A в точку B под действием переменной по величине и направлению силы $\vec{F}(x,y,z)$. Требуется найти работу $\vec{F}$ на криволинейном пути $\smile AB$.

▶ Разбиваем путь $\smile AB$ на столь малые части $\smile A_k A_{k+1}$, чтобы каждую такую часть можно было считать приближенно прямолинейной, а силу $\vec{F}(x,y,z)$, в пределах этой части, считать приближенно постоянной по величине и направлению. Тогда работа силы $\vec{F}(x,y,z)$ на элементарном участке $\smile A_k A_{k+1}$ приближенно будет равна: $\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\overrightarrow{\Delta l_k}$. Но

$$\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k) = F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{i} + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{j} + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\vec{k}\,,$$

$$\overrightarrow{\Delta l_k} = \Delta x_k\cdot\vec{i} + \Delta y_k\cdot\vec{j} + \Delta z_k\cdot\vec{k}\,.$$

Поэтому

$$\vec{F}(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\cdot\overrightarrow{\Delta l_k} = F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta x_k + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta y_k + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta z_k\,.$$

Следовательно, работа силы $\vec{F}$ на всем пути $\smile AB$ приближенно будет равна:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(F_x(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta x_k + F_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta y_k + F_z(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta z_k\Big). \qquad (4)$$

Предел суммы (4) при $\lambda\to 0$ будет давать точное значение работы силы $\vec{F}(x,y,z)$ на пути $\smile AB$. А этим пределом является

$$\int\limits_{\smile AB} F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz\,.$$

Таким образом, всякий криволинейный интеграл второго рода:

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

можно истолковать как работу, которую производит сила с проекциями P, Q, R на оси Ox, Oy, Oz соответственно, по перемещению материальной точки по пути $\smile AB$ из точки A в точку B.

Примеры на вычисление криволинейных интегралов второго рода.

1. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x+y)\,dx + 2z\,dy + xy\,dz$, где $\smile AB$ – линия, заданная уравнениями $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = 3 - t, \end{cases}$ причем точка A соответствует значению параметра $t = 1$, а точка B – значению параметра $t = 2$.

$$\blacktriangleright\ I = \int\limits_1^2 (t + t^2)\,dt + \int\limits_1^2 2(3-t)\cdot 2t\,dt + \int\limits_1^2 t^3\cdot(-dt) = \frac{35}{4}\,. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, где (l) – кривая, заданная

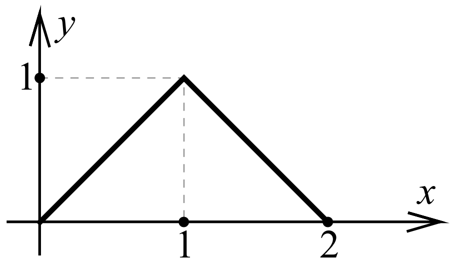


Рис. 3.10. К примеру 2

уравнением: $y = 1 - |1 - x|$, $x \in [0, 2]$. Интегрирование вдоль (l) ведется в направлении, соответствующем возрастанию параметра.

▶ Имеем:

$y = 1 - (1 - x) \;\Rightarrow\; y = x$, $x \in [0,1]$;

$y = 1 + (1 - x) \;\Rightarrow\; y = 2 - x$, $x \in [1,2]$;

$(l) = (l_1) \cup (l_2)$, где (l_1): $y = x$, $x \in [0,1]$, (l_2): $y = 2 - x$, $x \in [1,2]$.

$I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{(l_1)} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy,\ I_2 = \int\limits_{(l_2)} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy\,.$$

На (l_1): $y = x$, $dy = dx$, $x \in [0,1]$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_0^1 (x^2 + x^2)\,dx + 0\cdot dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

На (l_2): $y = 2 - x$, $x \in [1,2]$; $dy = -dx$. Поэтому

$$I_2=\int_1^2\left[x^2+(2-x)^2-x^2+(2-x)^2\right]dx=2\int_1^2(2-x)^2\,dx=-\frac{2}{3}(2-x)^3\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $I=\dfrac{4}{3}$. ◀

3. Вычислить $I=\int\limits_{(l)}\dfrac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, где (l) – окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода стрелки часов.

▶ Перейдем к параметрическому заданию кривой (l). Положим

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi],\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}dx&=-a\sin t\,dt,\\ dy&=a\cos t\,dt.\end{aligned}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{-a^2(\cos t+\sin t)\sin t-a^2(\cos t-\sin t)\cos t}{a^2}\,dt=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi. \blacktriangleleft$$

4. Вычислить $I=\int\limits_{OmAnO}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dy-dx$, где OmA – отрезок параболы $y=x^2$, OnA – отрезок прямой $y=x$.

▶ $I=I_1+I_2$, где $I_1=\int\limits_{\smile OmA}$, $I_2=\int\limits_{\smile AnO}$.

$\smile OmA$: $y=x^2$, $x\in[0,1]$, $dy=2x\,dx$. Поэтому

$$I_1=\int_0^1\operatorname{arctg}x\cdot 2x\,dx-dx=\left[\begin{array}{ll}u=\operatorname{arctg}x, & du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ 2x\,dx=dv, & v=x^2\end{array}\right]=$$

$$=\left(x^2\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx\right)-1=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-1=2\cdot\frac{\pi}{4}-2.$$

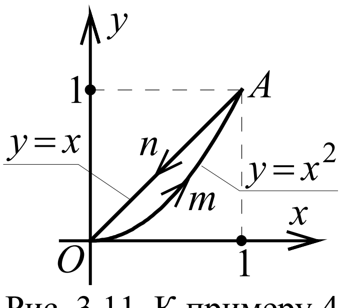


Рис. 3.11. К примеру 4

$\smile AnO$: $y=x$, x изменяется от 1 до 0; $dy=dx$. Поэтому

$$I_2=\int_1^0(\operatorname{arctg}1-1)\,dx=\int_1^0\left(\frac{\pi}{4}-1\right)dx=1-\frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$$I=2\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1. \blacktriangleleft$$

5. Вычислить $I = \int\limits_{(l)} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где (l) – контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

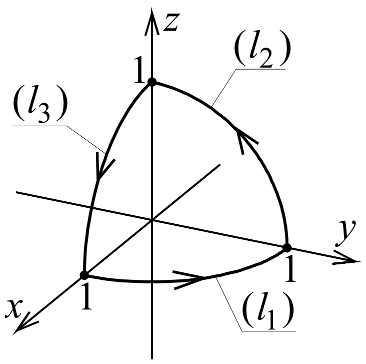


Рис. 3.12. К примеру 5

▶ $I = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \int\limits_{(l_1)}$; $I_2 = \int\limits_{(l_2)}$; $I_3 = \int\limits_{(l_3)}$.

(l_1): $x^2 + y^2 = 1$ (1-я четверть),

(l_2): $y^2 + z^2 = 1$ (1-я четверть),

(l_3): $z^2 + x^2 = 1$ (1-я четверть).

Контур (l_1) расположен в плоскости Oxy. Следовательно, на (l_1): $z = 0$; $dz = 0$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{(l_1)} y^2 dx - x^2 dy = \int\limits_1^0 (1 - x^2)\,dx - \int\limits_0^1 (1 - y^2)\,dy = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=1}^{x=0} - \left(y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

Контур (l_2) расположен в плоскости Oyz. Следовательно, на (l_2): $x = 0$, $dx = 0$.

$$I_2 = \int\limits_{(l_2)} z^2 dy - y^2 dz = \int\limits_1^0 (1 - y^2)\,dy - \int\limits_0^1 (1 - z^2)\,dz = -\frac{4}{3}.$$

Контур (l_3) расположен в плоскости Oxz. Следовательно, на (l_3): $y = 0$, $dy = 0$.

$$I_3 = \int\limits_{(l_3)} x^2 dz - z^2 dx = \int\limits_1^0 (1 - z^2)\,dz - \int\limits_0^1 (1 - x^2)\,dx = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем $I = -\frac{4}{3} \cdot 3 = -4$. ◀

§3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутым плоским кривым. Формула Грина

1°. Станем рассматривать криволинейные интегралы второго рода вида

$$\int\limits_{(K)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \tag{1}$$

где (K) – замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy. Если на контуре (K) выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на (K) взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования. В самом деле, пусть A и B – любые две различные точки на (K). Имеем:

$$\int\limits_{\smile AA} Pdx + Qdy = \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} Pdx + Qdy + \int\limits_{\smile B\mathrm{II}A} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{\smile B\mathrm{II}A} Pdx + Qdy + \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} Pdx + Qdy = \int\limits_{\smile BB} Pdx + Qdy.$$

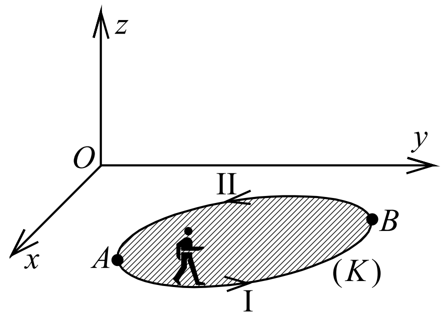


Рис. 3.13. К определению положительного обхода контура (K)

Замечание. Особенность обсуждаемого случая заключается в том, что указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки на этот раз не определяет направления интегрирования на (K). Конечно, можно было бы в каждом случае указывать особо, какое именно направление имеется в виду. Но обычно поступают иначе, а именно: из двух возможных направлений одно принимается за положительное, другое – за отрицательное.

Условимся за *положительное направление обхода контура* (K) принимать такое направление, когда наблюдатель (у которого направление от ног к голове совпадает с направлением оси Oz), обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K), слева от себя. Это соглашение относится к случаю правой системы координат.

В дальнейшем интеграл (1), взятый по (K) в положительном направлении, будем обозначать символом: $\oint\limits_{(K)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$.

2°. Формула Грина.

I. Пусть (D) – область, ограниченная замкнутым контуром (K). Пусть (K) состоит из отрезков прямых: $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и из кривых, заданных уравнениями: $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$; $y = \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Предполагается, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и такие, что $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Такую область (D) будем называть *областью типа I*. Пусть в $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $P(x, y)$, имеющая в $(\overline{D})$ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Рассмотрим двойной интеграл

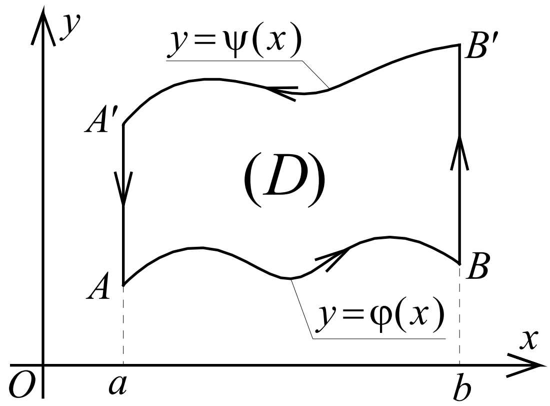


Рис. 3.14. К выводу формулы Грина

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy .$$

Мы знаем, что этот двойной интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \quad \Rightarrow \quad I = \int\limits_a^b \left[P(x, y)\Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[P\big(x, \psi(x)\big) - P\big(x, \varphi(x)\big) \right] dx = \int\limits_a^b P\big(x, \psi(x)\big)\, dx - \int\limits_a^b P\big(x, \varphi(x)\big)\, dx .$$

Но

$$\int\limits_a^b P\big(x, \psi(x)\big)\, dx = \int\limits_{\smile A'B'} P(x, y)\, dx = - \int\limits_{\smile B'A'} P(x, y)\, dx ,$$

$$\int\limits_a^b P\big(x, \varphi(x)\big)\, dx = \int\limits_{\smile AB} P(x, y)\, dx .$$

Поэтому $I = - \int\limits_{\smile B'A'} P(x, y)\, dx - \int\limits_{\smile AB} P(x, y)\, dx$. Так как $\int\limits_{\smile BB'} P(x, y)\, dx = 0$ и $\int\limits_{\smile A'A} P(x, y)\, dx = 0$, то можем написать

$$I = - \int\limits_{\smile AB} P\, dx - \int\limits_{\smile BB'} P\, dx - \int\limits_{\smile B'A'} P\, dx - \int\limits_{\smile A'A} P\, dx = - \oint\limits_{(K)} P(x, y)\, dx .$$

Таким образом, получили

$$\iint\limits_{(\overline{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{(K)} P(x, y)\, dx. \qquad (2)$$

Замечание. Формула (2) установлена для области типа I, но она верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Oy, может быть разложена на конечное число областей типа I (рис. 3.15).

В самом деле, для каждой области типа I, на которые разложена область (D), пишем формулу (2), а затем складываем соответствующие части полученных соотношений. Так как криволинейные интегралы по вспомогательным прямым линиям равны нулю, то получим формулу (2), в которой (D) – вся область, а (K) – контур всей этой области.

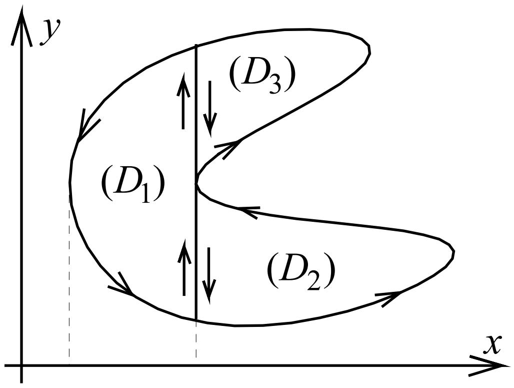


Рис. 3.15. К выводу формулы Грина

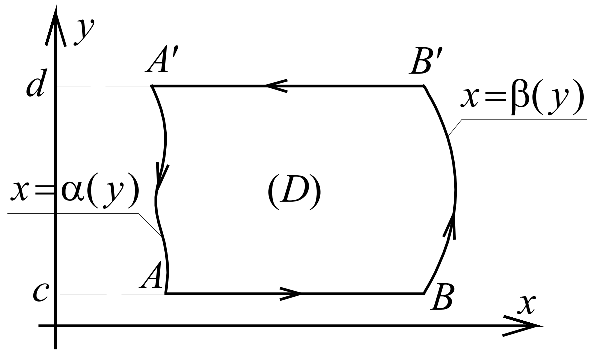


Рис. 3.16. К выводу формулы Грина

II. Пусть (D) – область, ограниченная замкнутым контуром (K), и пусть теперь (K) состоит из отрезков прямых $y = c$, $y = d$ $(c < d$ и из кривых, заданных уравнениями: $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на $[c, d]$ и такие, что $\alpha(y) < \beta(y)$, $y \in [c, d]$ (рис. 3.16). Такую область (D) будем называть *областью типа II*.

Пусть в $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $Q(x, y)$, имеющая в $(\overline{D})$ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Мы знаем, что этот интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$I = \int_c^d dy \int_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_c^d \left[Q(x, y)\Big|_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} \right] dy =$$

$$= \int_c^d Q\big(\beta(y), y\big)\, dy - \int_c^d Q\big(\alpha(y), y\big)\, dy.$$

Но

$$\int_c^d Q\big(\beta(y), y\big)\,dy = \int_{\smile BB'} Q(x,y)\,dy;$$

$$\int_c^d Q\big(\alpha(y), y\big)\,dy = \int_{\smile AA'} Q(x,y)\,dy = -\int_{\smile A'A} Q(x,y)\,dy.$$

Поэтому $I = \int_{\smile BB'} Q(x,y)\,dy + \int_{\smile A'A} Q(x,y)\,dy$. Так как $\int_{\smile AB} Q(x,y)\,dy = 0$ и $\int_{\smile B'A'} Q(x,y)\,dy = 0$, то можем написать

$$I = \int_{\smile AB} Q(x,y)\,dy + \int_{\smile BB'} Q(x,y)\,dy + \int_{\smile B'A'} Q(x,y)\,dy + \int_{\smile A'A} Q(x,y)\,dy = \oint_{(K)} Q(x,y)\,dy.$$

Таким образом, получили:

$$\iint_{(\overline{D})} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \oint_{(K)} Q(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Замечание. Формула (3) верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Ox, разлагается на конечное число областей типа II. Это устанавливается совершенно аналогично тому, как это сделано в предыдущем замечании.

Пусть область (D) такая, что она прямыми линиями, параллельными оси Oy, разлагается на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox – на конечное число областей типа II. Пусть в $(\overline{D})$ заданы функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывные там вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда верны одновременно формулы (2) и (3). Вычитая из формулы (3) соответствующие части формулы (2), получим

$$\oint_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{(\overline{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4}$$

(4) – *формула Грина*. Она преобразует криволинейный интеграл второго рода по замкнутому самонепересекающемуся контуру в двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Определение 1.

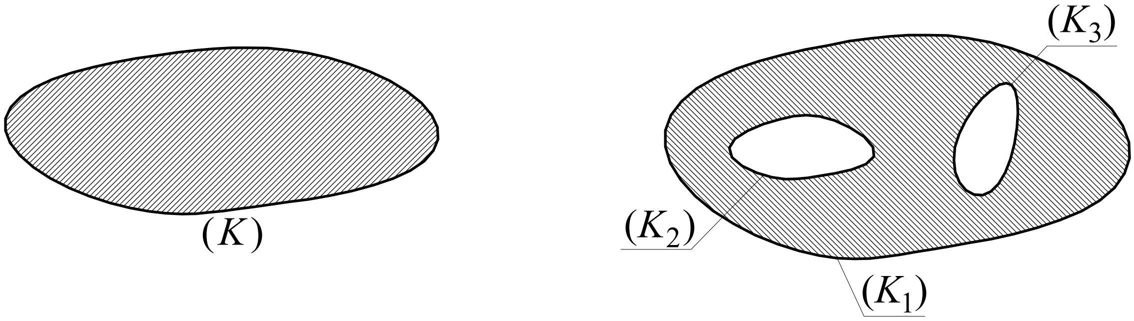
1. Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется *односвязной*.

2. Область, ограниченная замкнутым самонепересекающимся контуром (K_1) и $(n-1)$ замкнутыми самонепересекающимися контурами (K_2), (K_3), … , (K_n), лежащими внутри (K_1) и вне друг друга, называется n-связной.

Теорема. Формула Грина

$$\oint\limits_{(K)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{(\overline{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (5)$$

верна и для многосвязной области, если под контуром (K) понимать объединение всех контуров (K_1), (K_2), … , (K_n), ограничивающих область (D), причем направление интегрирования такое, что наблюдатель, обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K), слева от себя (система координат предполагается правой).



Односвязная область Трехсвязная область

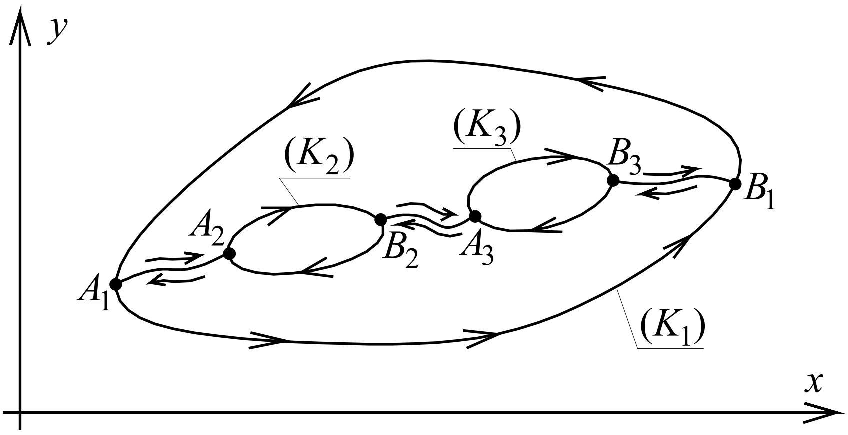


Рис. 3.17. К выводу формулы Грина для многосвязных областей

▶ Рассмотрим для простоты трехсвязную область (D). Возьмем на (K_1) точки A_1 и B_1; на (K_2) – точки A_2 и B_2; на (K_3) – точки A_3 и B_3. Проведем линии: $\smile A_1A_2$; $\smile B_2A_3$; $\smile B_3B_1$. Тогда область (D) разобьется на две односвязные области. Написав формулу Грина для каждой из этих двух односвязных областей и сложив результаты, мы получим формулу (5). (По каждой вспомогательной кривой: $\smile A_1A_2$, $\smile B_2A_3$, $\smile B_3B_1$ интегрирование ведется дважды в двух противоположных направлениях. Следовательно, криволинейные интегралы по вспомогательным кривым взаимно уничтожаются.)

§4. Вопрос о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть (D) – область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром (K) (значит, (D) – односвязная область). Пусть в (D) заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

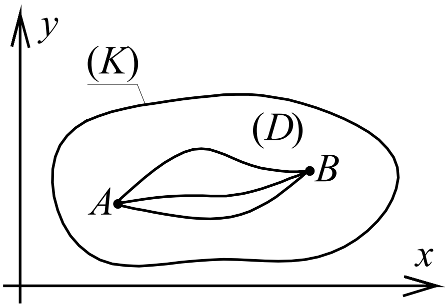


Рис. 3.18. К определению интеграла, не зависящего от формы пути

Будем говорить, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в (D) *пару типа «α»*, если криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\smile AB} P\,dx + Q\,dy$, взятый по незамкнутому пути $\smile AB$, целиком лежащему в (D), не зависит от формы пути (а зависит только от концов пути).

Будем говорить, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в (D) *пару типа «β»*, если для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C), целиком лежащего в (D), оказывается: $\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = 0$.

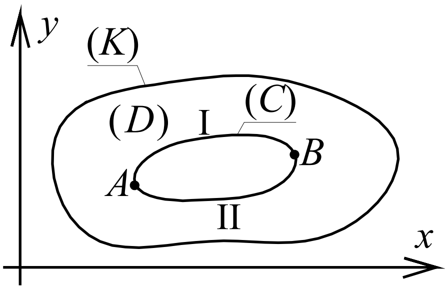


Рис. 3.19. К доказательству леммы 1

Лемма 1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в области (D) пару типа «α», то они образуют в (D) также и пару типа «β».

▶ Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа «α» в (D). Возьмем в (D) любой замкнутый самонепересекающийся контур (C). Выберем и закрепим на (C) любые две точки A и B. Эти точки разобьют (C) на две дуги: $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$. Имеем:

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\smile B\mathrm{I}A} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy. \qquad (1)$$

У нас P и Q – пара типа «α» в (D). Поэтому

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy.$$

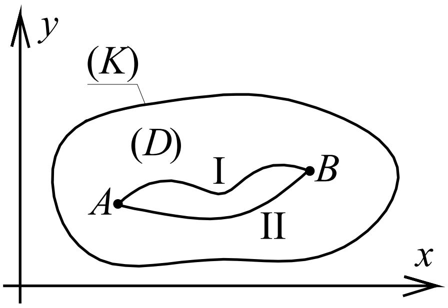


Рис. 3.20а. К доказательству леммы 2

А тогда из (1) следует, что $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$. Так как (C) – любой замкнутый самонепересекающийся контур, лежащий в (D), то последнее означает, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в (D). ◂

Лемма 2. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в области (D) пару типа «β», то они образуют в (D) также и пару типа «α».

▸ Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в (D). Возьмем в (D) любые две точки A и B и соединим их двумя различными линиями: $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$, целиком лежащими в (D). Лемма 2 будет доказана, если показать, что

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy. \tag{2}$$

Установим соотношение (2) в следующих двух простых случаях.

1) Линии $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$ не имеют других общих точек, кроме точек A и B (см. рис. 3.20а). В этом случае наши линии образуют замкнутый самонепересекающийся контур. Так как функции P и Q – пара типа «β» в (D), то

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{II}B\mathrm{I}A} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\smile B\mathrm{I}A} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy.$$

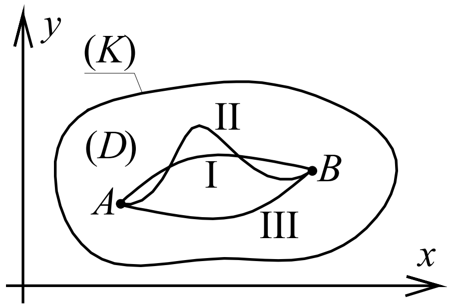


Рис. 3.20б. К доказательству леммы 2

Видим, что соотношение (2) в этом случае установлено.

2) Линии $\smile A\,\mathrm{I}\,B$ и $\smile A\,\mathrm{II}\,B$ кроме точек A и B имеют еще и другие общие точки, но существует линия $\smile A\,\mathrm{III}\,B$, которая пересекается с ними только в точках A и B (см. рис. 3.20б). Тогда, по доказанному в случае 1), имеем:

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{III}B} P\,dx + Q\,dy, \qquad \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{III}B} P\,dx + Q\,dy,$$

а значит, и

$$\int\limits_{\smile A\mathrm{I}B} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\smile A\mathrm{II}B} P\,dx + Q\,dy.$$

Видим, что соотношение (2) установлено и в этом случае.

3) В более сложных случаях утверждение леммы 2 принимаем без доказательства. Рис. 3.20в – пример как раз того случая, который не подходит ни к 1), ни к 2). ◀

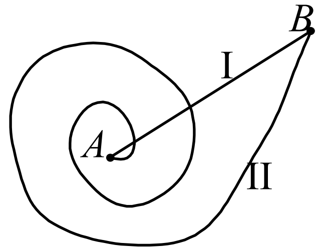


Рис. 3.20в. К лемме 2

Следствие. Свойство пар функций иметь в области (D) тип «α» равносильно свойству иметь тип «β».

Теорема. Пусть в односвязной области (D) заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны в (D) и имеют там непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ были парой типа «β» (а значит, и парой типа «α») в (D), необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

▶ *Необходимость.* Дано: $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в (D). Требуется доказать, что $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D).

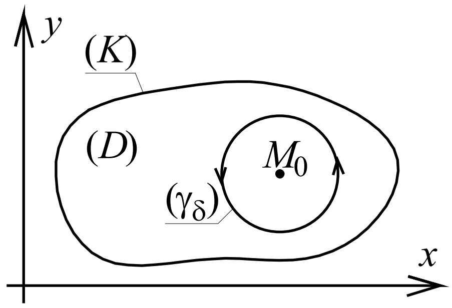


Рис. 3.21. К доказательству теоремы

Рассуждаем от противного. Допустим, что соотношение $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в (D). Но тогда в (D) имеется точка $M_0(x_0,y_0)$ такая, что $\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(\bullet)M_0}\neq 0$. Пусть для определенности $\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(\bullet)M_0}>0$. Так как $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ – функция непрерывная в (D), то по теореме о стабильности знака существует $\overline{u}_\delta(M_0)$ такая, что $\overline{u}_\delta(M_0)\subset(D)$ и что $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}>0$ в $\overline{u}_\delta(M_0)$ ($\overline{u}_\delta(M_0)$ – замкнутый круг радиуса δ с центром в точке M_0; (γ_δ) – контур этого круга). Так как $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\in C\big(\overline{u}_\delta(M_0)\big)$, то эта разность достигает в $\overline{u}_\delta(M_0)$ своего наименьшего m значения. Ясно, что $m>0$.

По формуле Грина имеем

$$\oint\limits_{(\gamma_\delta)} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(\overline{u}_\delta(M_0))}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\geq m\cdot\iint\limits_{(\overline{u}_\delta(M_0))}dxdy=m\cdot\pi\delta^2>0,$$

а это невозможно, ибо $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в (D). Таким образом, предположение, что соотношение $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в (D), приводит к противоречию.

Достаточность. Дано: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D). Требуется доказать, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ образуют в (D) пару типа «β».

Возьмем любой замкнутый самонепересекающийся контур (C), целиком лежащий в (D). Пусть (Δ) – область, ограниченная контуром (C). По формуле Грина имеем

$$\oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(\bar{\Delta})}\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ в } (\bar{\Delta})}dxdy=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=0 \;\Rightarrow\;$$ функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в (D). ◄

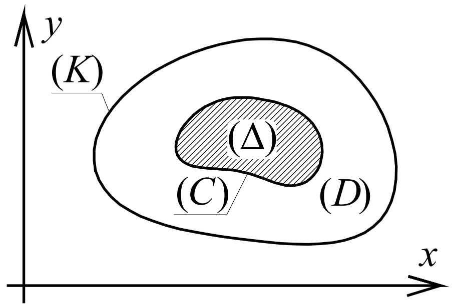


Рис. 3.22. К доказательству теоремы

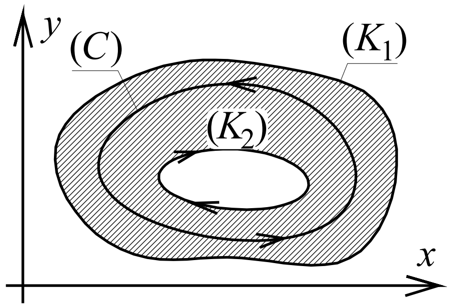


Рис. 3.23. К замечанию

Замечание. Важно подчеркнуть, что доказанное утверждение верно при условии, что область (D) – односвязная.

Действительно, если бы область (D) была, например, двухсвязной с внешним контуром (K_1) и внутренним контуром (K_2) (см. рис. 3.23), то для контура (C), охватывающего контур (K_2), мы имели бы:

$$\int\limits_{(C),\text{ обл. слева}} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{(K_2),\text{ обл. слева}} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{(\bar{\Delta})}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

ибо $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$ всюду в (D), а значит, и в $(\bar{\Delta})$ ((Δ) – область, ограниченная контурами (C) и (K_2)). Значит,

$$\int\limits_{(C)} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{(K_2)} P\,dx+Q\,dy=0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{(C)} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{(K_2)} P\,dx+Q\,dy=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(K_2)} P\,dx + Q\,dy \quad (\neq 0\text{, вообще говоря}).$$

Значит, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не есть пара типа «β» в (D).

Пример. Пусть $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Эти функции определены и непрерывны на плоскости Oxy всюду, за исключением точки $O(0,0)$.

Имеем $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ всюду на плоскости Oxy, кроме точки $O(0,0)$. Значит, для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C), не охватывающего начала координат, будет:

$$\oint\limits_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{(C)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0,$$

так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – пара типа «β» в области (D), ограниченной контуром (K) (см. рис. 3.24).

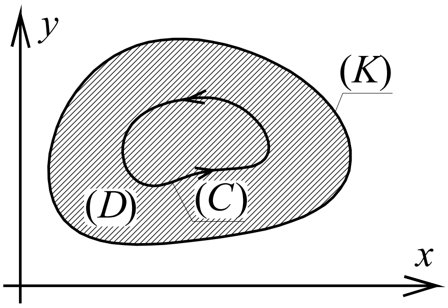


Рис. 3.24. К примеру

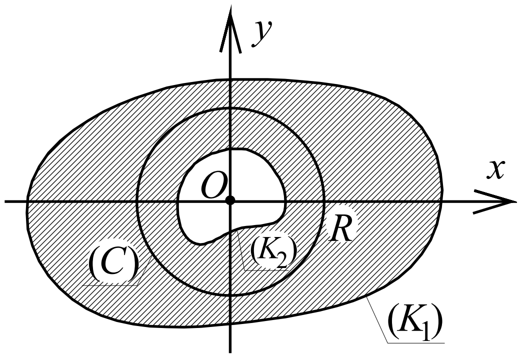


Рис. 3.25. К примеру

Пусть (C) – окружность радиуса R с центром в точке $O(0,0)$. Вычислим $I = \oint\limits_{(C)} \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$. Параметрическими уравнениями (C) будут:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

А тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t}{R^2}\,dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi \ (\neq 0).$$

$P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в области (D_1), ограниченной контуром (K_1), не есть пара типа «β», ибо нарушена непрерывность в точке $O(0,0)$, расположенной внутри контура (K_1). Если же выключить точку $O(0,0)$, окружив ее контуром

(K_2) (см. рис. 3.25), то условие непрерывности в области (D_2), ограниченной контурами (K_1) и (K_2), будет иметь место, но нарушится односвязность.

Дополнение. Пусть выполнены все условия теоремы, а значит, $\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по любому незамкнутому пути $\smile AB$, целиком лежащему в (D), не зависит от формы пути, а зависит только от концов пути. Пусть функция $u(x,y)$ определена в (D) и такая, что

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y)$$

(т. е. выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом функции $u(x,y)$). Тогда

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$$

(здесь x_A, y_A – координаты точки A, а x_B, y_B – координаты точки B).

▶ По условию $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y)$. Это значит, что

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; \quad Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$I = \int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\smile AB} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Для вычисления интеграла I введем параметрические уравнения $\smile AB$. Пусть они такие: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$, причем значению $t = p$ отвечает точка A, а значению $t = q$ отвечает точка B. Будем иметь тогда

$$I = \int\limits_p^q \left[\frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t))}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t))}{\partial y} \cdot \psi'(t) \right] dt.$$

Заметив это, рассмотрим функцию $f(t) = u(\varphi(t),\psi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$f'(t) = \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t))}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u(\varphi(t),\psi(t))}{\partial y} \cdot \psi'(t).$$

Следовательно, предыдущее выражение для I принимает вид

$$I = \int\limits_p^q f'(t)\,dt = f(q) - f(p).$$

Но $f(q) = u\big(\varphi(q), \psi(q)\big) = u(x_B, y_B)$; $f(p) = u\big(\varphi(p), \psi(p)\big) = u(x_A, y_A)$ (у нас $\varphi(p) = x_A$, $\psi(p) = y_A$, $\varphi(q) = x_B$, $\psi(q) = y_B$). Поэтому

$$I = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A). \blacktriangleleft$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int\limits_{\smile AB} P\,dx + Q\,dy$ нужно найти функцию $u(x, y)$, первообразную для дифференциала $P\,dx + Q\,dy$ и составить разность значений этой первообразной в конце и в начале пути интегрирования. Ясно, что это – аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Примеры к §4.

1. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x - y)(dx - dy)$, где $\smile AB$ – любая кривая, соединяющая точки $A(1, -1)$ и $B(1, 1)$.

$\blacktriangleright$ В этом случае $P(x, y) = x - y$; $Q(x, y) = y - x \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$ на всей плоскости. Следовательно, в любой односвязной области, расположенной в плоскости Oxy, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Так как

$$(x - y)(dx - dy) = (x - y)\cdot d(x - y) = \frac{1}{2} d\Big((x - y)^2\Big),$$

то такой функцией $u(x, y)$ будет: $u(x, y) = \dfrac{1}{2}(x - y)^2$. Поэтому

$$I = \left.\frac{(x - y)^2}{2}\right|_{(1,-1)}^{(1,1)} = 0 - \frac{2^2}{2} = -2. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$, где $\smile AB$ – любая кривая, соединяющая точки $A(-2, -1)$ и $B(3, 0)$.

$\blacktriangleright$ Здесь $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$; $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$

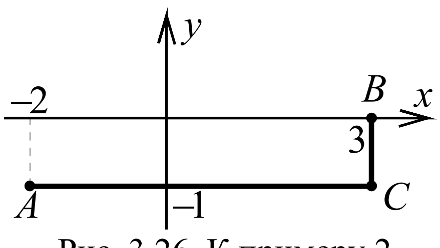


Рис. 3.26. К примеру 2

на всей плоскости Oxy. Следовательно, I не зависит от формы пути интегрирования, соединяющего точки A и B. А раз так, то возьмем, например, в качестве пути $\smile AB$ ломаную $AC \cup CB$ (см. рис. 3.26). Тогда

$$I = \int\limits_{\smile AB} = \int\limits_{\smile AC} + \int\limits_{\smile CB} \quad (= I_1 + I_2).$$

Имеем:

$$\smile AC = \begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad dy = 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\smile AC} = \int\limits_{-2}^{3} (x^4 - 4x)\,dx + 0 = \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2 \right) \Bigg|_{-2}^{3} = 45.$$

Имеем:

$$\smile CB = \begin{cases} x = 3 \\ -1 \le y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad dx = 0.$$

Поэтому

$$I_2 = \int\limits_{\smile CB} = \int\limits_{-1}^{0} (54y^2 - 5y^4)\,dy = (18y^3 - y^5)\Big|_{-1}^{0} = 17.$$

Следовательно, $I = 45 + 17 = 62$. ◀

3. Вычислить $I = \int\limits_{\smile AB} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$, где $\smile AB$ – любая кривая, соединяющая точки $A(1, \pi)$ и $B(2, \pi)$ и не пересекающая ось Oy.

▶ Здесь

$$P(x, y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}; \quad Q(x, y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}, \; x \ne 0.$$

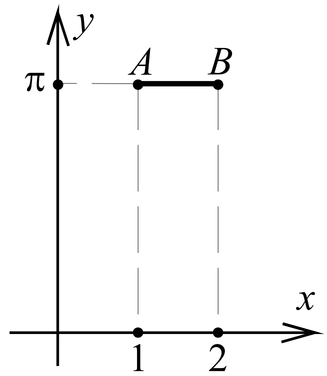


Рис. 3.27. К примеру 3

Видим, что $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy, кроме точек, лежащих на оси Oy, и что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ для $x \ne 0$. Следовательно, I не зависит от формы пути $\smile AB$. Требуется только, чтобы $\smile AB$ не пересекала ось Oy. А раз так, то возьмем, например, в качестве $\smile AB$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки A и B (см. рис. 3.27). Так как

$$\smile AB = \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ y = \pi \end{cases} \Rightarrow \quad dy = 0,$$

то будем иметь

$$I = \int\limits_{1}^{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right) dx + 0 = \left(x + \pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = 1 + \pi. ◀$$

§5. Площадь плоской фигуры в криволинейных координатах

1°. Вычисление площади плоской фигуры при помощи криволинейного интеграла второго рода.

Пусть (K) – простой, замкнутый самонепересекающийся контур, ограничивающий область (D).

1) Пусть область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy, она может быть разложена на конечное число областей типа I. Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_{(K)} y\,dx$ (это – частный случай интеграла $\oint\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$, когда $P \equiv y$, а $Q \equiv 0$). Преобразуя $\oint\limits_{(K)} y\,dx$ по формуле Грина, получим $\oint\limits_{(K)} y\,dx = -\iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = -F_{\overline{D}} \;\Rightarrow$

$$F_{\overline{D}} = -\oint\limits_{(K)} y\,dx. \tag{1}$$

2) Пусть теперь область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Ox, ее можно разложить на конечное число областей типа II. Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_{(K)} x\,dy$ (это – частный случай интеграла $\oint\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$, когда $P \equiv 0$, $Q \equiv x$). Преобразуя $\oint\limits_{(K)} x\,dy$ по формуле Грина, получим: $\oint\limits_{(K)} x\,dy = \iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = F_{\overline{D}} \;\Rightarrow$

$$F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K)} x\,dy. \tag{2}$$

3) Пусть, наконец, область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy, она может быть разложена на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox, – на конечное число областей типа II. Тогда будут верны одновременно формулы (1) и (2). Сложив соответствующие части этих формул, получим

$$2F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx \quad \Rightarrow \quad F_{\overline{D}} = \frac{1}{2}\oint\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx. \tag{3}$$

2°. Формула для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в плоскостях Oxy и $O\xi\eta$ расположены области (D) и (Δ) с простыми контурами (K_D) и (K_Δ). Если дано правило, которое каждой точке (ξ,η) из $(\overline{\Delta})$ сопоставляет о д н у и т о л ь к о о д н у точку (x,y) из $(\overline{D})$, причем каждая точка (x,y) из $(\overline{D})$ оказывается сопоставленной о д н о й и т о л ь к о о д н о й точке из $(\overline{\Delta})$, то говорят, что между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ установлено *взаимно-однозначное соответствие*.

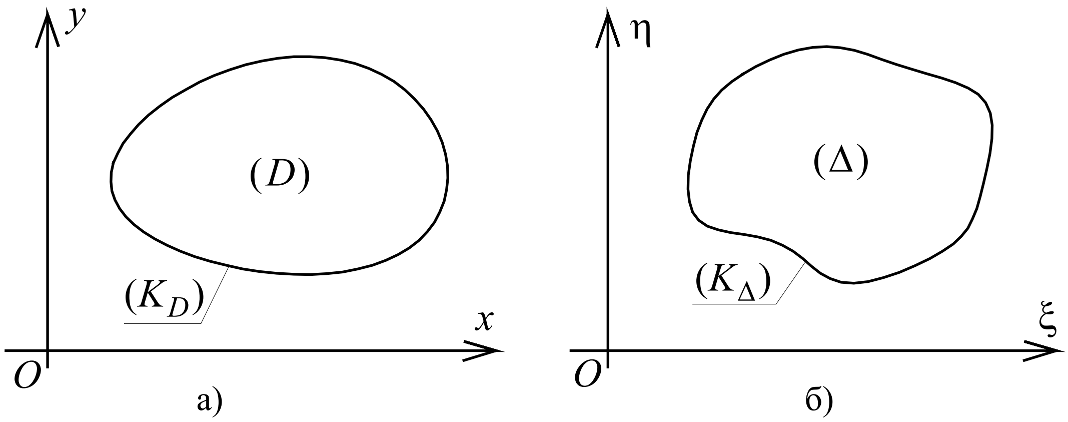


Рис. 3.28. К выводу формулы для площади в криволинейных координатах

Если (ξ,η) и (x,y) есть взаимно-соответствующие точки, то

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta). \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения (4) есть уравнения преобразования $(\overline{\Delta})$ в $(\overline{D})$. В силу взаимной однозначности соответствия между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$, система (4) однозначно разрешима относительно ξ и η. Поэтому

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{5}$$

Впредь функции $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ будем считать непрерывными в $(\overline{\Delta})$, а функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ – непрерывными в $(\overline{D})$. Покажем, что тогда непрерывные кривые, лежащие, например, в $(\overline{\Delta})$, преобразуются в непрерывные кривые, лежащие в $(\overline{D})$.

В самом деле, пусть (λ) – непрерывная кривая, лежащая в $(\overline{\Delta})$, и пусть ее параметрические уравнения такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases}$ где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – функции, определенные и непрерывные в промежутке $[p,q]$. Тогда точки, соответствующие точкам кривой (λ), имеют координаты:

$$\begin{cases} x = x\big(\alpha(t),\beta(t)\big), \\ y = y\big(\alpha(t),\beta(t)\big). \end{cases} \tag{6}$$

Так как правые части в уравнениях (6) есть функции непрерывные в промежутке $[p,q]$, как суперпозиции непрерывных функций, то заключаем, что непрерывная кривая (λ) преобразуется в непрерывную же кривую (l), лежащую в области $(\overline{D})$.

Задача. Зная область $(\overline{\Delta})$ и формулы преобразования области $(\overline{\Delta})$ в область $(\overline{D})$: $\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases}$ найти площадь $F_{\overline{D}}$ области $(\overline{D})$.

▶ Решать эту задачу будем при следующих предположениях.

1) Обе области $(\overline{\Delta})$ и $(\overline{D})$ прямыми, параллельными координатным осям, разлагаются на конечное число областей как типа I, так и типа II.

2) Контуру (K_Δ) соответствует контур (K_D), причем положительному обходу (K_Δ) соответствует определенный (положительный или отрицательный) обход (K_D).

3) Функции $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$ имеют в $(\overline{\Delta})$ непрерывные частные производные первого порядка x'_ξ, x'_η, y'_ξ, y'_η, а одна из этих функций имеет в $(\overline{\Delta})$ непрерывные смешанные производные второго порядка. Пусть, например, в $(\overline{\Delta})$ существуют и непрерывны $y''_{\xi\eta}$ и $y''_{\eta\xi}$ ($\Rightarrow$ $y''_{\eta\xi} = y''_{\xi\eta}$ в $(\overline{\Delta})$).

4) Определитель $J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix}$ всюду в $(\overline{\Delta})$ сохраняет знак ($J(\xi,\eta)$ – *определитель Якоби*, или *якобиан*).

Решение. Мы знаем, что $F_{\overline{D}} = \oint\limits_{(K_D)} x\,dy$. Выразим этот криволинейный интеграл через обыкновенный определенный интеграл. Пусть параметрические уравнения контура (K_Δ) такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases}$ $t \in [p,q]$, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – функции, определенные на $[p,q]$ и имеющие там непрерывные производные $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$. Тогда параметрические уравнения контура (K_D) будут такими:

$$\begin{cases} x = x\big(\alpha(t),\beta(t)\big), \\ y = y\big(\alpha(t),\beta(t)\big), \end{cases} \quad t \in [p,q].$$

Пусть для определенности изменению t от p до q соответствует положительный обход контура (K_D). Тогда

$$F_{\overline{D}} = \int_p^q x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot\Big[y'_\xi\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot\alpha'(t) + y'_\eta\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot\beta'(t)\Big]dt. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь следующий криволинейный интеграл второго рода по контуру (K_Δ):

$$I = \oint_{(K_\Delta)} x(\xi,\eta)\cdot\Big[y'_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + y'_\eta(\xi,\eta)\,d\eta\Big]. \qquad (8)$$

Чтобы выразить I обыкновенным определенным интегралом, нужно использовать параметрические уравнения контура (K_Δ). Сделав это, мы придем в точности к интегралу, стоящему в правой части (7), если только положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу контура (K_Δ). Если же положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ), то мы получим интеграл стоящий в правой части (7), взятый со знаком «минус». Таким образом,

$$F_{\overline{D}} = \pm I. \qquad (9)$$

Преобразуем интеграл I (см. (8)) по формуле Грина

$$\oint_{(K_\Delta)} P(\xi,\eta)\,d\xi + Q(\xi,\eta)\,d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta.$$

У нас в I: $P = x(\xi,\eta)\cdot y'_\xi(\xi,\eta)$, $Q = x(\xi,\eta)\cdot y'_\eta(\xi,\eta)$. Значит,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial\xi} &= x'_\xi\cdot y'_\eta + x\cdot y''_{\eta\xi}\\ \frac{\partial P}{\partial\eta} &= x'_\eta\cdot y'_\xi + x\cdot y''_{\xi\eta}\end{aligned}\right| \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta} = x'_\xi\cdot y'_\eta - x'_\eta\cdot y'_\xi = J(\xi,\eta).$$

Поэтому

$$I = \iint_{(\overline{\Delta})}(x'_\xi\cdot y'_\eta - x'_\eta\cdot y'_\xi)\,d\xi d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

А, следовательно,

$$F_{\overline{D}} = \pm\iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

У нас по условию $J(\xi,\eta)$ всюду в $(\overline{\Delta})$ сохраняет знак. Поэтому, принимая во внимание, что $F_{\overline{D}} > 0$, можем написать

$$F_{\overline{D}} = \iint_{(\overline{\Delta})} \big|J(\xi,\eta)\big|\,d\xi d\eta. \blacktriangleleft \qquad (10)$$

Из рассуждений, проведенных выше, следует, что $J(\xi,\eta) > 0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу контура (K_Δ) и что $J(\xi,\eta)<0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ).

К двойному интегралу, стоящему в правой части (10), применим частный случай теоремы о среднем. Получим.

$$F_{\overline{D}}=\left|J(\overline{\xi},\overline{\eta})\right|\cdot F_{\overline{\Delta}},\ \text{где}\ \ (\overline{\xi},\overline{\eta})\in(\overline{\Delta}). \tag{11}$$

Из (11) находим $\dfrac{F_{\overline{D}}}{F_{\overline{\Delta}}}=\left|J(\overline{\xi},\overline{\eta})\right|$. Станем сжимать область $(\overline{\Delta})$ по всем направлениям в некоторую точку (ξ,η) (тогда $(\overline{\xi},\overline{\eta})\to(\xi,\eta)$). В силу непрерывности отображения область (D) будет при этом сжиматься в точку (x,y), которая соответствует точке (ξ,η). Следовательно,

$$\left|J(\xi,\eta)\right|=\lim_{F_{\overline{\Delta}}\to 0}\frac{F_{\overline{D}}}{F_{\overline{\Delta}}}.$$

Таким образом, модуль якобиана есть коэффициент искажения площадей при переходе из плоскости $O\xi\eta$ в плоскость Oxy.

Замечание. Формула (10) остается верной и в том случае, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi,\eta)$ остается ограниченным всюду в $(\overline{\Delta})$.

§6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ установлено взаимно-однозначное соответствие посредством формул $\begin{cases}x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta).\end{cases}$ Считаем, что выполняются все условия, указанные при выводе формулы для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в области $(\overline{D})$ задана непрерывная функция $f(x,y)$. Мы знаем, что тогда существует двойной интеграл $I=\iint\limits_{(\overline{D})}f(x,y)\,dxdy$. Требуется выразить I через некоторый двойной интеграл по области $(\overline{\Delta})$.

▶ Составим интегральную сумму Римана для двойного интеграла I. Для этого произвольной сетью простых кривых нужно разбить область $(\overline{D})$ на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, … , $(\overline{D}_n)$; в каждой части $(\overline{D}_k)$ взять произвольную точку (x_k,y_k), и тогда $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\cdot F_{\overline{D}_k}$.

Заметим, что, проводя в $(\overline{D})$ сеть простых кривых, мы, в силу однозначности отображения, будем проводить также сеть простых кривых в области $(\overline{\Delta})$, так что $(\overline{\Delta})$ разобьется на части $(\overline{\Delta}_1)$, $(\overline{\Delta}_2)$, … , $(\overline{\Delta}_n)$.

По формуле для площади плоской фигуры в криволинейных координатах, имеем

$$F_{\overline{D}_k} = \iint\limits_{(\overline{\Delta}_k)} |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta .$$

Применяя к двойному интегралу, стоящему в правой части, частный случай теоремы о среднем, получим

$$F_{\overline{D}_k} = \left|J(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)\right| \cdot F_{\overline{\Delta}_k}, \text{ где точка } (\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k) \in (\overline{\Delta}_k).$$

А тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \left|J(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)\right| \cdot F_{\overline{\Delta}_k} .$$

Было отмечено, что у нас двойной интеграл I существует. Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = I$ при любом выборе точек (x_k, y_k) в $(\overline{D}_k)$. В частности, в качестве точек (x_k, y_k) можно взять точки, соответствующие точкам $(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)$, т. е. положить $x_k = x(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)$, $y_k = y(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)$. При таком выборе точек (x_k, y_k) будем иметь:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k), y(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)\right) \cdot \left|J(\overline{\xi}_k,\overline{\eta}_k)\right| \cdot F_{\overline{\Delta}_k} .$$

Сумма, стоящая здесь в правой части, есть сумма Римана для двойного интеграла

$$I_* = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f\left(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\right) \cdot |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta,$$

причем I_* существует, ибо подынтегральная функция в нем есть функция непрерывная в $(\overline{\Delta})$.

Отметим, что, измельчая дробление в $(\overline{D})$, мы тем самым будем измельчать дробление и в $(\overline{\Delta})$, ибо функции, осуществляющие взаимно-однозначное отображение областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ друг на друга, есть непрерывные функции. Но тогда $\sigma \to I_*$ при $\lambda \to 0$. А так как $\sigma \to I$ при $\lambda \to 0$, то получаем $I = I_*$, т. е.

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f\left(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\right) \cdot |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta . \qquad (1)$$

Частный случай. Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\iint\limits_{(\overline{D})} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi .$$

Замечание. Формула (1) остается верной и тогда, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\overline{D})$ и $(\overline{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi, \eta)$ остается ограниченным всюду в $(\overline{\Delta})$.

§7. Примеры к главе 3

Пример 1 (интеграл Эйлера). Вычислить $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (попутно будет доказана сходимость этого несобственного интеграла).

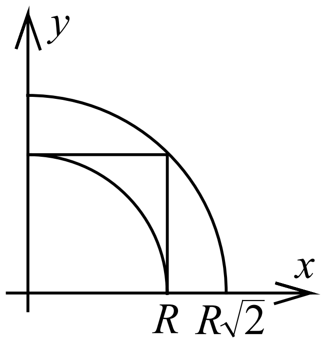


Рис. 3.29.
К вычислению интеграла Эйлера

▶ Введем в рассмотрение функцию $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ и области $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, $(\overline{D}_3)$, где:

$(\overline{D}_1)$ – четверть круга: $x^2 + y^2 \le R^2$, лежащая в первой четверти;

$(\overline{D}_2)$ – квадрат: $\begin{cases} 0 \le x \le R, \\ 0 \le y \le R; \end{cases}$

$(\overline{D}_3)$ – четверть круга: $x^2 + y^2 \le 2R^2$, лежащая в первой четверти.

Ясно, что $(\overline{D}_1) \subset (\overline{D}_2) \subset (\overline{D}_3)$. Отсюда и из того, что $f(x, y) > 0$ следует:

$$\underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_1)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_1} \le \underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_2)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_2} \le \underbrace{\iint\limits_{(\overline{D}_3)} e^{-x^2-y^2}dxdy}_{=I_3} . \qquad (2)$$

Выразим двойной интеграл I_2 через повторный.

$$I_2 = \iint\limits_{(\overline{D}_2)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R e^{-x^2-y^2}dy = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx \int\limits_0^R e^{-y^2}dy =$$

$$= \left(\int\limits_0^R e^{-y^2}dy\right)\left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right) = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 .$$

Вычисление двойных интегралов I_1, I_3 будем производить, переходя к полярным координатам. Будем иметь

$$I_1 = \iint\limits_{(\overline{D}_1)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta}_1)} e^{-r^2}\,r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2}\,r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^R e^{-r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^R e^{-r^2}\,dr^2 = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right);$$

$$I_3 = \iint\limits_{(\overline{D}_3)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2}\,r\,dr = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Теперь неравенство (2) может быть записано в виде

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \le \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \le \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}\,.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $R \to +\infty$. Так как

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то по теореме о сжатой переменной заключаем, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак, получили $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Легко показать, что $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. ◀

Пример 2. В интеграле $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\overline{D})$ – круг $x^2+y^2 \le ax$ ($a>0$).

▶ $x^2+y^2 \le ax \;\Leftrightarrow\; \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4} \;\Rightarrow\; (\overline{D})$ – круг радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Положим

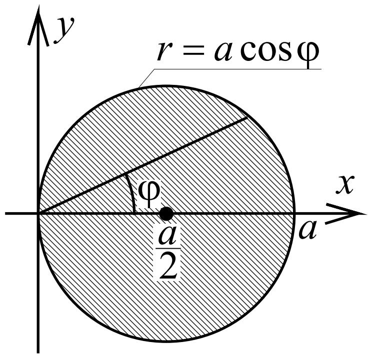


Рис. 3.30. К примеру 2

$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Окружность $x^2 + y^2 = ax$ в полярных координатах задается уравнением $r^2 = ar\cos\varphi \ \Rightarrow \ r = a\cos\varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Якобиан $J(r,\varphi) = r$.

Если внешнее интегрирование производить по φ, то промежутком изменения φ, будет $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, видим по рисунку 3.30, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\cos\varphi$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr. \blacktriangleleft$$

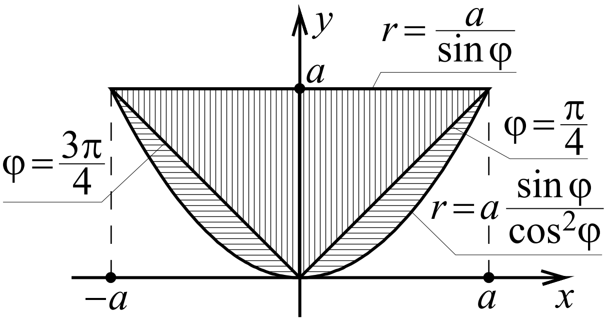


Рис. 3.31. К примеру 3

Пример 3. В интеграле $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\overline{D})$ – параболический сегмент $\begin{cases} -a \le x \le a, \\ \dfrac{x^2}{a} \le y \le a. \end{cases}$

$\blacktriangleright$ В полярных координатах отрезок прямой $y = a$, $-a \le x \le a$, определяется уравнением: $r = \dfrac{a}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, а кусок параболы $y = \dfrac{x^2}{a}$, $x \in [-a, a]$, – уравнением: $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Будем производить внешнее интегрирование по φ. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, видим по рисунку 3.31, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = \dfrac{a}{\sin\varphi}$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Будем, следовательно, иметь

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,dr+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=\frac{a}{\sin\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,dr+$$

$$+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{r=0}^{r=a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,dr\,.\ \blacktriangleleft$$

Пример 4. В интеграле $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

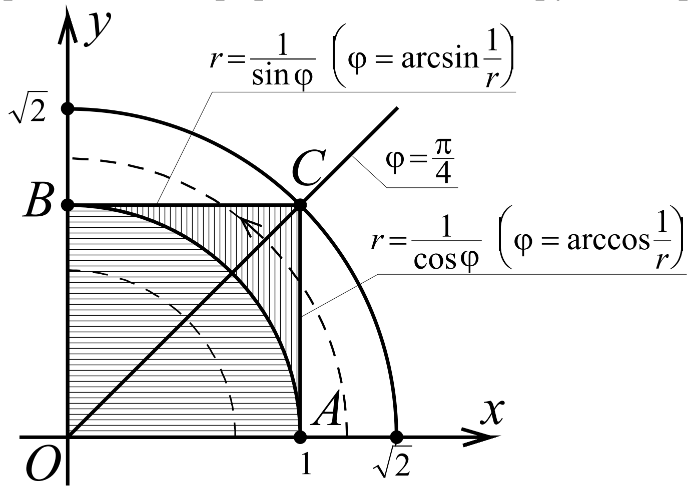


Рис. 3.32. К примеру 4

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями $(\overline{D})=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1.\end{cases}$ При замене $\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}$ $J(r,\varphi)=r$.

Отрезок $OA=\begin{cases}y=0,\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=0,\\ 0\le r\le 1.\end{cases}$

Отрезок $OB=\begin{cases}x=0,\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{2},\\ 0\le r\le 1.\end{cases}$

Отрезок $AC=\begin{cases}x=1,\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{1}{\cos\varphi},\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi=\arccos\frac{1}{r},\\ 1\le r\le\sqrt{2}.\end{cases}$

Отрезок $BC = \begin{cases} y = 1, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sin\varphi}, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arcsin\dfrac{1}{r}, \\ 1 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$

I. Если внешнее интегрирование производить по φ, то будем иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr.$$

II. Будем производить теперь внешнее интегрирование по r. Взяв произвольное значение r из промежутка $[0, 1]$, видим по рис. 3.32, что φ изменяется от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Взяв произвольное значение r из промежутка $\left[1, \sqrt{2}\right]$, видим, что φ изменяется от $\varphi = \arccos\dfrac{1}{r}$ до $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{r}$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_0^1 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\varphi=\arccos\frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi. \blacktriangleleft$$

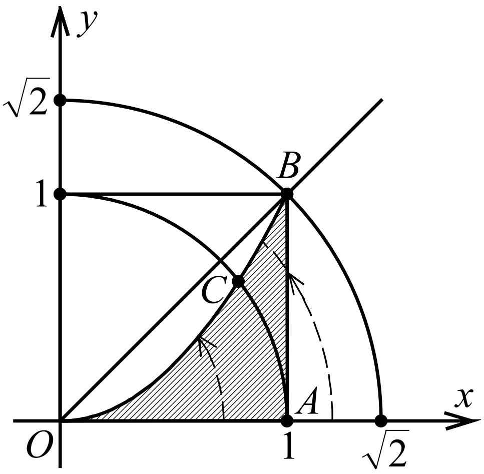


Рис. 3.33. К примеру 5

Пример 5. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} f(x, y)\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2. \end{cases}$ Делаем замену $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J(r, \varphi) = r$.

Отрезок $OA = \begin{cases} y = 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}$

Отрезок $AB = \begin{cases} x = 1, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos\dfrac{1}{r}, \\ 1 \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$

$$\smile OCB=\begin{cases} y=x^2, \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}, \\ 0\le r\le\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$(y=x^2 \Rightarrow r\sin\varphi=r^2\cos^2\varphi \Rightarrow r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right];$$

имеем также

$$r\sin\varphi=r^2(1-\sin^2\varphi) \Rightarrow r\sin^2\varphi+\sin\varphi-r=0 \Rightarrow \sin\varphi=\frac{-1\pm\sqrt{1+4r^2}}{2r} \Rightarrow$$

так как $\sin\varphi\ge 0$ для $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \Rightarrow \varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r},\ r\in\left[0,\sqrt{2}\right].$$

$\varphi(r)$ в точке $r=0$ понимается в предельном смысле, $\varphi(0)=0$.

I. Будем производить внешнее интегрирование по φ. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ видим по рис. 3.33, что r изменяется от $r=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ до $r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. Поэтому будем иметь

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{r=\frac{1}{\cos\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,dr.$$

II. Станем производить теперь внешнее интегрирование по r. Взяв произвольное значение r из промежутка $[0,1]$, видим по рис. 3.33, что φ изменяется от $\varphi=0$ до $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. Взяв произвольное значение r из промежутка $\left[1,\sqrt{2}\right]$, видим по рис. 3.33, что φ изменяется от $\varphi=\arccos\dfrac{1}{r}$ до $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. Следовательно, будем иметь

$$I=\int\limits_0^1 dr\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,d\varphi+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dr\int\limits_{\varphi=\arccos\frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\,d\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Переменить порядок интегрирования в интеграле

$$I=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,r)\,dr.$$

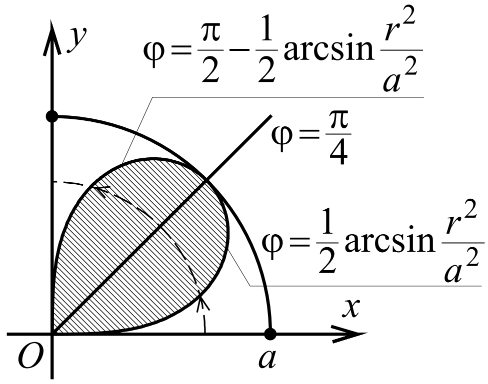


Рис. 3.34. К примеру 6

▶ Область интегрирования $(\overline{D})$ определяется соотношениями: $(\overline{D})=\begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le a\sqrt{\sin 2\varphi}.\end{cases}$ Из соотношения $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$ $\Rightarrow$ $r^2=a^2\sin 2\varphi$ $\Rightarrow$ $\sin 2\varphi=\frac{r^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $2\varphi=\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$, $r\in[0,a]$. Требуется произвести внешнее интегрирование по r.

Возьмем произвольное значение r из промежутка $[0,a]$. Из рис. 3.34 видим, что φ будет изменяться при этом r от значения $\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ до значения $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$. Следовательно, будем иметь

$$I=\int\limits_0^a dr \int\limits_{\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi,r)\,d\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. В двойном интеграле $\iint\limits_{(\overline{D})} f(x,y)\,dxdy$, где $(\overline{D})$ – область, ограниченная линиями: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ($a>0$), $x=0$, $y>0$, сделать замену переменных по формулам: $\begin{cases} x=u\cos^4 v, \\ y=u\sin^4 v.\end{cases}$

▶ При такой замене:

1) линия $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ($a>0$) перейдет в линию $\sqrt{u}\cdot\cos^2 v+\sqrt{u}\cdot\sin^2 v=\sqrt{a}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{u}=\sqrt{a}$ $\Rightarrow$ $u=a$ (рис. 3.35, 3.36);

2) линия $\begin{cases} y=0, \\ 0<x\le a\end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u\sin^4 v=0, \\ 0<u\cos^4 v\le a\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v=0, \\ 0<u\le a;\end{cases}$

3) линия $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y \le a \end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u\cos^4 v = 0, \\ 0 < u\sin^4 v \le a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < u \le a; \end{cases}$

4) точка $O(0, 0)$ перейдет в линию $\begin{cases} u\cos^4 v = 0, \\ u\sin^4 v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 0$.

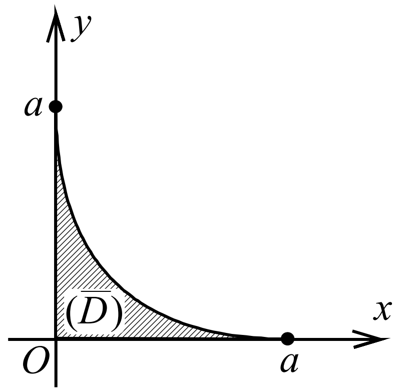


Рис. 3.35. К примеру 7

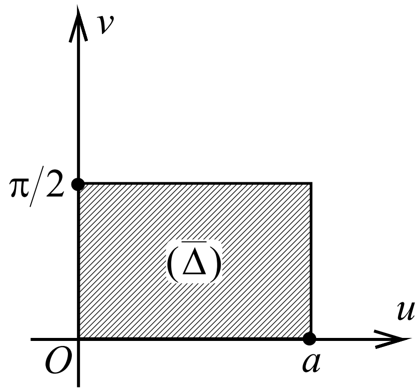


Рис. 3.36. К примеру 7

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} = 4u\sin^3 v\cos^3 v .$$

Следовательно,

$$I = 4\int_0^a u\,du \int_{v=0}^{v=\pi/2} f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\sin^3 v\cos^3 v\,dv . \blacktriangleleft$$

Пример 8. Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл $I = \iint\limits_{(\overline{D})} f(x \cdot y)\,dxdy$, где $(\overline{D})$ – область, ограниченная линиями: $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ ($x > 0$, $y > 0$), к однократному.

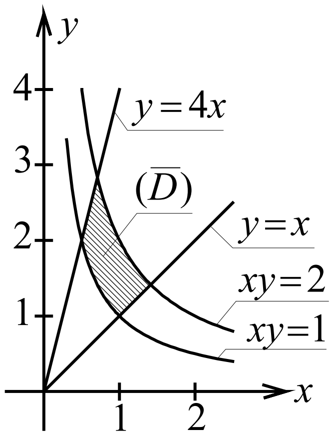


Рис. 3.37. К примеру 8

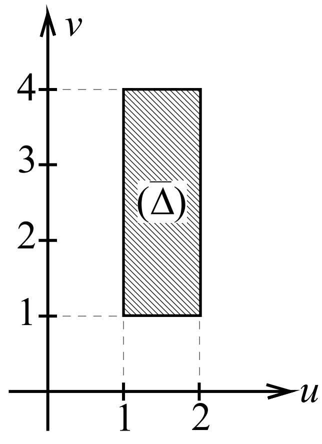


Рис. 3.38. К примеру 8

▶ Делаем замену переменных:

$$\begin{cases} xy = u, \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \quad (u > 0,\ v > 0, \text{ибо } x > 0,\ y > 0).$$

При такой замене:

1) линия $xy = 1$ перейдет в линию $u = 1$;

2) линия $xy = 2$ перейдет в линию $u = 2$;

3) линия $y = x$ перейдет в линию $v = 1$;

4) линия $y = 4x$ перейдет в линию $v = 4$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Будем иметь, следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{v=1}^{v=4} f(u)\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=2} f(u)\left[\ln v\right]_{v=1}^{v=4} du = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(u)\,du. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$).

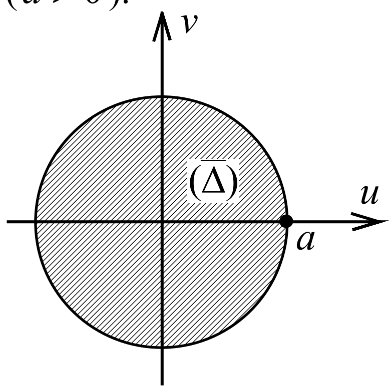


Рис. 3.39. К примеру 9

▶ Делаем замену переменных $\begin{cases} x - y = u, \\ x = v \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x = v, \\ y = v - u. \end{cases}$ При такой замене линия $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$) перейдет в линию $u^2 + v^2 = a^2$. Это – окружность радиуса a с центром в точке $(0, 0)$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Искомая площадь F фигуры, ограниченной линией $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$) будет равна

$$F = \iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} |J(u,v)|\,dudv = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} dudv = \pi a^2 \text{ (\textit{кв. ед.})}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \ge a^2.$$

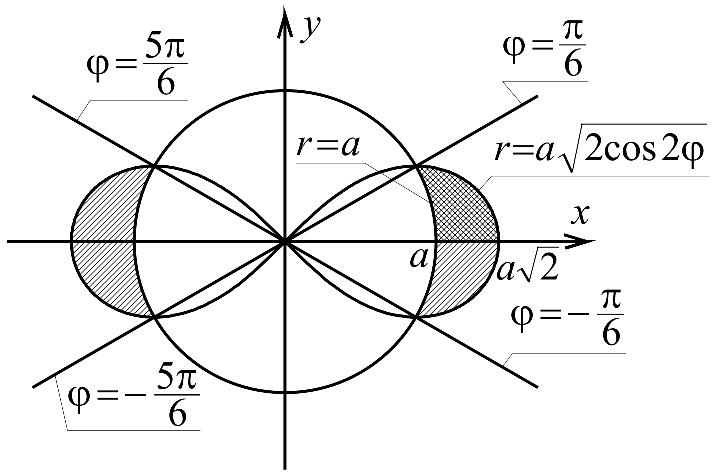


Рис. 3.40. К примеру 10

▶ Переходим к полярным координатам $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ В полярной системе координат линия $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ будет иметь уравнение: $r = a\sqrt{2\cos2\varphi}$ (это – лемниската), а линия $x^2+y^2=a^2$ – уравнение $r=a$ (это – окружность). Найдем точки пересечения этих линий. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos2\varphi}, \\ r = a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2\cos2\varphi} = 1 \Rightarrow \cos2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6};\ \varphi = \pm\frac{5\pi}{6}.$$

Принимая во внимание симметричность фигуры, станем вычислять площадь ее части, расположенной в первой четверти. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, видим из рис. 3.40, что r при этом φ изменяется от значения $r=a$ до значения $r = a\sqrt{2\cos2\varphi}$. Будем иметь, следовательно,

$$\frac{1}{4}F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos2\varphi}} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos2\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2\cos2\varphi - a^2)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$\Rightarrow\ F = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\cdot a^2$ (*кв. ед.*).

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$; $y^2 = 2qx$; $x^2 = 2ry$; $x^2 = 2sy$ $(0 < p < q;\ 0 < r < s)$.

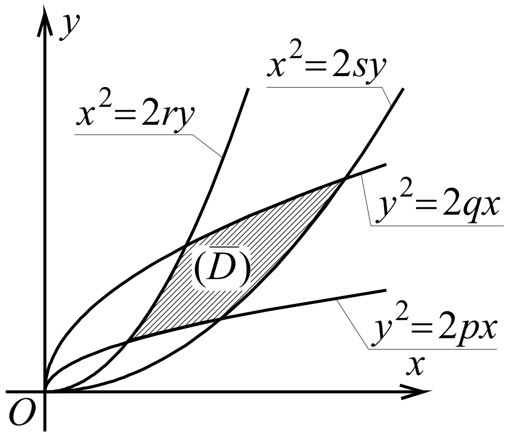


Рис. 3.41. К примеру 11

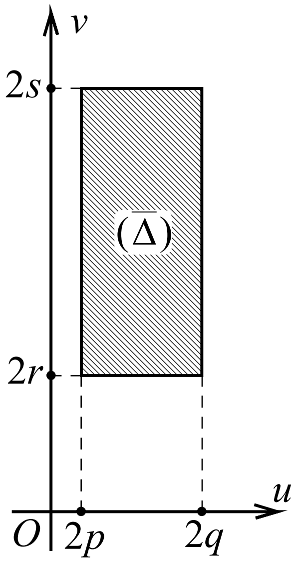


Рис. 3.42. К примеру 11

▶ Делаем замену переменных

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} = u, \\ \dfrac{x^2}{y} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{1/3} \cdot v^{2/3}, \\ y = u^{2/3} \cdot v^{1/3}. \end{cases}$$

При такой замене:

1) ветвь параболы $y^2 = 2px$ перейдет в прямую линию $u = 2p$;

2) ветвь параболы $y^2 = 2qx$ перейдет в прямую линию $u = 2q$;

3) ветвь параболы $x^2 = 2ry$ перейдет в прямую линию $v = 2r$;

4) ветвь параболы $x^2 = 2sy$ перейдет в прямую линию $v = 2s$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$F = \iint\limits_{(\bar{D})} dxdy = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} |J(u,v)|\,dudv = \frac{1}{3}\int\limits_{2p}^{2q} du \int\limits_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3}(q-p)(s-r). \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$(l_1):\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1; \quad (l_2):\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4;$$

$$(l_3):\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}; \qquad (l_4):\ 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

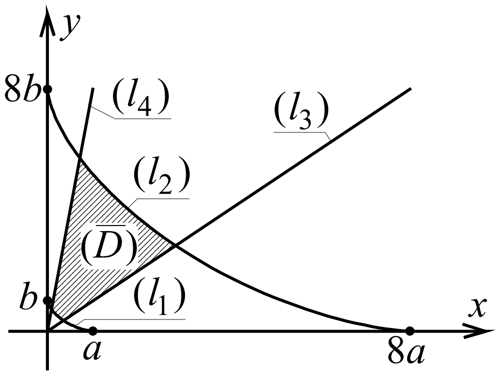


Рис. 3.43. К примеру 12

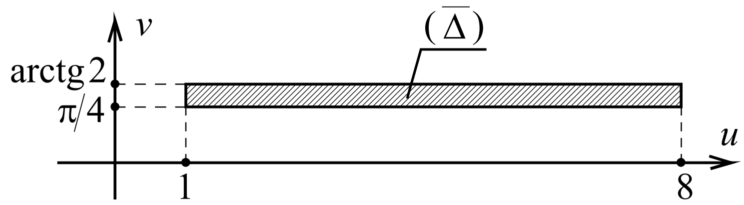


Рис. 3.44. К примеру 12

▶ Делаем замену переменных $\begin{cases} x = au\cos^3 v, \\ y = bu\sin^3 v. \end{cases}$ При такой замене:

1) линия (l_1) перейдет в линию $u^{2/3} = 1 \;\Rightarrow\; u = 1$;

2) линия (l_2) перейдет в линию $u^{2/3} = 4 \;\Rightarrow\; u = 8$;

3) линия (l_3) перейдет в линию $\operatorname{tg}^3 v = 1 \;\Rightarrow\; v = \dfrac{\pi}{4}$;

4) линия (l_4) перейдет в линию $\operatorname{tg}^3 v = 8 \;\Rightarrow\; v = \operatorname{arctg} 2$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^3 v & -3au\cos^2 v\sin v \\ b\sin^3 v & 3bu\sin^2 v\cos v \end{vmatrix} = 3abu\sin^2 v\cos^2 v\,.$$

Имеем, следовательно,

$$F = \iint\limits_{(\overline{D})} dxdy = \iint\limits_{(\overline{\Delta})} 3abu\sin^2 v\cos^2 v\,dudv = 3ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2} \sin^2 v\cos^2 v\,dv\int\limits_{u=1}^{u=8} u\,du =$$

$$= \frac{3\cdot 63}{2}ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2} \sin^2 v\cos^2 v\,dv = \frac{189}{2}ab\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2} \sin^2 2v\,dv =$$

$$= \frac{189}{8}ab\int\limits_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2} \frac{1-\cos 4v}{2}dv = \frac{189}{16}ab\left[\left(\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\sin 4v\Big|_{v=\pi/4}^{v=\operatorname{arctg}2}\right] =$$

$$= \frac{189}{16}ab\left[(\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1) - \frac{1}{4}\sin(4\operatorname{arctg}2)\right].$$

Так как $\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$, $\sin(4\operatorname{arctg}2) = -\dfrac{24}{25}$, то

$$F = \frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{6}{25}\right) \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{).} ◀$$

Глава 4. Вычисление площадей кривых поверхностей

§1. Некоторые сведения из геометрии

1.°Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой.

Определение. *Касательной* в точке N к пространственной кривой (l) называется предельное положение секущей, проходящей через точку N и какую-нибудь точку M этой кривой, когда точка M по кривой стремится к совпадению с точкой N.

Пусть кривая (l) задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [p,q]. \\ z = \omega(t), \end{cases} \tag{1}$$

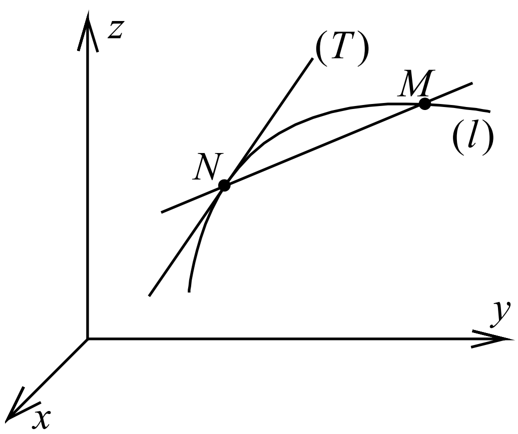


Рис. 4.1. К определению касательной к пространственной кривой

Предполагаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют в $[p,q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

Пусть точка $N(x_0, y_0, z_0)$ соответствует значению параметра t_0, а точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ – значению параметра $t_0+\Delta t$, так что: $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, $z_0=\omega(t_0)$; $x_0+\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)$, $y_0+\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)$, $z_0+\Delta z=\omega(t_0+\Delta t)$. Составляем уравнение секущей NM как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{y-y_0}{(y_0+\Delta y)-y_0} = \frac{z-z_0}{(z_0+\Delta z)-z_0}$$

(x, y, z – текущие координаты), или

$$\frac{x-x_0}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega(t_0+\Delta t)-\omega(t_0)}.$$

Разделив знаменатели этих отношений на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим уравнение касательной к (l) в точке N.

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{2}$$

Из (2) видим, что вектор $\vec{\tau}\big(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\big)$ направлен по касательной к кривой (l) в точке N.

Замечание. Уравнения (2) теряют смысл, если $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=\omega'(t_0)=0$. В этом случае точка N называется *особой*. Если же хотя бы один из знаменателей в соотношении (2) не равен нулю, то точка N называется *обыкновенной*. В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные точки.

Определение. *Нормальной плоскостью* к кривой (l) в точке N называется плоскость, проходящая через точку N перпендикулярно касательной к (l) в точке (N).

Найдем уравнение нормальной плоскости. Для этого берем уравнение связки плоскостей с центром в точке $N(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3}$$

По определению, нормальная плоскость перпендикулярна касательной к (l) в точке N. Поэтому $\dfrac{A}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{B}{\psi'(t_0)}=\dfrac{C}{\omega'(t_0)}$ $(=k)$, k – обозначение общей величины этих отношений. А тогда

$$A=k\cdot\varphi'(t_0), \quad B=k\cdot\psi'(t_0), \quad C=k\cdot\omega'(t_0).$$

Подставив эти выражения для A, B и C в (3), получим уравнение нормальной плоскости к (l) в точке N:

$$\varphi'(t_0)\cdot(x-x_0)+\psi'(t_0)\cdot(y-y_0)+\omega'(t_0)\cdot(z-z_0)=0. \tag{4}$$

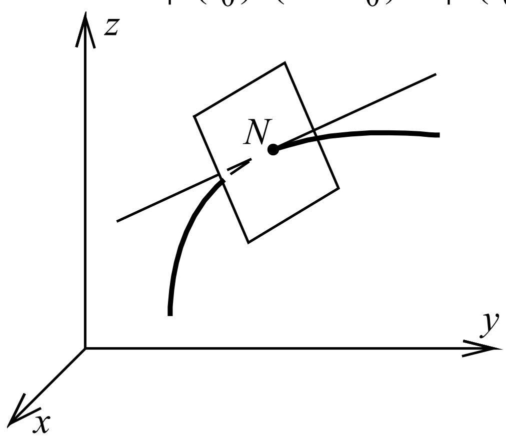


Рис. 4.2. К определению нормальной плоскости к пространственной кривой

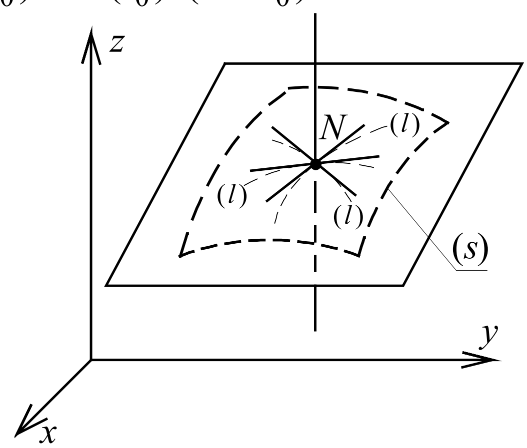


Рис. 4.3. К определению касательной плоскости и нормали к поверхности

2°. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение. Пусть дана поверхность (s) и пусть точка $N(x_0, y_0, z_0)\in(s)$. Рассмотрим всевозможные кривые, лежащие на (s) и проходящие через точку N. Проведем к этим кривым в точке N касательные прямые. Если геометрическим место этих касательных прямых оказывается плоскость, то она называется *касательной плоскостью* к поверхности (s) в точке N, а перпендикуляр к этой плоскости в точке N называется *нормалью* к поверхности (s) в точке N.

Пусть данная поверхность (s) имеет уравнение

$$F(x,y,z)=0. \tag{5}$$

Предполагаем, что функция $F(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z в некоторой пространственной области. Точки поверхности (s), в которых одновременно $F'_x(x,y,z)=0$, $F'_y(x,y,z)=0$, $F'_z(x,y,z)=0$, называются *особыми* точками. Остальные точки поверхности (s) называются *обыкновенными*.

Пусть точка $N(x_0,y_0,z_0)$ – обыкновенная точка поверхности (s). Рассмотрим одну из кривых (l), лежащую на (s) и проходящую через точку $N(x_0,y_0,z_0)$. Пусть параметрические уравнения этой кривой (l) такие:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in[p,q], \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ определены и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$ в промежутке $[p,q]$.

Пусть точка $N(x_0,y_0,z_0)$ соответствует значению параметра t_0. Уравнение касательной к (l) в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ будет таким:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{6}$$

Мы докажем, что у данной поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость, если покажем, что касательная прямая к любой кривой (l), проходящей через точку N, перпендикулярна к некоторой определенной прямой.

Так как вся кривая (l) лежит на поверхности (s), то при всех $t\in[p,q]$ будет

$$F\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)=0. \tag{7}$$

Значит, (7) есть тождество относительно t. Продифференцируем это тождество по t. Получим

$$F'_x\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\varphi'(t)+F'_y\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\psi'(t)+$$
$$+F'_z\big(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\big)\cdot\omega'(t)=0$$

Положим в этом соотношении $t=t_0$. Получим

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\psi'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\omega'(t_0)=0. \tag{8}$$

Равенство (8) представляет собой условие перпендикулярности двух прямых, а именно, прямой (6) (т. е. касательной к (l) в точке N) и прямой, имеющей уравнение

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{9}$$

Ясно, что прямая (9) не зависит от выбора кривой (l). Она зависит только от поверхности (s) и от положения точки N на (s). Значит, касательная прямая к любой кривой (l), лежащей на (s) и проходящей через точку $N(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярна к одной и той же прямой (9). Следовательно, у поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость.

Нетрудно понять, что прямая (9) является нормалью к поверхности (s) в точке N.

Выведем теперь уравнение касательной плоскости к (s) в точке N. Для этого возьмем уравнение связки плоскостей с центром в точке N:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{10}$$

Так как касательная плоскость к (s) в точке N перпендикулярна нормали (9), то

$$\frac{A}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{B}{F'_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{C}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \ (=\widetilde{k}),$$

$\widetilde{k}$ – обозначение общей величины этих отношений. А тогда

$$A=\widetilde{k}\cdot F'_x(x_0, y_0, z_0), \quad B=\widetilde{k}\cdot F'_y(x_0, y_0, z_0), \quad C=\widetilde{k}\cdot F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Подставив эти выражения для A, B и C в (10), получим уравнение касательной плоскости к поверхности (s) в точке N:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0. \tag{11}$$

Частный случай. Пусть поверхность (s) задана явным уравнением:

$$z=f(x, y), \tag{12}$$

где $f(x, y)$ – непрерывная вместе со своими частными производными $p(x, y)=f'_x(x, y)$ и $q(x, y)=f'_y(x, y)$. Отметим, что у такой поверхности все точки обыкновенные. В самом деле, запишем уравнение (12) в виде: $f(x, y)-z=0$. Это есть уравнение вида (5), где $F(x, y, z)=f(x, y)-z$. Поэтому $F'_x(x, y, z)=f'_x(x, y)$, $F'_y(x, y, z)=f'_y(x, y)$, $F'_z=-1 \ (\neq 0)$. Уравнение касательной плоскости в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12), будет таким:

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0). \tag{13}$$

Уравнение нормали в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12):

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{14}$$

Если α, β, γ – углы, которые нормаль к поверхности (s) образует с осями координат, то

$$\cos\alpha = \frac{f'_x}{\pm\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{f'_y}{\pm\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}. \tag{15}$$

Выбор знака перед радикалом означает выбор определенного направления на нормали. Если нам нужно, например, то направление, которое составляет с осью Oz острый угол, то должно быть $\cos\gamma > 0$ и, следовательно, в формулах (15) перед радикалом нужно взять знак минус.

Замечание. Пусть кривая (l) задана пересечением двух поверхностей, т. е. системой $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0. \end{cases}$ Касательную прямую к этой кривой в точке $N(x_0,y_0,z_0)$ можно получить как пересечение касательных плоскостей, проведенных к данным поверхностям в точке N. Следовательно, уравнение этой касательной прямой будет таким:

$$\begin{cases} F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \\ \Phi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\Phi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\Phi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{16}$$

§2. Существование площади кривой поверхности и ее вычисление

1°. Рассмотрим поверхность (s), заданную явным уравнением

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

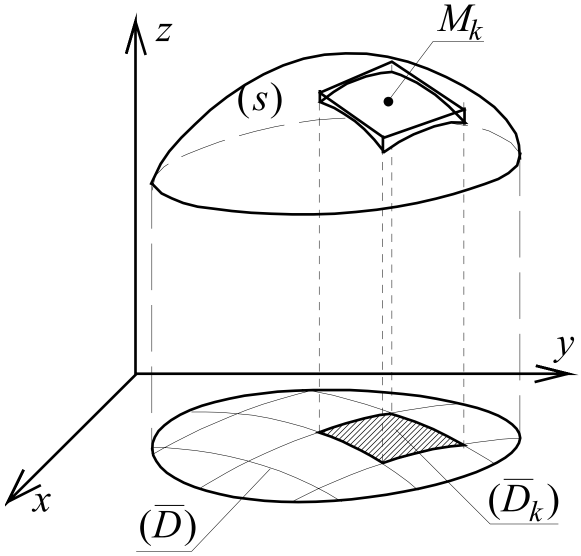


Рис. 4.4. К вычислению площади кривой поверхности

где $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной простым контуром.

Разобьем $(\overline{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\overline{D}_1)$, $(\overline{D}_2)$, … , $(\overline{D}_n)$ с площадями $F_1, F_2, \dots, F_n$. Рассмотрим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси Oz, а направляющими служат простые кривые, разбивающие на части $(\overline{D})$. Эти цилиндрические поверхности переносят дробящую сеть с $(\overline{D})$ на (s). Поэтому поверхность (s) разобьется на части (s_1), (s_2), … , (s_n). На каждой части (s_k)

берем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и проводим в этих точках плоскости, касательные к поверхности (s). Продолжим упомянутые выше цилиндрические поверхности до пересечения с построенными касательными плоскостями. Тогда на этих плоскостях вырежутся плоские области $(\widetilde{s}_1)$, $(\widetilde{s}_2)$, … , $(\widetilde{s}_n)$. Пусть площади их будут: T_1, T_2, …, T_n соответственно. Обозначим через λ ранг дробления области $(\overline{D})$. Покажем, что существует конечный предел $s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$, не зависящий ни от выбора дробящей сети, ни от выбора точек M_k на (s_k). Этот предел и принимается за площадь s поверхности (s).

▶ Заметим, что области $(\overline{D}_k)$ являются проекциями $(\widetilde{s}_k)$ на плоскость Oxy. Значит, площади их связаны так: $F_k = T_k \cdot \cos\psi_k$, где ψ_k – угол между плоскостью Oxy и плоскостью, касательной к поверхности (s) в точке M_k. Но угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Поэтому $\psi_k = \gamma_k$, где γ_k – угол между осью Oz и нормалью к поверхности (s) в точке M_k. А тогда

$$\cos\psi_k = \cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2}}$$

(заметим, что нам нужен положительный косинус). И, следовательно,

$$T_k = \frac{F_k}{\cos\psi_k} = \sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2} \cdot F_k \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'_x(x_k, y_k)\right)^2 + \left(f'_y(x_k, y_k)\right)^2} \cdot F_k . \qquad (2)$$

Видим, что сумма (2) есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла по области $(\overline{D})$ от непрерывной в $(\overline{D})$ функции $\sqrt{1 + \left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}$. Значит, у суммы (2) существует при $\lambda \to 0$ конечный предел, не зависящий ни от выбора дробящей сети области $(\overline{D})$, ни от выбора точек M_k на (s_k), а это и требовалось доказать. Попутно установлено, что

$$s = \iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{1 + \left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}\, dxdy . \qquad (3)$$

Замечание. Формулу (3) для площади s кривой поверхности можно записать в виде:

$$s = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{\cos\gamma} , \qquad (4)$$

где γ – острый угол между нормалью к поверхности (s) и осью Oz. Если на нормали к (s) направление не выбрано нужным образом, то вместо (4) следует писать

$$s = \iint\limits_{(\overline{D})} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \tag{5}$$

2°. Случай, когда поверхность задана параметрическими уравнениями.

Рассмотрим теперь поверхность (s), заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{6}$$

где $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ есть функции, заданные в области $(\overline{\Delta})$ плоскости Ouv, непрерывные там и имеющие непрерывные частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

и рассмотрим следующие определители, составленные из элементов этой матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Предположим, что один из этих трех определителей, например, C, всюду в $(\overline{\Delta})$ отличен от нуля. ($C \neq 0$ всюду в $(\overline{\Delta})$).

Возьмем первые два уравнения из системы (6). При условии, что $C \neq 0$ в $(\overline{\Delta})$, система $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ однозначно разрешима относительно u и v, т. е. $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$ причем функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ будут определены, непрерывны и иметь непрерывные частные производные $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$, $v'_x(x,y)$, $v'_y(x,y)$ в некоторой области $(\overline{D})$ плоскости Oxy (см. теорию функций, заданных неявно). Подставив выражения для u и v через x и y в соотношение $z = z(u,v)$ из (6), получим

$$z = z\big(u(x,y), v(x,y)\big), \text{ т. е. } z = f(x,y).$$

Отметим, что функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в области $(\overline{D})$. Видим, таким образом, что поверхность (s), заданная параметрическими уравнениями (6), представляет собой поверхность как раз такого типа, который был рассмотрен выше в 1°.

Было показано, что у такой поверхности есть площадь s, причем $s = \iint\limits_{(\bar{D})} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ (см. (5)). В двойном интеграле, выражающем площадь поверхности (s), сделаем замену переменных, взяв в качестве новых переменных параметры u и v, т. е. положив $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in (\bar{\Delta})$. Получим $s = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \frac{|J(u,v)|}{|\cos\gamma|} dudv$. У нас $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = C$. Поэтому

$$s = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \frac{|C|}{|\cos\gamma|} dudv. \tag{7}$$

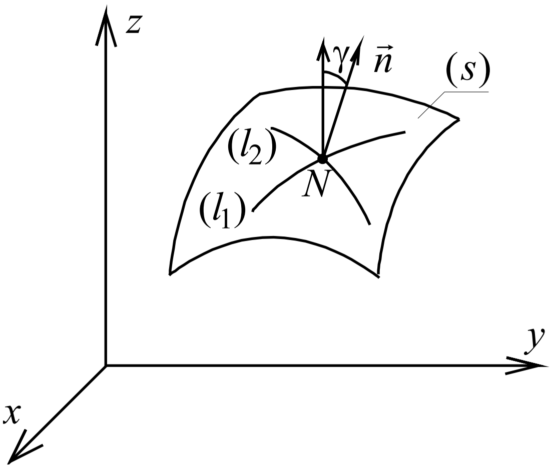


Рис. 4.5. К вычислению площади кривой поверхности, заданной параметрическими уравнениями

В двойном интеграле (7) следует выразить $|\cos\gamma|$ через переменные u и v. Для этого на поверхности (s) выберем и закрепим произвольную точку $N(x_0, y_0, z_0)$, соответствующую точке $(u_0, v_0) \in (\bar{\Delta})$. Проведем в этой точке нормаль $\vec{n}$ к поверхности (s). Пусть α, β, γ – углы, которые нормаль $\vec{n}$ образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Проведем на поверхности (s) через точку N кривую (l_1):

$$(l_1) = \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0) \end{cases}$$

(это – линия, ибо параметр один). Вектор $\vec{\tau}_1\big(x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0)\big)$ направлен по касательной к (l_1) в точке N. Так как линия (l_1) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N, то $\vec{\tau}_1 \perp \vec{n}$. Поэтому

$$x'_u(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_u(u_0,v_0)\cos\beta + z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x'_u(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_u(u_0,v_0)\cos\beta = -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma\,. \tag{8}$$

Затем на поверхности (s) через точку $N(x_0, y_0, z_0)$ проводим кривую

$$(l_2) = \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v). \end{cases}$$

Вектор $\vec{\tau}_2\big(x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)\big)$ направлен по касательной к (l_2) в точке N. Так как (l_2) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N, то $\vec{\tau}_2 \perp \vec{n}$. Поэтому

$$x'_v(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_v(u_0,v_0)\cos\beta + z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x'_v(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_v(u_0,v_0)\cos\beta = -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma\,. \tag{9}$$

Из системы

$$\begin{cases} x'_u(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_u(u_0,v_0)\cos\beta = -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma, \\ x'_v(u_0,v_0)\cos\alpha + y'_v(u_0,v_0)\cos\beta = -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma \end{cases}$$

найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma & y'_u(u_0,v_0) \\ -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos\gamma\cdot\begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{A}{C}\cos\gamma\,;$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & -z'_u(u_0,v_0)\cos\gamma \\ x'_v(u_0,v_0) & -z'_v(u_0,v_0)\cos\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos\gamma\cdot\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{B}{C}\cos\gamma\,.$$

Можем написать также, что $\cos\gamma = \dfrac{C}{C}\cos\gamma$. Известно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. А тогда

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}\cdot\cos^2\gamma = 1 \quad\Rightarrow\quad |\cos\gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Подставляя это выражение для $|\cos\gamma|$ в (7), находим:

$$s = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv\,. \tag{10}$$

Замечание 1. Из формулы (10) для площади s поверхности видим, что на окончательном результате не отразилось, что отличен от нуля именно определитель C, а не A или B. Точно такое же выражение для s мы получили бы, предполагая, что в $(\bar{\Delta})$ отличен от нуля либо определитель A, либо определитель B. Поэтому формула (10) верна и тогда, когда область $(\bar{\Delta})$ разлагается на конечное число частей, в каждой из которых отличен от нуля хотя бы один из трех определителей: A, B, C.

Замечание 2. Положим

$$(x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2=E,$$
$$(x_v')^2+(y_v')^2+(z_v')^2=G,$$
$$x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'=F$$

(E, G, F – это так называемые *коэффициенты Гаусса*). Легко проверить, что $A^2+B^2+C^2=EG-F^2$. Поэтому

$$s=\iint\limits_{(\overline{\Delta})}\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{11}$$

§3. Примеры к главе 4

Пример 1. Найти площадь s поверхности тела, ограниченного поверхностями: $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

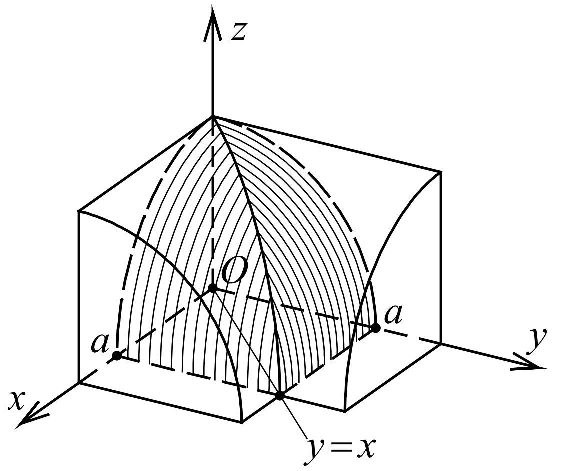


Рис. 4.6. К примеру 1

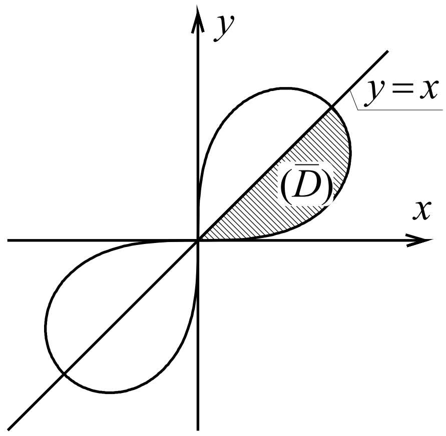


Рис. 4.7. К примеру 2

▶ На рис. 4.6 изображена часть интересующей нас поверхности, расположенная в первом октанте. Эта часть поверхности состоит из двух одинаковых по площади кусков. Один из этих кусков определяется уравнением $z=\sqrt{a^2-x^2}$ и проектируется на плоскость Oxy в треугольник $(\overline{D})=\begin{cases}0\le x\le a,\\ 0\le y\le x.\end{cases}$ Площадь $\tilde{s}$ этого куска поверхности можно определить по формуле: $\tilde{s}=\iint\limits_{(\overline{D})}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$. Имеем: $z_x'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $z_y'=0$. Следовательно,

$$1+(z_x')^2+(z_y')^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}.$$

А тогда

$$\widetilde{s} = a\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int\limits_{y=0}^{y=x} dy = a\int\limits_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_{x=0}^{x=a} = a^2.$$

Так как $\widetilde{s}$ составляет лишь $\dfrac{1}{16}$ часть площади s, то находим

$$s = 16a^2 \ (\textit{кв. ед.}). \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти площадь s части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (рис. 4.7).

▶ Поверхность $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ – параболоид вращения. Ось Oz является осью симметрии этого параболоида вращения. Цилиндрическая поверхность $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ – симметрична относительно плоскости $y = x$. Она пересекается с плоскостью Oxy по кривой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $r^2 = a^2\sin 2\varphi$. Одна четвертая часть куска поверхности, вырезаемая цилиндром из параболоида вращения, проектируется на плоскость Oxy в область $(\overline{D})$, ограниченную линиями: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{a};\ z'_y = \frac{y}{a};\ \Rightarrow\ 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2}\ \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{4}{a}\iint\limits_{(\overline{D})} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам. Будем иметь

$$S = \frac{4}{a}\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{a^2 + r^2}\,r\,dr = \frac{4}{3a}\int\limits_0^{\pi/4} (a^2 + r^2)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \left((1 + \sin 2\varphi)^{3/2} - 1\right) d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \left(\int\limits_0^{\pi/4} (\sin\varphi + \cos\varphi)^3\,d\varphi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left(2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/4} \sin^3\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)d\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2}{9}(20-3\pi).\ (\textit{кв. ед.}).\ ◀$$

Пример 3. Найти площадь s части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

▶ Пусть ρ, φ, θ – сферические координаты точек пространства. Декартовы и сферические координаты точки пространства связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Координаты любой точки сферы радиуса R будут такими:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta. \end{cases}$$

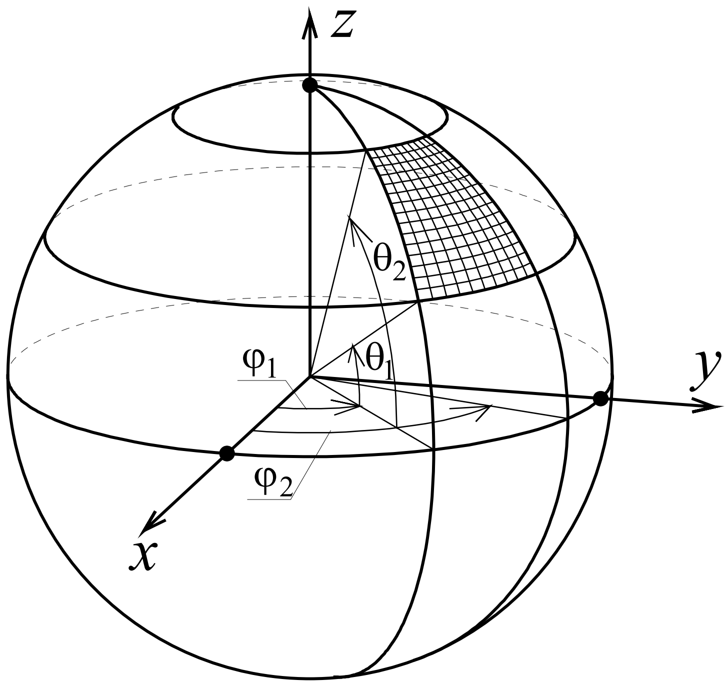


Рис. 4.8. К примеру 3

Последние уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения интересующего нас куска сферы, если $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$; $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = R^2\cos^2\theta, \quad G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = R^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG-F^2} = R^2\cos\theta.$$

Следовательно,

$$s = \iint\limits_{\substack{\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \\ \theta_1\le\theta\le\theta_2}} R^2\cos\theta\, d\varphi d\theta = R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta =$$

$$= R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\ (\textit{кв. ед.}).\ ◀$$

Пример 4. Найти площадь части поверхности тора

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi, \quad (0 < a \le b), \\ z = a\sin\theta \end{cases}$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ и двумя параллелями $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$. Чему равна поверхность всего тора?

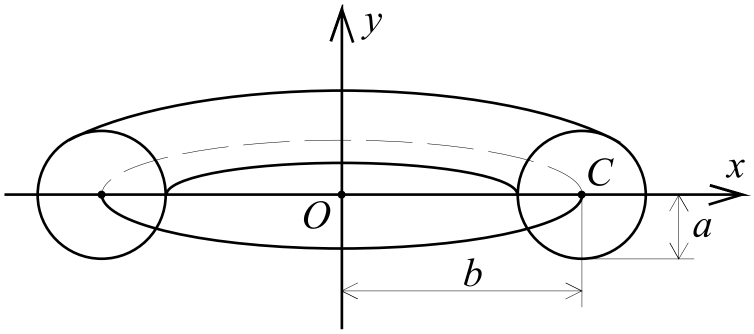


Рис. 4.9. К примеру 4

▶ Найдем коэффициенты Гаусса данной поверхности. Имеем:

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b + a\cos\theta)\sin\varphi & (b + a\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = (b + a\cos\theta)^2, \quad G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = a(b + a\cos\theta).$$

$$s = \iint\limits_{\substack{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2}} \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\theta = a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} (b + a\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot(b\theta + a\sin\theta)\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} =$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot\left[b(\theta_2 - \theta_1) + a(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\right] \text{ (\textit{кв. ед.})}.$$

Чтобы найти площадь поверхности всего тора, нужно в полученное выражение для s подставить значения: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$. Получим

$$s_{\text{полн.}} = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab \text{ (\textit{кв. ед.})}$$ ◀

Глава 5. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

§1. Определение равномерной сходимости несобственных интегралов

Пусть функция $f(x,y)$ задана в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Пусть при каждом закрепленном y из $[c,d]$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ будет представлять собою функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$ (в дальнейшем будем обозначать эту функцию через $I(y)$, $y \in [c,d]$).

Утверждение, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$, означает следующее: при каждом закрепленном y из $[c,d]$

$$\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx .$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0, \text{ или } \int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

А это означает, что для каждого y из $[c,d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $M > 0$ такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Важно заметить, что число $M > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$, и для каждого y из $[c,d]$ оно будет, вообще говоря, своим, то есть M зависит и от ε, и от y: $M = M(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $M > 0$, зависящее только от ε (то есть одно и то же для всех y из $[c,d]$), такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ называется *равномерно сходящимся относительно параметра* y *на* $[c,d]$.

Совершенно аналогично вводится понятие равномерной сходимости несобственных интегралов второго рода. Например, пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a \le x < b, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ $(a, b, c, d$ – конечные числа).

Пусть при каждом y из $[c,d]$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$ сходится. Ясно, что тогда $\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$ будет представлять собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c,d]$.

Утверждение, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$, означает следующее. При каждом закрепленном y из $[c,d]$

$$\int\limits_a^{\beta} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} \int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx \;\Leftrightarrow\; \int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{\beta} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int\limits_{\beta}^{b} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\beta\to b-0]{} 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx \xrightarrow[\gamma\to+0]{} 0$$

(здесь положено $\beta = b-\gamma \;\Rightarrow\; \gamma = b-\beta$). А это означает, что для каждого y из $[c,d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что как только $0 < \gamma < \delta$, так сейчас же $\left|\int\limits_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

И здесь важно отметить, что число $\delta > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$, и для каждого y из $[c,d]$ оно будет, вообще говоря, своим, то есть δ зависит и от ε, и от y: $\delta = \delta(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, зависящее только от ε (*то есть одно и то же для всех* y *из* $[c,d]$), такое, что как только $0 < \gamma < \delta$, так сейчас же $\left|\int\limits_{b-\gamma}^{b} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$, то *несобственный* *интеграл* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *называется равномерно сходящимся относительно параметра* y *на* $[c,d]$.

§2. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d; \end{cases}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = I(y)$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

▶ Возьмем *любое* y_0 из $[c,d]$ и закрепим его. Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

По условию $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, поэтому взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, зависящее только от ε, такое, что при всяком *A*, удовлетворяющем условию $A > M$, сразу для всех $y \in [c,d]$ будет

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Выберем и закрепим какое-нибудь *A*, удовлетворяющее условию $A > M$. Положив $\Psi_A(y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$, неравенство (1) сразу для всех $y \in [c,d]$ можно записать в виде:

$$\left| I(y) - \Psi_A(y) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

$$\left[I(y) - \Psi_A(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right].$$

Но $\Psi_A(y)$ – собственный интеграл, зависящий от параметра y. По теореме о непрерывности собственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\Psi_A(y) \in C([c,d])$, а значит, по теореме Кантора, $\Psi_A(y)$ будет равномерно непрерывной на $[c,d]$.

Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек y' и y'' из $[c,d]$, для которых $|y''-y'|<\delta$, будет $|\Psi_A(y'')-\Psi_A(y')|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Для разности значений функции $I(y)$ в точках y' и y'' имеем:

$$I(y'')-I(y')=\left[I(y'')-\Psi_A(y'')\right]+\left[\Psi_A(y'')-\Psi_A(y')\right]+\left[\Psi_A(y')-I(y')\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I(y'')-I(y')|\le|I(y'')-\Psi_A(y'')|+|\Psi_A(y'')-\Psi_A(y')|+$$

$$+|\Psi_A(y')-I(y')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

В частности, полагая $y'=y_0$, $y''=y$, где $y\in[c,d]$ – любое, но такое, что $|y-y_0|<\delta$, будем иметь $|I(y)-I(y_0)|<\varepsilon$. Последнее означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0. Так как у нас точка y_0 – любая из $[c,d]$, то заключаем, что $I(y)\in C([c,d])$.

§3. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a\le x<+\infty, \\ c\le y\le d; \end{cases}$

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx, \tag{1}$$

причем несобственный интеграл, стоящий в правой части (1), сходится.

▶ Возьмем любое $\varepsilon>0$. По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, поэтому взятому $\varepsilon>0$ отвечает число $M>0$, зависящее только от ε, такое, что при всяком *A*, удовлетворяющем условию $A>M$, сразу для всех $y\in[c,d]$ будет справедливо неравенство:

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Выберем и закрепим какое-нибудь *A*, удовлетворяющее условию $A>M$.

Полагая, как и раньше, $\Psi_A(y)=\int\limits_a^A f(x,y)\,dx$, предыдущее неравенство сразу для всех $y\in[c,d]$ можно записать в виде

$$\left|I(y)-\Psi_A(y)\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Так как $I(y)\in C([c,d])$ и $\Psi_A(y)\in C([c,d])$, то $I(y)\in R([c,d])$, $\Psi_A(y)\in R([c,d])$. Поскольку имеет место равенство

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy-\int\limits_c^d \Psi_A(y)\,dy=\int\limits_c^d\left[I(y)-\Psi_A(y)\right]dy,$$

то

$$\left|\int\limits_c^d I(y)\,dy-\int\limits_c^d \Psi_A(y)\,dy\right|\le\int\limits_c^d\left|I(y)-\Psi_A(y)\right|dy<\frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c)=\varepsilon.$$

Таким образом, получили: при любом *A*, удовлетворяющем условию $A>M$, оказывается $\left|\int\limits_c^d I(y)\,dy-\int\limits_c^d \Psi_A(y)\,dy\right|<\varepsilon$. Последнее означает, что

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy=\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d \Psi_A(y)\,dy \qquad (2)$$

(именно так, ибо первый интеграл от *A* не зависит). Но $\Psi_A(y)=\int\limits_a^A f(x,y)\,dx$ – собственный интеграл, зависящий от параметра y. По теореме об интегрировании по параметру под знаком собственного интеграла можем написать

$$\int\limits_c^d \Psi_A(y)\,dy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^A f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_a^A\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Теперь соотношение (2) может быть записано в виде

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy=\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Нами установлено существование написанного здесь предела. Но тогда мы должны обозначать этот предел так:

$$\int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Таким образом, мы доказали сходимость несобственного интеграла, стоящего в правой части (1), и справедливость равенства (1).

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d, \end{cases}$ непрерывна там и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$;

2) $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится при каждом y из $[c,d]$;

3) $\Psi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Тогда:

1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c,d]$;

2) $I'(y) = \Psi(y)$, то есть $\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$;

3) $I'(y) \in C([c,d])$.

► Так как $f'_y(x,y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \le x < +\infty, \\ c \le y \le d \end{cases}$ и $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, то $\Psi(y) \in C([c,d])$ (см. теорему §2) и $\int\limits_c^d \Psi(y)\,dy$ существует. В частности, существует $\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy$ для любого z, удовлетворяющего условию $c \le z \le d$. По теореме §3 имеем

$$\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy = \int\limits_c^z \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx\right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^z f'_y(x,y)\,dy\right) dx .$$

Но $\int\limits_c^z f'_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big|_{y=c}^{y=z} = f(x,z) - f(x,c)$. Поэтому

$$\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy = \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x,z)\,dx}_{=I(z)} - \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)\,dx}_{=I(c)} = I(z) - I(c),$$

откуда

$$I(z)=\int\limits_c^z \Psi(y)\,dy+I(c). \tag{1}$$

В правой части последнего равенства мы имеем интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Следовательно, у правой части равенства (1) производная по z существует и равна $\Psi(z)$ (см. теорему Барроу). Но тогда существует производная по z и y левой части равенства (1), причем

$$I'(z)=\Psi(z). \tag{2}$$

Равенство (2) установлено для любого $z\in[c,d]$. Оно может быть записано и так: $I'(y)=\Psi(y)$, $y\in[c,d]$.

Таким образом, доказано, что

1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c,d]$;

2) $I'(y)=\Psi(y)$, $y\in[c,d]$;

3) $I'(y)\in C\big([c,d]\big)$, ибо $\Psi(y)\in C\big([c,d]\big)$.

§5. Признак равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема. Пусть

1) функция $f(x,y)$ определена в области $\begin{cases} a\le x<+\infty, \\ c\le y\le d \end{cases}$ и непрерывна там;

2) функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна в $[a,+\infty)$;

3) $|f(x,y)|\le\varphi(x)$ при всех значениях y из $[c,d]$ и $x\in[a,+\infty)$.

Тогда, если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $I(y)=\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

▶ Сходимость (и притом абсолютная) несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ при каждом y из $[c,d]$ следует из признака сравнения.

Возьмем любое *A*, удовлетворяющее условию $A>a$, и закрепим его. Затем возьмем любое *B*, удовлетворяющее условию $B>A$. Имеем при всех значениях y из $[c,d]$:

$$\left|\int\limits_A^B f(x,y)\,dx\right|\le\int\limits_A^B|f(x,y)|\,dx\le\int\limits_A^B\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда в пределе при $B\to+\infty$ при всех значениях y из $[c,d]$ получаем

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \le \int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx . \qquad (1)$$

По условию, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, поэтому

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \left[\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx - \int_a^A \varphi(x)\,dx \right] \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 .$$

Последнее означает, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$ такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$. Отметим, что здесь M зависит только от ε. В силу (1), при $A > M$ и подавно будет $\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c,d]$. А это означает, что $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Замечание. Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы, совершенно аналогичные теоремам §2–§5.

§6. Примеры к главе 5

Рассмотрим несколько примеров применения доказанных теорем к вычислению интегралов.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin xy\,dx . \qquad (1)$$

Имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin xy\,dx = -\frac{e^{-x}}{1+y^2} \cdot (\sin xy + y\cos xy) \Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{y}{1+y^2} . \qquad (2)$$

Используя равенство (2), найдем величины некоторых других интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на

любом промежутке $[c,d]$. В самом деле, имеем: $\left|e^{-x}\cdot\sin xy\right|\le e^{-x}$ для любого $y\in[c,d]$ и для всех $x\in[0,+\infty)$; интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=1$, т.е. сходится, тогда по теореме §5 $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$.

Отметим еще, что функция $f(x,y)=e^{-x}\sin xy$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ c\le y\le d.\end{cases}$ Тогда по теореме §2 имеем:

$$I(y)\in C([c,d])\ \Rightarrow\ I(y)\in R([c,d])\ \Rightarrow\ I(y)\in R([0,z]).$$

(здесь положено $c=0$, $d=z$, где z – любое конечное). По теореме §3

$$\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin xy\,dx\right)dy=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^z e^{-x}\sin xy\,dy\right)dx.$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (2) по y от 0 до z, будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^z e^{-x}\sin xy\,dy\right)dx=\int\limits_0^z\frac{ydy}{1+y^2}. \tag{3}$$

Но $\int\limits_0^z e^{-x}\sin xy\,dy=-e^{-x}\,\frac{\cos xy}{x}\Bigg|_{y=0}^{y=z}=e^{-x}\,\frac{1-\cos xz}{x}$ (это равенство установлено для $x\ne 0$; оно верно и при $x=0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_0^z e^{-x}\sin xy\,dy=\int\limits_0^z\lim_{x\to 0}(e^{-x}\sin xy)\,dy=0;$$

$$\lim_{x\to 0}e^{-x}\,\frac{1-\cos xz}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}\,\frac{2}{x}\sin^2\frac{xz}{2}=0).$$

Тогда (3) для любого конечного z примет вид:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,\frac{1-\cos xz}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln(1+z^2),.$$

2. Имеем: $f'_y(x,y)=(e^{-x}\sin xy)'_y=xe^{-x}\cos xy$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ c\le y\le d.\end{cases}$ $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx=\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx$ сходится равномерно относи-

тельно y на $[c,d]$. В самом деле, $\left|xe^{-x}\cos xy\right| \le xe^{-x}$ для любого $y \in [c,d]$ и $x \in [0,+\infty)$; $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$, т.е. сходится. Поэтому $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$. Тогда по теореме §4

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin xy\,dx\right)'_y = \int\limits_0^{+\infty}(e^{-x}\sin xy)'_y\,dx = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx .$$

Дифференцируя по y обе части равенства (2), получим для любого конечного y

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\cos xy\,dx = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2},\quad y \in [c,d], \tag{4}$$

где $[c,d]$ – любой, но такой, что $1 \le c < d$.

Имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2y},\quad y \in [c,d]. \tag{5}$$

И здесь, используя равенство (5), найдем величины еще некоторых интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$. Действительно, имеем: $\dfrac{1}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{x^2+1}$, $y \in [c,d]$ и $x \in [0,+\infty)$; $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. сходится. Следовательно, $I(y)$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$.

Отметим еще, что функция $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ c \le y \le d. \end{cases}$ Тогда

$$I(y)\in C([c,d]) \;\Rightarrow\; I(y)\in R([c,d]) \;\Rightarrow\; I(y)\in R([1,z])$$
(здесь положено $c=1$, $d=z$, где z – любое конечное, $z>1$).

По теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §3)

$$\int_1^z\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}\right)dy=\int_0^{+\infty}\left(\int_1^z\frac{dy}{x^2+y^2}\right)dx .$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (5) по y от 1 до z, будем иметь

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_1^z\frac{dy}{x^2+y^2}\right)dx=\int_1^z\frac{\pi}{2y}dy . \qquad (6)$$

Но $\displaystyle\int_1^z\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{y=1}^{y=z}=\frac{\operatorname{arctg}\frac{z}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}$ (это равенство установлено для $x\neq 0$; оно верно и при $x=0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\lim_{x\to 0}\int_1^z\frac{dy}{x^2+y^2}=\int_1^z\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+y^2}\right)dy=\int_1^z\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}\Big|_1^z=1-\frac{1}{z},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{z}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{(z-1)x}{x^2+z}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(z-1)x}{x^2+z}}{x}=1-\frac{1}{z}).$$

Тогда (6) для любого конечного $z\geq 1$ примет вид

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{z}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln z .$$

2. Имеем: $f'_y(x,y)=\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)'_y=-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ непрерывна в области $\begin{cases}0\leq x<+\infty,\\ c\leq y\leq d\end{cases}$ $(1\leq c<d)$. $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'_y(x,y)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx$ сходится равномерно относительно y на $[c,d]$. В самом деле, для $y\in[c,d]$ и $x\in[0,+\infty)$ $\left|\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\dfrac{2d}{(x^2+1)^2}$, а $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2d}{(x^2+1)^2}dx$ сходится. Тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (см. §4)

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} \right)'_y = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right)'_y dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} dx .$$

Дифференцируя по y обе части равенства (5), получим

$$-2\int_0^{+\infty} \frac{y\,dx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\pi}{2y^2},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3}, \quad y \in [c,d]. \tag{7}$$

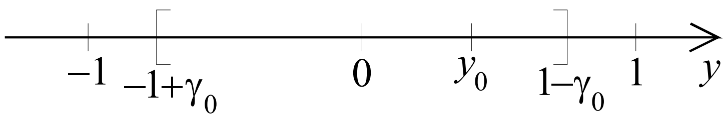
Аналогично обосновывается возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла левой части (7). Тогда, дифференцируя по y обе части равенства (7), находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3} dx = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{y^4}, \; y \in [c,d] \;\Rightarrow\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{1}{y^5}, \; y \in [c,d].$$

Пример 3. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}, \quad |y|<1. \tag{8}$$

▶ Возьмем любую точку $y_0 \in (-1,1)$. Всегда можно указать число $\gamma_0 > 0$ такое, что будет $[-1+\gamma_0, 1-\gamma_0] \subset (-1,1)$ и точка $y_0 \in (-1+\gamma_0, 1-\gamma_0)$.



Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \ln\left(\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\right) \cdot \frac{1}{\cos x} = 2y$ конечен, то функция

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & x \in [0, \pi/2), \; y \in [-1+\gamma_0, 1-\gamma_0], \\ 2y, & x = \pi/2, \quad y \in [-1+\gamma_0, 1-\gamma_0] \end{cases}$$

где $f(x,y) = \ln\left(\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\right) \cdot \frac{1}{\cos x}$, непрерывна в области $\begin{cases} 0 \le x \le \pi/2, \\ -1+\gamma_0 \le y \le 1-\gamma_0, \end{cases}$

причем

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \tilde{f}(x,y)\,dx .$$

Последнее выражение для $I(y)$ – собственный интеграл, зависящий от параметра y.

Имеем: $\widetilde{f}'_y(x,y)=\dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x\le \pi/2,\\ -1+\gamma_0\le y\le 1-\gamma_0.\end{cases}$
По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла, находим

$$I'(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{2\,dx}{1-y^2\cos^2 x}=\left[\begin{array}{ll}\operatorname{tg}x=t\quad\Rightarrow & x=\operatorname{arctg}t,\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}; & \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\,dt}{(1-y^2)+t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$y\in[-1+\gamma_0,1-\gamma_0].$$

В частности, существует $I'(y_0)$, причем $I'(y_0)=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-y_0^2}}$. У нас точка y_0 – любая из $(-1,1)$. Следовательно, $I'(y)=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$, $y\in(-1,1)$. Тогда

$$I(y)=\int\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}dy=\pi\cdot\arcsin y+C,\quad y\in(-1,1). \tag{9}$$

Здесь C – постоянная интегрирования. Из (8) видим, что $I(0)=0$. Положив теперь в обеих частях равенства (9) $y=0$, получим $0=0+C$, откуда $C=0$. Таким образом, окончательно получаем

$$I(y)=\pi\cdot\arcsin y,\quad y\in(-1,1).\ ◀ \tag{10}$$

Пример 4. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy\,dx,\ \ \alpha>0. \tag{11}$$

▶ Имеем:

1) $f(x,y)=e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy$ непрерывна в области $\begin{cases}0\le x<+\infty,\\ c\le y\le d,\end{cases}$ где $[c,d]$ – любой промежуток, и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x,y)=-xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy$.

2) Интеграл $I(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy\,dx$ $(\alpha>0)$ сходится (и даже равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$).

3) Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\,dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c,d]$.

В самом деле, $\left|f'_y(x,y)\right| = \left|-xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\right| \le xe^{-\alpha x^2}$ для любого $y\in[c,d]$ и для всех $x\in[0,+\infty)$, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}d(-\alpha x^2) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2\alpha},$$

т.е. сходится.

По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$I'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\,dx = \begin{bmatrix} u=\sin xy & \Rightarrow & du = y\cos xy\,dx, \\ dv = -xe^{-\alpha x^2}dx \Rightarrow & & v = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\cdot\sin xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0} - \frac{y}{2\alpha}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cdot\cos xy\,dx}_{=I(y)} = -\frac{y}{2\alpha}I(y).$$

Итак, получили уравнение

$$I'(y) = -\frac{y}{2\alpha}\cdot I(y), \tag{12}$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим

$$I(y) = C\cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}, \tag{13}$$

где C – постоянная интегрирования.

Из (11) видим, что

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx. \tag{14}$$

Если в (14) сделать замену $t=\sqrt{\alpha}\cdot x$, то получим

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

В главе 3 (см. §7) было получено $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Следовательно, $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Положив теперь в обеих частях равенства (13) $y=0$, получим

$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$I(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}. \qquad (15)$$

Глава 6. Эйлеровы интегралы

§1. Интеграл Эйлера первого рода (Бета-функция)

Так называется интеграл вида

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx. \qquad (1)$$

Этот интеграл собственный, если одновременно $a \geq 1$, $b \geq 1$. Если же хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то интеграл (1) – несобственный.

Покажем, что интеграл (1) сходится, если одновременно $a > 0$ и $b > 0$.

Видим, что подынтегральная функция в (1) имеет, вообще говоря, две особые точки: $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому представляем (1) в виде:

$$\mathrm{B}(a,b) = \underbrace{\int_0^{1/2} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx}_{=I_2} = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл $I_1 = \int_0^{1/2} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx$. Он – несобственный при $a < 1$. Особая точка $x = 0$. Запишем подынтегральную функцию в виде $f(x) = x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-\alpha}}$ и введем функцию $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$. Так как $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} (1-x)^{b-1} = 1$ при любом b (конечный, $\neq 0$), то интегралы $\int_0^{1/2} f(x)dx$ и $\int_0^{1/2} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int_0^{1/2} g(x)dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится лишь тогда, когда $1 - a < 1$, то есть когда $a > 0$.

Следовательно, I_1 сходится при любом b и лишь при $a > 0$.

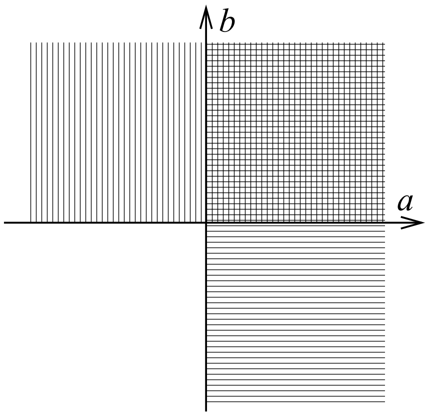


Рис. 6.1. К определению Бета-функции

Рассмотрим $I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx$. Он – несобственный при $b<1$. Особая точка $x=1$. Подынтегральная функция

$$f(x) = x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} = \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}.$$

Положим $\widetilde{g}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1-b}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\widetilde{g}(x)} = \lim\limits_{x\to 1} x^{a-1} = 1$ при любом a (конечный, $\neq 0$). Значит, $\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{1/2}^{1} \widetilde{g}(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int\limits_{1/2}^{1} \widetilde{g}(x)\,dx = \int\limits_{1/2}^{1} \dfrac{dx}{(1-x)^{1-b}}$ сходится лишь тогда, когда $1-b<1$, то есть когда $b>0$. Следовательно, I_2 сходится при любом a и лишь при $b>0$.

Вывод: $\mathrm{B}(a,b)$ сходится, если одновременно $a>0$ и $b>0$. Значит, $\begin{cases} 0<a<+\infty, \\ 0<b<+\infty \end{cases}$ – область определения функции $\mathrm{B}(a,b)$ (рис. 6.1).

Установим некоторые *свойства* Бета-функции $\mathrm{B}(a,b)$.

1. Положим в (1) $x=1-t$. Тогда

$$\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt = \mathrm{B}(b,a). \tag{2}$$

Видим, что Бета-функция – симметричная функция.

2. Пусть $b>1$. Применяя формулу интегрирования по частям, находим

$$\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int\limits_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{x^a}{a}(1-x)^{b-1}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{b-2}dx.$$

Так как $x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$, то будем иметь

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{b-1}{a}\underbrace{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx}_{=\mathrm{B}(a,b-1)} - \frac{b-1}{a}\underbrace{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}_{=\mathrm{B}(a,b)} =$$

$$= \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,\, b-1) - \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a,b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a,b-1). \tag{3}$$

Так как функция $\mathrm{B}(a,b)$ – симметричная, то при $a > 1$ будет справедлива формула

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a-1,b). \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) можно применять для «уменьшения» аргументов, чтобы сделать их, например, меньше единицы. Если $b = n$, где n – натуральное, >1, то, применяя формулу (3) повторно, получим:

$$\mathrm{B}(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\mathrm{B}(a,n-1) = \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\mathrm{B}(a,n-2) = \ldots =$$

$$= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\frac{n-3}{a+n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\mathrm{B}(a,1).$$

Но $\mathrm{B}(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1 = \frac{1}{a}$. Поэтому

$$\mathrm{B}(a,n) = \mathrm{B}(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-2)(a+n-1)}.$$

Если еще и $a = m$, где m – натуральное, то будем иметь

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Получим для функции $\mathrm{B}(a,b)$ другое аналитическое выражение. Для этого в (1) сделаем замену, положив $x = \frac{y}{1+y}$ ($\Rightarrow$ $y = \frac{x}{1-x}$). Тогда $1-x = \frac{1}{1+y}$, $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$ и, следовательно,

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{(1+y)^{b-1}}\cdot\frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy. \tag{5}$$

4. Отметим без доказательства, что если $b = 1-a$ и если еще $0 < a < 1$ (а значит, и $0 < b < 1$), то

$$\mathrm{B}(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a} \qquad (6)$$

Соотношение (6) будет установлено позже (в теории функций комплексного переменного).

§2. Интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция)

Так называется интеграл вида

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx. \qquad (1)$$

Покажем, что интеграл (1) сходится при $a>0$. Для этого представим его в виде

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}dx=\underbrace{\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_2}.$$

Рассмотрим $I_1=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Отметим, что I_1 – собственный интеграл, если $a\ge 1$, и несобственный, если $a<1$ (особая точка $x=0$). Подынтегральная функция $f(x)=x^{a-1}e^{-x}=\dfrac{e^{-x}}{x^{1-a}}$. Положим $g(x)=\dfrac{1}{x^{1-a}}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1$ (конечный, $\ne 0$). Значит, $\int_0^1 f(x)dx$ и $\int_0^1 g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\dfrac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится лишь тогда, когда $1-a<1$, то есть когда $a>0$.

Рассмотрим $I_2=\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Так как при любом a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{a+1}}{e^x}=0$, то существует число $k>1$ такое, что как только $x\ge k$, так сейчас же будет, например, $\dfrac{x^{a+1}}{e^x}<1$. Но тогда при $x\ge k$ будет $\dfrac{x^{a-1}}{e^x}<\dfrac{1}{x^2}$ при любом a. Известно, что $\int_k^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится. Значит, и

$\int\limits_{k}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится при любом a. Следовательно, сходится при любом a и несобственный интеграл I_2.

Общий вывод: интеграл (1) сходится, если $a>0$, и расходится, если $a\le 0$. Областью определения функции $\Gamma(a)$ является промежуток $(0,+\infty)$.

Установим некоторые *свойства* функции $\Gamma(a)$.

1. $\Gamma(a)>0$, $a\in(0,+\infty)$.

Это следует из выражения (1) для $\Gamma(a)$.

2. Рассмотрим произведение $a\Gamma(a)$. Имеем:

$$a\Gamma(a)=a\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx=a\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}d\left(\frac{x^a}{a}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$a\Gamma(a)=a\left[\underbrace{e^{-x}\cdot\frac{x^a}{a}\Bigg|_0^{+\infty}}_{=0}+\frac{1}{a}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx}_{=\Gamma(a+1)}\right],$$

откуда

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a). \tag{2}$$

Равенство (2) выражает так называемое *основное свойство Гамма-функции.* Пользуясь (2), получим при натуральном n и положительном a $(0<a<1)$

$$\Gamma(n+a)=(n+a-1)\Gamma(n+a-1)=(n+a-1)(n+a-2)\Gamma(n+a-2)=\ldots=$$
$$=(n+a-1)(n+a-2)(n+a-3)\cdot\ldots\cdot a\Gamma(a). \tag{3}$$

Таким образом, значение Гамма-функции от аргумента $n+a$, большего единицы, можно выразить через значение Гамма-функции от аргумента a, меньшего единицы. Поэтому таблица значений Гамма-функции обычно дается лишь для значений аргумента между нулем и единицей.

В частности, если в формуле (3) взять $a=1$ и принять во внимание, что $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$, то получим

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!.$$

Таким образом, на Гамма-функцию можно смотреть как на обобщение понятия факториала натурального числа: *Гамма-функция является продолжением функции $a!$, определенной только для целых положительных $a=1,2,3,\ldots$, на всю полуось $a>0$ вещественных чисел.*

3. Покажем, что между Бета-функцией и Гамма-функцией существует следующая связь:

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \qquad (4)$$

Для этого рассмотрим $\Gamma(a+b)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a+b-1}e^{-x}dx$. Сделаем в интеграле замену переменной, положив $x=(1+u)z$, где u – произвольное положительное число. Получим $\Gamma(a+b)=(1+u)^{a+b}\int\limits_0^{+\infty} z^{a+b-1}e^{-(1+u)z}dz$, откуда

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+u)^{a+b}}=\int\limits_0^{+\infty} z^{a+b-1}e^{-(1+u)z}dz.$$

Умножим обе части последнего равенства на u^{a-1} и проинтегрируем по u от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} z^b(uz)^{a-1}e^{-z}e^{-uz}dz\right)du.$$

Но $\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du=\mathrm{B}(a,b)$ (см. §1, формула (5)). Следовательно, предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} z^b(uz)^{a-1}e^{-z}e^{-uz}dz\right)du.$$

В повторном интеграле, стоящем в правой части, переменим порядок интегрирования.

Здесь следует отметить, что мы (при определенных условиях) установили право переставлять два интеграла, из которых лишь один распространен на бесконечный промежуток. Оправдывать такую перестановку в случае, когда оба интеграла берутся по бесконечному промежутку, значительно сложнее. Обоснование возможности перемены порядка интегрирования в нашем повторном интеграле интересующийся может найти в книге Л.Д. Кудрявцева «Курс математического анализа», т. 2, 1981.

Поменяв порядок интегрирования, получаем

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\left(\int\limits_0^{+\infty}(uz)^{a-1}e^{-uz}z\,du\right)dz.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену $uz=v$:

$$\Gamma(a+b)\cdot \mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\left(\int\limits_0^{+\infty}(v)^{a-1}e^{-v}dv\right)dz=\int\limits_0^{+\infty} z^{b-1}e^{-z}\Gamma(a)\,dz=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

В частности, $\mathrm{B}(a,1-a)=\dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}=\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)$. Если $0<a<1$, то отсюда получаем:

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}. \tag{5}$$

Формула (5) носит название *формулы дополнения*.

Пусть $a=1/2$. Из формулы (5) находим $\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi/2)}=\pi$ и, следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{6}$$

Пользуясь соотношениями (3) и (6), получаем для любого $n\in\mathbf{N}$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3\cdot1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

4. Функция $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0,+\infty)$.

▶ Возьмем любую точку $a_0>0$. Всегда можно указать промежуток $[c,d]$ ($0<c<d<+\infty$) такой, что будет: $c<a_0<d$.

Представим $\Gamma(a)$ в виде:

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx=\underbrace{\int\limits_0^{1}x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_1(a)}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx}_{=I_2(a)}=I_1(a)+I_2(a).$$

Рассмотрим $I_1(a)=\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Имеем:

1) $f(x,a)=x^{a-1}e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases}0<x\le 1,\\ c\le a\le d;\end{cases}$

2) $\int\limits_0^1 f(x,a)\,dx=\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на про-

межутке $[c,d]$.

В самом деле, для $0<x\le 1$: $x^a \le x^c \Rightarrow$ умножив обе части этого неравенства на $\dfrac{e^{-x}}{x}$ (>0), получим: $x^{a-1}e^{-x} \le x^{c-1}e^{-x}$ (для $0<x\le 1$ и для $c\le a\le d$). Но интеграл $\int\limits_0^1 x^{c-1}e^{-x}dx$ сходится, если $c>0$. А тогда по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, интеграл $I_1(a)=\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на $[c,d]$. Следовательно, функция $I_1(a)$ непрерывна на $[c,d]$ $\Rightarrow$ $I_1(a)$ непрерывна в точке a_0.

Рассмотрим $I_2(a)=\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Имеем:

1) $f(x,a)=x^{a-1}e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 1\le x<+\infty, \\ c\le a\le d; \end{cases}$

2) $\int\limits_1^{+\infty} f(x,a)dx=\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

В самом деле, для $1\le x<+\infty$: $x^a\le x^d \Rightarrow x^{a-1}e^{-x}\le x^{d-1}e^{-x}$. Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}dx$ сходится для любого конечного d, то $I_2(a)=\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на $[c,d]$. Следовательно, функция $I_2(a)$ непрерывна на $[c,d]$, в частности, $I_2(a)$ непрерывна в точке a_0. Так как $I_1(a)$ и $I_2(a)$ непрерывны в точке a_0, то $\Gamma(a)=I_1(a)+I_2(a)$ непрерывна в точке a_0. У нас a_0 – любая на промежутке $(0,+\infty)$. Значит, $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0,+\infty)$. ◄

5. $\Gamma(a)\sim 1/a$ при $a\to +0$.

В самом деле, запишем соотношение (2) в виде

$$\Gamma(a+1)=\frac{\Gamma(a)}{1/a}$$

и перейдем к пределу при $a\to +0$. В силу непрерывности Гамма-функции в интервале $(0,+\infty)$ $\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a+1)=\Gamma(1)=1$. Значит, и $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{\Gamma(a)}{1/a}=1$, а это означает, что $\Gamma(a) \sim \dfrac{1}{a}$ при $a \to +0$, то есть при приближении a к $+0$ $\Gamma(a)$ ведет себя как эквивалентная ей бесконечно большая положительная величина $1/a$.

6. Функция $\Gamma(a)$ имеет в интервале $(0, +\infty)$ производные всех порядков, причем

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx. \tag{7}$$

Установим существование первой производной функции $\Gamma(a)$ и равенство

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx. \tag{8}$$

Возьмем любую точку $a_0 > 0$. Всегда можно указать промежуток $[c, d]$ ($0 < c < d < +\infty$) такой, что будет $c < a_0 < d$. Имеем:

1) $f(x,a) = x^{a-1} e^{-x}$ и $f_a'(x,a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x$ непрерывны в области $\begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ c \le a \le d. \end{cases}$

2) $\int\limits_0^{+\infty} f(x,a)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится в промежутке $[c, d]$.

3) Покажем, что $\int\limits_0^{+\infty} f_a'(x,a)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$.

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} f_a'(x,a)\, dx = \int\limits_0^{1} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Рассмотрим $\int\limits_0^{1} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$.

Так как $0 < x \le 1$, $c \le a \le d$, то $x^{a-1} e^{-x} \le x^{c-1} e^{-x}$ (см. пункт 4) $\Rightarrow$ $\underbrace{x^{a-1} e^{-x} \ln x}_{\le 0} \ge \underbrace{x^{c-1} e^{-x} \ln x}_{\le 0}$, ибо $\ln x \le 0$ для $x \in (0, 1]$. А тогда

$$\left| x^{a-1} e^{-x} \ln x \right| \le \left| x^{c-1} e^{-x} \ln x \right| = \underbrace{-x^{c-1} e^{-x} \ln x}_{\ge 0}.$$

Так как $e^{-x} < 1$ для $x \in (0, 1]$, то $\left| x^{a-1} e^{-x} \ln x \right| \le -x^{c-1} \ln x$. Имеем:

$$-\int_0^1 x^{c-1}\ln x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=\ln x & \Rightarrow\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^{c-1}dx & \Rightarrow\ v=\dfrac{1}{c}x^c \end{array}\right]=\underbrace{-\frac{1}{c}x^c\ln x\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0}+\frac{1}{c}\int_0^1\frac{dx}{x^{1-c}}.$$

Мы знаем, что $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{1-c}}$ сходится, если $1-c<1$, т. е. если $c>0$. Следовательно, по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что интеграл $\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

Рассмотрим теперь $\int\limits_1^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$.

Для $1\le x<+\infty$, $c\le a\le d$ имеем: $x^{a-1}e^{-x}\le x^{d-1}e^{-x}$ $\Rightarrow$ $x^{a-1}e^{-x}\ln x\le x^{d-1}e^{-x}\ln x$, ибо $\ln x\ge 0$ для $x\in[1,+\infty)$. Имеем: $x^{d-1}e^{-x}\ln x=x^d e^{-x}\frac{\ln x}{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, то существует точка $\tilde{x}$ (>1) такая, что для $x\ge\tilde{x}$: $\frac{\ln x}{x}<1$ и, следовательно, для $x\ge\tilde{x}$: $x^{d-1}e^{-x}\ln x<x^d e^{-x}$. Так как $\int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty}x^d e^{-x}dx$ сходится при любом конечном d, то сходится интеграл $\int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty}x^{d-1}e^{-x}\ln x\,dx$, а значит, сходится $\int\limits_1^{+\infty}x^{d-1}e^{-x}\ln x\,dx$. А тогда по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\int\limits_1^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$. Таким образом, окончательно приходим к выводу, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c,d]$.

Значит, $\Gamma'(a)$ существует для любого $a\in[c,d]$, в частности, существует $\Gamma'(a_0)$. Так как точка a_0 – любая ($a_0>0$), то заключаем: $\Gamma'(a)$ существует для $a \in (0, +\infty)$, причем $\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$. Формула (8) доказана.

Доказательство равенства (7) проводится с помощью аналогичных оценок по индукции.

Теперь мы в состоянии составить себе представление о характере поведения Гамма-функции в интервале $(0; +\infty)$.

Имеем $\Gamma''(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^2 \, dx$. Ясно, что $\Gamma''(a) > 0$ и поэтому $\Gamma'(a)$ строго возрастает в $(0; +\infty)$. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля в интервале $(1, 2)$ лежит точка c такая, что $\Gamma'(c) = 0$. Следовательно, $\Gamma'(a) < 0$ при $0 < a < c$ и $\Gamma'(a) > 0$ при $c < a < +\infty$. Значит, сама функция $\Gamma(a)$ строго убывает в интервале $(0, c)$ и строго возрастает в интервале $(c, +\infty)$. При этом $\lim\limits_{a \to +0} \Gamma(a) = +\infty$ и $\lim\limits_{a \to +\infty} \Gamma(a) = \lim\limits_{n \to +\infty} \Gamma(n) = +\infty$. В точке $a = c$ функция $\Gamma(a)$ достигает своего наименьшего значения. Можно показать, что $c \approx 1.462$; $\Gamma(c) \approx 0.886$. График Гамма-функции представлен на рис. 6.2.

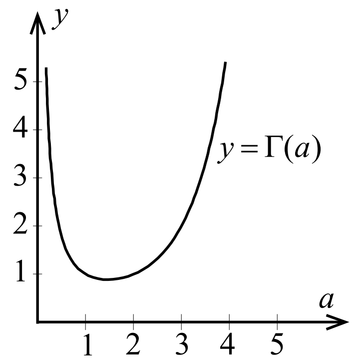


Рис. 6.2. График функции $y = \Gamma(a)$ при $a > 0$

Замечание 1. Пользуясь основным свойством (2) Гамма-функции и опираясь на определение (1) этой функции при положительных значениях аргумента a, можно определить Гамма-функцию и для отрицательных значений аргумента. В самом деле, запишем формулу (2) в виде

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \tag{9}$$

Из (9) видим, что зная значение Гамма-функции при каком-нибудь значении аргумента, можно вычислить ее значение при аргументе, уменьшенном на единицу. Для этого нужно прежнее значение функции разделить на уменьшенное значение аргумента.

Если взять a, удовлетворяющее неравенствам $-1 < a < 0$, то в правой части (9) $\Gamma(a+1)$ будет функцией от положительного аргумента, значение которой определено формулой (1), а в левой части (9) $\Gamma(a)$ будет функцией от отрицательного аргумента. За значение $\Gamma(a)$ при a из промежутка $(-1, 0)$ принимаем значение $\dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$ в соответствии с формулой (9). Так, например,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}\,.$$

Если теперь взять a, удовлетворяющее неравенствам $-2<a<-1$, то правая часть формулы (9) будет содержать значения Гамма-функции при аргументах из промежутка $(-1,0)$, уже определенные нами выше. Это дает возможность по формуле (9) определить значения $\Gamma(a)$ при $-2<a<-1$. В силу этого определения будем иметь, например:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,.$$

Определив теперь значения Гамма-функции в промежутке $(-2,-1)$, мы, пользуясь формулой (9), сможем определить ее значения в промежутке $(-3,-2)$, и т. д. Так мы можем определить значения Гамма-функции при любых отрицательных *не целых* значениях аргумента a.

Выше было отмечено, что $\Gamma(+0)=\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a)=+\infty$. Из формулы (9) находим, что

$$\Gamma(-0)=\lim_{a\to-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=-\infty\,.$$

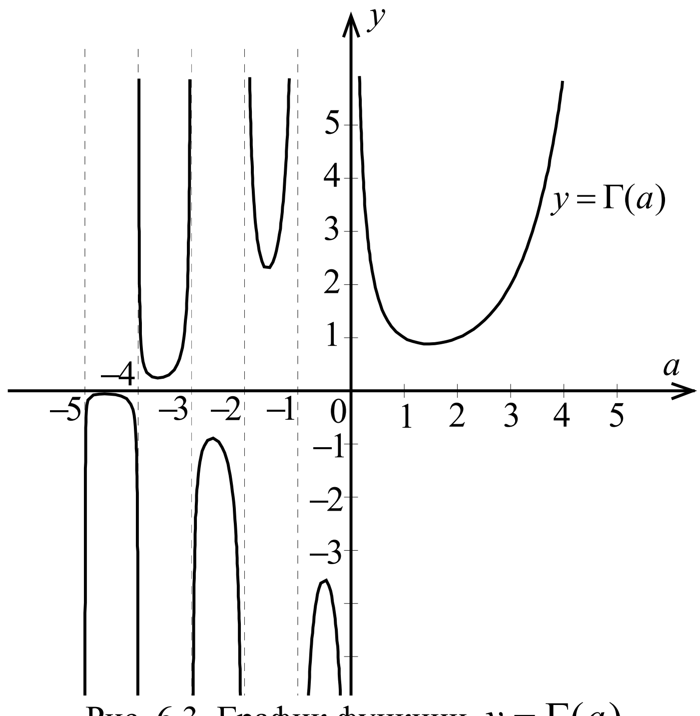


Рис. 6.3. График функции $y=\Gamma(a)$

Пользуясь этой же формулой (9), находим, что

$$\Gamma(-1+0)=\lim_{a\to -1+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(+0)}{-1}=-\infty,$$
$$\Gamma(-1-0)=\lim_{a\to -1-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-0)}{-1}=+\infty,$$
$$\Gamma(-2+0)=\lim_{a\to -2+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-1+0)}{-2}=+\infty,$$
$$\Gamma(-2-0)=\lim_{a\to -2-0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\frac{\Gamma(-1-0)}{-2}=-\infty$$

и т. д. Обычно это выражают словами так: Гамма-функция при нуле и при целых отрицательных значениях аргумента обращается в бесконечность (см. рис. 6.3).

Замечание 2. Введенная в этом параграфе неэлементарная функция $\Gamma(a)$ играет в математике важную роль. Для функции $\Gamma(a)$ составлены подробные таблицы, и при вычислениях она может использоваться наравне с простейшими элементарными функциями – показательной, тригонометрическими и т. д.

Оказывается, что определенные интегралы различных типов могут быть выражены через Гамма-функцию. В частности, к таким интегралам нередко приводят задачи, связанные с вычислением площадей и объемов. Даже если функция имеет первообразную, являющуюся элементарной функцией, интеграл от этой функции зачастую целесообразно вычислять, используя Гамма-функцию.

§3. Примеры к главе 6

Пример 1. Вычислить $I=\int_0^1 x^{a-1}(1-x^c)^{b-1}dx$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

▶ Положим $x^c=t \Rightarrow cx^{c-1}dx=dt \Rightarrow dx=\frac{1}{c}t^{\frac{1-c}{c}}dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{c}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{c}}t^{\frac{1-c}{c}}(1-t)^{b-1}dt=\frac{1}{c}\int_0^1 t^{\frac{a}{c}-1}(1-t)^{b-1}dt=\frac{1}{c}\mathrm{B}\left(\frac{a}{c},b\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{a}{c}+b\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь a,b,c – любые вещественные положительные числа, а значит, вообще говоря, неопределенный интеграл $\int x^{a-1}(1-x^c)^{b-1}dx$ является неэлементарной функцией. Известно, что даже в случае, когда a,b,c – рациональные числа, этот неопределенный интеграл является элементарной функцией лишь тогда, когда по крайней мере одно из чисел b, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c}+b$ – целое. ◀

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{a-1}x\cdot\cos^{b-1}x\,dx$ ($a>0$, $b>0$).

▶ Запишем этот интеграл в виде

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{a-2}x\cdot\cos^{b-2}x\cdot 2\sin x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x\right)^{\frac{a-2}{2}}\cdot\left(\cos^2 x\right)^{\frac{b-2}{2}}\cdot 2\sin x\cos x\,dx.$$

Положим $\sin^2 x=t\ \Rightarrow\ 2\sin x\cos x\,dx=dt$. Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{a}{2}-1}\cdot(1-t)^{\frac{b}{2}-1}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

В частности, при $b=1$ будем иметь

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{a-1}x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что и в этом примере a, b – любые вещественные положительные числа, а значит, неопределенный интеграл $\int\sin^{a-1}x\cdot\cos^{b-1}x\,dx$ является, вообще говоря, неэлементарной функцией. ◀

Пример 3. Вычислить $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{\pi}}$.

▶ Положим $x^{\pi}=t\ \Rightarrow\ x=t^{\frac{1}{\pi}}$ и $dx=\frac{1}{\pi}t^{\frac{1}{\pi}-1}dt$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{1/\pi-1}}{1+t}dt.$$

Мы знаем, что $\mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$. Значит, в нашем примере

$$\begin{cases}\frac{1}{\pi}-1=a-1,\\ 1=a+b,\end{cases}$$

откуда $a=\frac{1}{\pi}$ и $b=1-\frac{1}{\pi}$. Имеем, таким образом,

$$I=\frac{1}{\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\pi},\ 1-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{\pi}\right)}=\frac{1}{\sin 1}$$

(так как $\mathrm{B}(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$, если $0<a<1$). ◀

Пример 4. Вычислить $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}dx$.

▶ Положим $x^3=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{3}}$, $dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$ и $\ln x=\frac{1}{3}\ln t$. Тогда

$$I=\frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\ln t}{1+t}dt.$$

Введем в рассмотрение $\mathrm{B}(a,1-a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt$ $(0<a<1)$. Имеем $\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi a}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по a.

Получим $\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}\cdot\ln t}{1+t}dt=-\pi^2\cdot\frac{\cos\pi a}{\sin^2\pi a}$, откуда при $a=\frac{2}{3}$ находим

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\cdot\ln t}{1+t}dt=-\pi^2\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

Тогда $I=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\pi^2=\frac{2}{27}\pi^2$. ◀

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. – М.–Л.: Физматгиз, 1960.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. – М.: Высшая школа, 1981.
4. Аксёнов А.П. Математический анализ (Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Приложения определенного интеграла). – СПб.: Нестор, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аксёнов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(Интегралы, зависящие от параметра.
Двойные интегралы.
Криволинейные интегралы)

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 065394 от 08.09.97

Подписано в печать . .00. Формат 60×84 1/16.
Объем п.л. Тираж . Заказ № .

Отпечатано в издательстве «НЕСТОР»
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29