Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П. Аксёнов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
1999

УДК 517.38, 517.3821

Аксёнов А.П. Математический анализ. (Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Приложения определенного интеграла.) Учебное пособие. СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 1999, 157 с.

Пособие соответствует государственному стандарту дисциплины «Математический анализ» направления бакалаврской подготовки 510200 «Прикладная математика и информатика».

Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам: «Определенный интеграл», «Несобственные интегралы», «Приложения определенного интеграла». Рассмотрено большое количество примеров.

Предназначено для студентов физико-механического факультета специальностей 010200, 010300, 071100, 210300, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Ил. 56. Библ. 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Понятие определенного интеграла

Чтобы подойти к понятию определенного интеграла, рассмотрим следующие задачи.

Задача 1 (о пройденном пути). Тело движется по прямой линии, причем его скорость в момент времени t равна $v(t)$, $t \in [a,b]$. Найти значение пути S, пройденного телом за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ ($a < b$).

▶ Разбиваем промежуток времени $[a,b]$ произвольным образом на n частичных промежутков $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$). Полагаем $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda = \max\{\Delta t_0, \Delta t_1, \ldots, \Delta t_{n-1}\}$. Предполагаем частичные промежутки столь малыми, что в течение промежутка времени $[t_k, t_{k+1}]$ скорость $v(t)$ тела можно приближенно считать постоянной, равной $v(\tau_k)$, τ_k – любое, принадлежащее $[t_k, t_{k+1}]$. Тогда значение пути ΔS_k, пройденного телом за промежуток времени от $t = t_k$ до $t = t_{k+1}$, будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta S_k \approx v(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = v(\tau_k) \cdot \Delta t_k .$$

Значение всего пути S, пройденного телом за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, будет приближенно выражаться суммой, состоящей из n слагаемых

$$S \approx v(\tau_0) \cdot \Delta t_0 + v(\tau_1) \cdot \Delta t_1 + \ldots + v(\tau_{n-1}) \cdot \Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \cdot \Delta t_k . \qquad (\widetilde{1})$$

Интуитивно ясно, что чем меньше частичные промежутки времени $[t_k, t_{k+1}]$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая движение в течение всего промежутка $[t_k, t_{k+1}]$ равномерным.

Поэтому естественно принять за путь S, пройденный телом за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ ($a < b$), предел суммы ($\widetilde{1}$) при $\lambda \to 0$, т.е.

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \cdot \Delta t_k \quad (\lambda \to 0 \ \Rightarrow \ n \to \infty) . \ ◀$$

Задача 2 (о массе неоднородного стержня). Имеется неоднородный стержень длины l $(= b - a)$ (рис. 1.1). Пусть $\rho(x)$, $x \in [a,b]$, – линейная плотность распределения массы вдоль стержня. Найти массу m этого стержня.

Рис. 1.1. К задаче о массе стержня

▶ Разбиваем стержень произвольным образом на n участков $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$). Полагаем $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\lambda = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$. Предполагаем частичные промежутки столь малыми, что на участке от $x = x_k$ до $x = x_{k+1}$ линейную плотность распределения массы $\rho(x)$ вдоль стержня можно считать постоянной, равной $\rho(\xi_k)$, где ξ_k – любое, принадлежащее $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда масса Δm_k k-го участка стержня будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Масса m всего стержня будет выражаться приближенно суммой, состоящей из n слагаемых

$$m \approx \rho(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + \rho(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \ldots + \rho(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \cdot \Delta x_k . \qquad (\tilde{2})$$

И здесь интуитивно ясно, что чем мельче участки $[x_k, x_{k+1}]$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая участок стержня $[x_k, x_{k+1}]$ однородным. Поэтому за массу стержня естественно принять предел суммы $(\tilde{2})$ при $\lambda \to 0$, т.е.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (\lambda \to 0 \Rightarrow n \to \infty). \blacktriangleleft$$

Введем теперь понятие определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a, b]$ (a и b – конечные числа, $a < b$). Проделаем следующие операции.

1. Разбиваем промежуток $[a, b]$ произвольным образом на n частичных промежутков $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$. Полагаем $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$ (число λ будем называть *рангом дробления*). Отметим, что $n \to \infty$, если $\lambda \to 0$.

2. В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ берем произвольную точку ξ_k и вычисляем в ней значение функции f, т.е. находим $f(\xi_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующего частичного промежутка:

$$f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \big(f(\xi_k) \cdot \Delta x_k\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Сумму σ будем называть *интегральной суммой Римана*. Отметим, что σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения $[a, b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, так и от выбора точек ξ_k в $[x_k, x_{k+1}]$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \to 0$, и ищем $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Если существует конечный предел $J = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a, b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, ни от способа выбора точек ξ_k в $[x_k, x_{k+1}]$, то его называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sigma \qquad \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k\right) \tag{1}$$

(число a – *нижний предел*, а число b – *верхний предел* интеграла).

Замечание 1. Соотношение $J = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma$ означает: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, независимо от выбора точек ξ_k на частичных промежутках $[x_k, x_{k+1}]$, оказывается $|\sigma - J| < \varepsilon$.

Следует обратить внимание, что здесь мы имеем дело с новым типом предельного перехода.

Если у функции $f(x)$, определенной в $[a,b]$, существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то будем говорить, что $f(x)$ *интегрируема* в $[a,b]$, и писать $f(x) \in R([a,b])$ ($f(x)$ принадлежит классу R в промежутке $[a,b]$).

Замечание 2. Не у всякой функции $f(x)$, определенной в $[a,b]$, существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Убедимся в этом на следующем примере.

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b]$ так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональная точка,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональная точка.} \end{cases}$$

($f(x)$, $x \in [a,b]$ – функция Дирихле).

Разобьем промежуток $[a,b]$ произвольным образом на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$). Если в качестве точек ξ_k в $[x_k, x_{k+1}]$ брать рациональные точки, то получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot \Delta x_k = b - a.$$

Если в качестве точек ξ_k в $[x_k, x_{k+1}]$ брать иррациональные точки, то получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot \Delta x_k = 0.$$

Видим, что для функции Дирихле не существует предела интегральных сумм, не зависящего от способа выбора точек ξ_k в $[x_k, x_{k+1}]$. Значит, $f(x) \notin R\big([a,b]\big)$.

Ниже, в §3 этой главы, будут установлены некоторые классы функций, интегрируемых в промежутке $[a,b]$. В частности, будет доказано, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, если $f(x) \in C\big([a,b]\big)$.

Замечание 3. Принимая во внимание определение определенного интеграла, можно заключить:

В задаче 1 значение пути *S*, пройденного телом за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ ($a < b$), определяется по формуле

$$S = \int\limits_a^b v(t)\,dt\,.$$

В задаче 2 масса *m* неоднородного стержня с линейной плотностью распределения массы $\rho(x)$, $x \in [a,b]$ определяется по формуле

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx\,.$$

Здесь, конечно, предполагается, что $\int\limits_a^b v(t)\,dt$ и $\int\limits_a^b \rho(x)\,dx$ существуют.

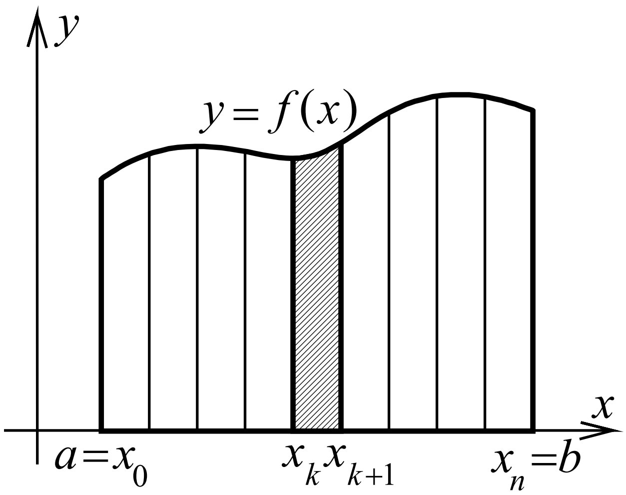

Рис. 1.2. К определению площади криволинейной трапеции

Выясним геометрический смысл интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Он вытекает из решения следующей задачи.

Пусть функция $f(x) \in C\big([a,b]\big)$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ ($a < b$). Рассматривается фигура, ограниченная снизу осью *Ox*, сверху графиком функции $y = f(x)$, а с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$. (Такая фигура называется криволинейной трапецией, рис. 1.2.) Требуется найти площадь *S* этой криволинейной трапеции.

▶ Разбиваем промежуток $[a,b]$ произвольным образом на *n* частичных промежутков $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\,.$$

Через точки дробления проводим отрезки прямых параллельно оси Oy. Криволинейная трапеция разобьется при этом на n полос. Рассмотрим k-ю полосу. Обозначим через S_k площадь k-й полосы. У нас $f(x)\in C([a,b]) \Rightarrow f(x)\in C([x_k,x_{k+1}]) \Rightarrow f(x)$ достигает на промежутке $[x_k,x_{k+1}]$ своих наименьшего и наибольшего значений $m_k = f(\tilde{\xi}_k)$, $M_k = f(\tilde{\tilde{\xi}}_k)$, где $\tilde{\xi}_k \in [x_k,x_{k+1}]$ и $\tilde{\tilde{\xi}}_k \in [x_k,x_{k+1}]$. Рассмотрим два прямоугольника. У них общим основанием является отрезок $x_k x_{k+1}$, а высотами являются соответственно m_k и M_k (рис. 1.3). Ясно, что

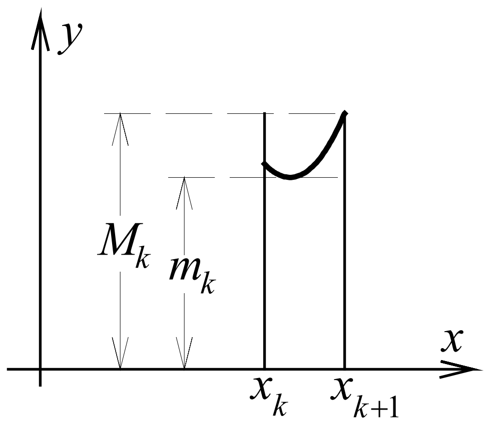

Рис. 1.3. К выводу формулы для площади криволинейной трапеции

$$m_k(x_{k+1}-x_k)\le S_k \le M_k(x_{k+1}-x_k), \quad k=\overline{0,n-1}.$$

Просуммировав эти неравенства по значку k от 0 до $n-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le S \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k \le S \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\tilde{\xi}}_k)\Delta x_k. \qquad (\tilde{3})$$

В этом неравенстве суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\tilde{\xi}}_k)\Delta x_k$ являются интегральными суммами Римана для функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$. Так как $f(x)\in C([a,b])$, то $f(x)\in R([a,b]) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Переходя в неравенстве $(\tilde{3})$ к пределу при $\lambda \to 0$, получаем:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Читая эту формулу справа налево, выясняем геометрический смысл интеграла.

Если $f(x)$ непрерывна и положительна на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$.

Заметим, что современное представление о площади плоской фигуры читатель найдет в главе 3, посвященной приложениям определенного интеграла.

Установим теперь необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Теорема (об ограниченности функции $f(x)$, интегрируемой в $[a,b]$).

Если функция $f(x)\in R([a,b])$, то $f(x)$ – ограниченная в промежутке $[a,b]$.

* ▶ По условию $f(x)\in R([a,b])$. Пусть $J=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Но тогда любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любого способа разбиения $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, у которого $\lambda<\delta$, независимо от выбора точек ξ_k на частичных промежутках $[x_k,x_{k+1}]$, будет $|\sigma-J|<\varepsilon$. В частности, числу $\varepsilon=1$ (>0) будет отвечать $\tilde{\delta}>0$ такое, что для любого способа разбиения $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, у которого $\lambda<\tilde{\delta}$, независимо от выбора точек ξ_k на частичных промежутках $[x_k,x_{k+1}]$, будет $|\sigma-J|<1$.

Возьмем любой способ разбиения $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, у которого $\lambda<\tilde{\delta}$, и закрепим его. (Тогда $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $k=\overline{0,n-1}$ будут определенными числами). Для такого способа разбиения $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, независимо от выбора точек ξ_k в $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, будем иметь

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k-J\right|<1.$$

Теперь выберем и закрепим точки $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1}$ соответственно в промежутках $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, … , $[x_{n-1},x_n]$ (тогда $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, …, $f(\xi_{n-1})$ будут определенными числами). Точку ξ_0 оставим свободной в промежутке $[x_0,x_1]$ (т.е. точка ξ_0 может занимать любое положение в промежутке $[x_0,x_1]$). Будем иметь

$$\left|f(\xi_0)\cdot(x_1-x_0)+\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k-J\right|<1$$

для любого положения точки ξ_0 в $[x_0,x_1]$. Положим

$$C=J-\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

(C – определенное число). Предыдущее неравенство запишется теперь так:

$$\left|f(\xi_0)\cdot(x_1-x_0)-C\right|<1,\ \text{точка } \xi_0\in[x_0,x_1]. \tag{2}$$

Имеем

$$f(\xi_0)(x_1-x_0)=\big(f(\xi_0)(x_1-x_0)-C\big)+C\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|f(\xi_0)(x_1-x_0)\right|\le\left|f(\xi_0)(x_1-x_0)-C\right|+|C|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|f(\xi_0)(x_1-x_0)\right|<1+|C|\ \Rightarrow\ \left|f(\xi_0)\right|<\frac{1+|C|}{x_1-x_0}. \tag{3}$$

Так как $\dfrac{1+|C|}{x_1-x_0}$ – определенное число и так как неравенство (3) имеет место для любого положения точки ξ_0 в промежутке $[x_0, x_1]$, то заключаем, что функция $f(x)$ – ограниченная в промежутке $[x_0, x_1]$. Совершенно аналогично устанавливается ограниченность функции $f(x)$ в каждом из промежутков $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$.

Положим

$$M_0 = \sup_{[x_0, x_1]} \left\{ |f(x)| \right\}, \quad M_1 = \sup_{[x_1, x_2]} \left\{ |f(x)| \right\}, \quad \ldots, \quad M_{n-1} = \sup_{[x_{n-1}, x_n]} \left\{ |f(x)| \right\}.$$

Пусть

$$M = \max\left\{ M_0, M_1, \ldots, M_{n-1} \right\}.$$

Тогда $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ – ограниченная в $[a,b]$. ◄

Замечание 4. Доказанная теорема необратима, т. е. не всякая функция $f(x)$, заданная в $[a,b]$ и ограниченная там, оказывается интегрируемой в $[a,b]$ (например, функция Дирихле). Следовательно, ограниченность функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ является лишь необходимым условием интегрируемости этой функции в $[a,b]$.

§2. Признаки интегрируемости функций

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b]$ ($a<b$; a, b – конечные числа).

На вопрос, существует или не существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, ответить, пользуясь непосредственным определением определенного интеграла, удается сравнительно легко лишь в отдельных частных случаях. В связи с этим оказывается важным установление признаков интегрируемости функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$. Но признаки интегрируемости функции $f(x)$ в $[a,b]$, как мы увидим ниже, содержат понятия верхней и нижней сумм Дарбу. Поэтому необходимо ввести эти понятия.

Итак, пусть $f(x)$ – ограниченная функция, определенная на промежутке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0, n-1}$ ($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$). Так как $f(x)$ – ограниченная на $[a,b]$, то она – ограниченная и на каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0, n-1}$. Положим

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \left\{ f(x) \right\}, \quad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \left\{ f(x) \right\}, \quad k=\overline{0, n-1}.$$

Отметим, что числа m_k и M_k ($k=\overline{0,n-1}$) существуют, ибо множество $\{f(x)\}$, $x\in[x_k,x_{k+1}]$ – ограниченное и снизу, и сверху.

Составим суммы

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k, \qquad S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k .$$

Эти суммы называют соответственно *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, отвечающими данному способу разбиения промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$.

Отметим, что для закрепленного способа дробления промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$ суммы s и S – определенные числа. Если способ дробления изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S.

Отметим далее, что интегральные суммы Римана σ даже для закрепленного способа дробления промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$ принимают, вообще говоря, бесчисленное множество значений (за счет различного выбора точек ξ_k в $[x_k,x_{k+1}]$).

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами.

1. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления промежутка $[a,b]$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления промежутка $[a,b]$. Тогда $s\le\sigma\le S$, $\sigma\in\{\sigma\}$.

▶ Из определений нижней и верхней границ множества $\{f(x)\}$, $x\in[x_k,x_{k+1}]$, имеем

$$m_k\le f(\xi_k)\le M_k, \quad \xi_k\in[x_k,x_{k+1}] \quad (k=\overline{0,n-1}).$$

Умножим каждое из неравенств на Δx_k (у нас $\Delta x_k>0$). Получим

$$m_k\Delta x_k\le f(\xi_k)\Delta x_k\le M_k\Delta x_k \quad (k=\overline{0,n-1}).$$

Просуммируем эти неравенства по значку k от 0 до $n-1$. Получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k ,$$

т.е. $s\le\sigma\le S$. ◀

2. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления промежутка $[a,b]$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления промежутка $[a,b]$. Тогда $s=\inf\{\sigma\}$, $S=\sup\{\sigma\}$.

▶ Покажем, например, что $S=\sup\{\sigma\}$.

Пусть наш закрепленный способ дробления промежутка $[a,b]$ осуществлен точками

$$x_0,x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n \quad (a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. У нас $M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$. Рассмотрим число $M_k - \frac{\varepsilon}{n\Delta x_k}$. По свойству supremum'а утверждаем: на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ обязательно найдется хоть одна точка $\tilde{\xi}_k$ такая, что будет

$$f(\tilde{\xi}_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{n\Delta x_k}.$$

Умножим обе части неравенства на Δx_k ($\Delta x_k > 0$). Получим

$$f(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k > M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{n} \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Просуммируем эти неравенства по значку k от 0 до $n-1$. Получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \varepsilon, \text{ т.е. } \tilde{\sigma} > S - \varepsilon.$$

Здесь $\tilde{\sigma} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k)\Delta x_k$ ($\tilde{\sigma}$ – одна из интегральных сумм Римана, входящих в состав $\{\sigma\}$).

Имеем по свойству 1:

$$\sigma \le S,\ \sigma \in \{\sigma\} \ \Rightarrow\ S \text{ – верхняя граница } \{\sigma\}.$$

Последнее означает, что множество $\{\sigma\}$ – ограниченное сверху. Но тогда, как известно, существует $\sup\{\sigma\}$. Пусть $\gamma = \sup\{\sigma\}$. Ясно, что $\gamma \le S$ (ибо γ – точная верхняя граница $\{\sigma\}$, а S – просто верхняя граница $\{\sigma\}$). Ясно далее, что $\sigma \le \gamma$, $\sigma \in \{\sigma\}$. Следовательно, $\tilde{\sigma} \le \gamma$, а значит, $\gamma > S - \varepsilon$ (так как $\tilde{\sigma} > S - \varepsilon$). Имеем, таким образом,

$$S - \varepsilon < \gamma \le S.$$

В последнем соотношении $\varepsilon > 0$ – любое, сколь угодно малое. Станем изменять ε так, чтобы было $\varepsilon \to 0$. Но тогда из предыдущего неравенства следует, что

$$\gamma = S, \text{ т.е. } S = \sup\{\sigma\}.$$

Совершенно аналогично можно убедиться в том, что $s = \inf\{\sigma\}$. ◄

3. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления промежутка $[a,b]$. Пусть этот закрепленный способ дробления промежутка $[a,b]$ осуществлен точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$). Добавим теперь еще одну точку дробления $\tilde{x}_i$ ($x_i < \tilde{x}_i < x_{i+1}$), (все прежние точки дробления сохраняются) (рис. 1.4). В результате у нас получится некоторый новый способ дробления промежутка $[a,b]$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу дробления промежутка $[a,b]$. Справедливо утверждение, что

$$\widetilde{S} \le S \text{, а } \widetilde{s} \ge s,$$

т.е. что от добавления новых точек дробления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

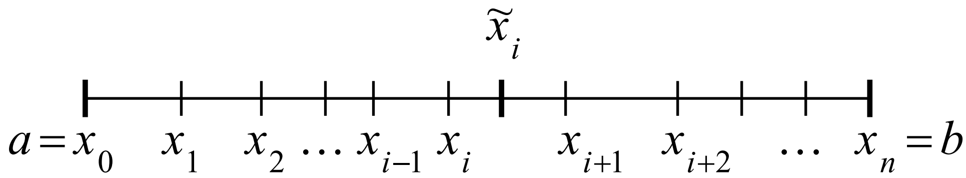

Рис. 1.4. Иллюстрация к свойству 3 сумм Дарбу

▶ Покажем, например, что $\widetilde{S} \le S$. Имеем

$$S = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \ldots + M_{i-1}(x_i - x_{i-1}) +$$
$$+ \underline{M_i(x_{i+1} - x_i)} + M_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}) + \ldots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Все слагаемые суммы *S*, кроме одного, подчеркнутого, войдут без изменения в выражение для $\widetilde{S}$. Вместо слагаемого $M_i(x_{i+1} - x_i)$, входящего в выражение для *S*, в составе суммы $\widetilde{S}$ окажутся два слагаемых

$$M_i'(\widetilde{x}_i - x_i), \quad M_i''(x_{i+1} - \widetilde{x}_i).$$

Здесь $M_i' = \sup\limits_{[x_i, \widetilde{x}_i]} \{f(x)\}$, $M_i'' = \sup\limits_{[\widetilde{x}_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$. Так как

$$\{f(x)\},\ x \in [x_i, \widetilde{x}_i] \quad \subset \quad \{f(x)\},\ x \in [x_i, x_{i+1}],$$
$$\{f(x)\},\ x \in [\widetilde{x}_i, x_{i+1}] \quad \subset \quad \{f(x)\},\ x \in [x_i, x_{i+1}],$$

то $M_i' \le M_i$, $M_i'' \le M_i$. Поэтому

$$M_i'(\widetilde{x}_i - x_i) + M_i''(x_{i+1} - \widetilde{x}_i) \le M_i(\widetilde{x}_i - x_i) + M_i(x_{i+1} - \widetilde{x}_i) = M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Следовательно, $\widetilde{S} \le S$.

Совершенно аналогично можно убедиться в том, что $\widetilde{s} \ge s$. ◀

4. Выше было отмечено, что для закрепленного способа дробления промежутка $[a, b]$ нижняя и верхняя суммы Дарбу *s* и *S* суть определенные числа. Если же способ дробления промежутка $[a, b]$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа *s*, *S*. Следовательно, как *s*, так и *S* принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений.

Пусть $\{s\}$ – множество значений, принимаемых нижней суммой Дарбу, $\{S\}$ – множество значений, принимаемых верхней суммой Дарбу. Справедливо утверждение:

Всякая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу, т.е. для всякой *s* из $\{s\}$ и для всякой *S* из $\{S\}$ оказывается $s \le S$.

▶ Пусть *I* и *II* – любые два различных способа дробления промежутка $[a, b]$ на части. Пусть s_1 и S_1 – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие способу дробления *I*, s_2 и S_2 – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие способу дробления *II*. Утверждение будет доказано, если показать, что $s_1 \le S_2$.

К точкам, осуществляющим дробление способом *I*, добавим точки, осуществляющие дробление способом *II*. Получим некоторый новый способ дробления *III*. Ясно, что $s_3 \le S_3$.

Так как способ дробления *III* получен из способа дробления *I* добавлением новых точек дробления, то, по свойству 3, $s_3 \ge s_1$. Можно считать также, что способ дробления *III* получен из способа дробления *II* добавлением новых точек дробления. Поэтому, по свойству 3, $S_3 \le S_2$.

Итак, имеем:

$$s_1 \le s_3,\ s_3 \le S_3,\ S_3 \le S_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 \le S_2 \ ◀$$

Приступим к установлению признаков интегрируемости функций (полезность знания таковых отмечалась в начале §2).

Теорема 1 (основной признак интегрируемости). Пусть функция $f(x)$ – ограниченная, заданная на $[a,b]$, Для того, чтобы $f(x) \in R([a,b])$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

(разности $S - s$ составляются каждый раз из чисел s и S, отвечающих одному и тому же способу дробления промежутка $[a,b]$).

***** ▶ *Необходимость*. Дано: $f(x) \in R([a,b])$. Доказать: $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию $f(x) \in R([a,b])$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$, для каждой σ из множества $\{\sigma\}$, отвечающих этому способу разбиения, будет $|\sigma - J| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выберем и закрепим какой-нибудь способ разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь $|\sigma - J| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\}$ (здесь $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих нашему закрепленному способу разбиения $[a,b]$), или, что все равно,

$$J - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < J + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sigma \in \{\sigma\}. \tag{1}$$

1) Из соотношения (1) имеем, в частности, $\sigma < J + \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\}$ $\Rightarrow$ $\left(J + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ – верхняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $S = \sup\{\sigma\}$. Поэтому

$$S \le J + \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

(S – верхняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $[a,b]$).

2) Из соотношения (1) имеем также $\sigma > J - \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\}$ $\Rightarrow$ $\left(J - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ – нижняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $s = \inf\{\sigma\}$. Поэтому

$$s \geq J - \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

(s – нижняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закрепленному способу разбиения $[a,b]$).

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$0 \leq S - s \leq \frac{2}{3}\varepsilon .$$

Тогда $0 \leq S - s < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $|S - s| < \varepsilon$. Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 .$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. Доказать: $f(x) \in R\big([a,b]\big)$.

По условию, $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. Это означает, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$, оказывается $|S - s| < \varepsilon$, или $S - s < \varepsilon$ (так как $S - s \geq 0$).

Рассмотрим множества $\{s\}$ и $\{S\}$. Выберем и закрепим любую S из $\{S\}$. Обозначим ее через S_0. По свойству 4 сумм Дарбу, имеем

$$s \leq S_0, \quad s \in \{s\} .$$

Это означает, что $\{s\}$ ограничено сверху. Но тогда, как мы знаем, существует $\sup\{s\}$. Пусть $A = \sup\{s\}$ (A – определенное число). Ясно, что $s \leq A$, $s \in \{s\}$. Ясно далее, что $A \leq S_0$ (так как A – точная верхняя граница $\{s\}$, а S_0 – просто верхняя граница этого множества). У нас S_0 – любая из $\{S\}$. Следовательно, $A \leq S$, $S \in \{S\}$. Таким образом, получили

$$s \leq A \leq S . \tag{4}$$

Отметим, что в соотношении (4) s и S могут отвечать как различным, так и одному и тому же способу разбиения $[a,b]$ на части.

Возьмем любой способ разбиения $[a,b]$ на части. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому способу разбиения $[a,b]$, а s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу. Одновременно будут иметь место соотношения

$$s \leq \sigma \leq S, \quad \sigma \in \{\sigma\}; \quad s \leq A \leq S .$$

Тогда

$$-(S - s) \leq \sigma - A \leq (S - s), \quad \sigma \in \{\sigma\},$$

или

$$|\sigma - A| \le (S - s), \quad \sigma \in \{\sigma\}.$$

Если брать любой способ разбиения $[a,b]$ на части, у которого $\lambda < \delta$, то будет $S - s < \varepsilon$, а значит,

$$|\sigma - A| < \varepsilon, \quad \sigma \in \{\sigma\}.$$

Последнее означает, что

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \quad \Rightarrow \quad f(x) \in R\big([a,b]\big).$$

Достаточность доказана. ◀

Замечание. Имеем

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k .$$

Здесь $\omega_k = M_k - m_k$ – колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

Теперь *основной признак интегрируемости функций* может быть сформулирован так.

Пусть $f(x)$ – ограниченная, заданная на $[a,b]$. Для того, чтобы $f(x) \in R\big([a,b]\big)$, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало $\delta > 0$ такое, что для любого способа разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$, было бы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in R\big([a,b]\big)$. Пусть $[\tilde a, \tilde b] \subset [a,b]$ $(a \le \tilde a < \tilde b \le b)$. Тогда $f(x) \in R\big([\tilde a, \tilde b]\big)$.

Рис. 1.5. К доказательству теоремы 2

* ▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию, $f(x) \in R\big([a,b]\big)$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого способа разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$, будет

$$0 \le S - s = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon .$$

Могут реализоваться два случая.

Случай 1. Точки $\tilde a$ и $\tilde b$ оказываются точками разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$. В этом случае разбиение промежутка $[a,b]$ на части дает также и разбиение промежутка $[\tilde a, \tilde b]$.

Пусть $\tilde S$ и $\tilde s$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению промежутка $[\tilde a, \tilde b]$. Так как каждое слагаемое, входящее в состав выражения для $\widetilde{S}-\widetilde{s}$, будет также слагаемым в выражении для $S-s$, и так как все слагаемые в выражениях для $\widetilde{S}-\widetilde{s}$ и $S-s$ неотрицательные, то будем иметь

$$0 \le \widetilde{S}-\widetilde{s} \le S-s < \varepsilon .$$

Случай 2. Хотя бы одна из точек $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ не является точкой разбиения промежутка $[a,b]$.

В этом случае добавим к точкам разбиения промежутка $[a,b]$ на части точки $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ (одну или обе сразу). В результате получим новый способ разбиения промежутка $[a,b]$ на части.

Пусть S_* и s_* – верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу разбиения промежутка $[a,b]$. Мы знаем по свойству сумм Дарбу, что $S_* \le S$, а $s_* \ge s$. Поэтому $0 \le S_* - s_* \le S - s < \varepsilon$. Но по случаю 1: $0 \le \widetilde{S}-\widetilde{s} \le S_* - s_*$. Следовательно, $0 \le \widetilde{S}-\widetilde{s} < \varepsilon$.

Таким образом, как в случае 1, так и в случае 2 получили $0 \le \widetilde{S}-\widetilde{s} < \varepsilon$, если $\lambda < \delta$. Значит, $f(x) \in R\big([\widetilde{a},\widetilde{b}]\big)$. ◀

Теорема 3. Пусть $f(x)$ – ограниченная, заданная на $[a,b]$. Пусть $a < c < b$. Пусть, далее, $f(x) \in R\big([a,c]\big)$ и $f(x) \in R\big([c,b]\big)$. Тогда $f(x) \in R\big([a,b]\big)$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

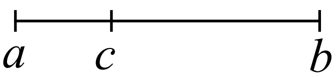

Рис. 1.6. К доказательству теоремы 3

* ▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию, $f(x) \in R\big([a,c]\big) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\widetilde{\delta} > 0$ такое, что для любого способа разбиения $[a,c]$ на части, у которого $\lambda < \widetilde{\delta}$, будет

$$0 \le \widetilde{S}-\widetilde{s} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Здесь $\widetilde{s}$ и $\widetilde{S}$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу для $f(x)$ в $[a,c]$, соответствующие любому разбиению $[a,c]$ на части, у которого $\lambda < \widetilde{\delta}$.

По условию, $f(x) \in R\big([c,b]\big) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\widetilde{\widetilde{\delta}} > 0$ такое, что для любого способа разбиения $[c,b]$ на части, у которого $\lambda < \widetilde{\widetilde{\delta}}$, будет

$$0 \le \widetilde{\widetilde{S}}-\widetilde{\widetilde{s}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Здесь $\widetilde{\widetilde{s}}$ и $\widetilde{\widetilde{S}}$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу для $f(x)$ в $[c,b]$.

Так как $f(x)$ – ограниченная на $[a, b]$ функция, то существуют $\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ и $\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, а значит, существует Ω (Ω – колебание $f(x)$ на $[a, b]$).

Положим $\delta = \min\left\{\tilde{\delta}, \tilde{\tilde{\delta}}, \frac{\varepsilon}{9\Omega}\right\}$ и рассмотрим разбиение $[a, b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ – любое, но такое, у которого $\lambda < \delta$.

Могут реализоваться следующие два случая:

Случай 1. Точка c является точкой разбиения промежутка $[a, b]$.

Случай 2. Точка c не является точкой разбиения промежутка $[a, b]$.

Если реализуется случай 1, то будем иметь

$$0 \le S - s = (\tilde{S} - \tilde{s}) + (\tilde{\tilde{S}} - \tilde{\tilde{s}}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 \le S - s < \varepsilon .$$

Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Следовательно, $f(x) \in R([a, b])$. Кроме того, имеем в этом случае

$$\underset{[a,b]}{\sigma(f)} = \underset{[a,c]}{\sigma(f)} + \underset{[c,b]}{\sigma(f)},$$

и, следовательно, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

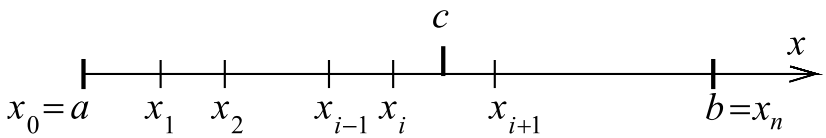

Рис. 1.7. К доказательству теоремы 3.

Допустим теперь, что реализуется случай 2. Пусть $x_i < c < x_{i+1}$ (рис. 1.7). Тогда

$$0 \le S - s = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k =$$

$$= \omega_0 \Delta x_0 + \omega_1 \Delta x_1 + \ldots + \omega_{i-1} \Delta x_{i-1} + \omega_i \Delta x_i + \omega_{i+1} \Delta x_{i+1} + \ldots + \omega_{n-1} \Delta x_{n-1} =$$

$$= \omega_0 \Delta x_0 + \omega_1 \Delta x_1 + \ldots + \omega_{i-1} \Delta x_{i-1} + \tilde{\omega}_i (c - x_i) + \tilde{\tilde{\omega}}_i (x_{i+1} - c) +$$

$$+ \omega_{i+1} \Delta x_{i+1} + \ldots + \omega_{n-1} \Delta x_{n-1} + \left[\omega_i \Delta x_i - \tilde{\omega}_i (c - x_i) - \tilde{\tilde{\omega}}_i (x_{i+1} - c)\right] =$$

$$= (\tilde{S} - \tilde{s}) + (\tilde{\tilde{S}} - \tilde{\tilde{s}}) + \left[\omega_i \Delta x_i - \tilde{\omega}_i (c - x_i) - \tilde{\tilde{\omega}}_i (x_{i+1} - c)\right].$$

Так как

$$\left|\omega_i \Delta x_i - \tilde{\omega}_i (c - x_i) - \tilde{\tilde{\omega}}_i (x_{i+1} - c)\right| \le$$

$$\le \left|\omega_i \Delta x_i\right| + \left|\tilde{\omega}_i (c - x_i)\right| + \left|\tilde{\tilde{\omega}}_i (x_{i+1} - c)\right| \le \Omega \cdot 3\lambda < \Omega \cdot 3\delta \le \frac{\varepsilon}{3},$$

то получаем $0 \le S - s < \varepsilon$, если $\lambda < \delta$. Отсюда следует, что $f(x) \in R([a, b])$.

Имеем далее в этом случае

$$\sigma_{[a,b]}(f) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} +$$
$$+ f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_{i+1})\Delta x_{i+1} + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} =$$
$$= f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} + f(\tilde{\xi}_i)(c - x_i) + f(\tilde{\tilde{\xi}}_i)(x_{i+1} - c) +$$
$$+ f(\xi_{i+1})\Delta x_{i+1} + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + \left[f(\xi_i)\Delta x_i - f(\tilde{\xi}_i)(c - x_i) - f(\tilde{\tilde{\xi}}_i)(x_{i+1} - c) \right] =$$
$$= \sigma_{[a,c]}(f) + \sigma_{[c,b]}(f) + \left[f(\xi_i)\Delta x_i - f(\tilde{\xi}_i)(c - x_i) - f(\tilde{\tilde{\xi}}_i)(x_{i+1} - c) \right].$$

(здесь $\tilde{\xi}_i \in [x_i, c]$, $\tilde{\tilde{\xi}}_i \in [c, x_{i+1}]$).

Таким образом, получили:

$$\sigma_{[a,b]}(f) = \sigma_{[a,c]}(f) + \sigma_{[c,b]}(f) + (\text{б.м.в. при } \lambda \to 0).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

§ 3 Классы интегрируемых функций

Установим некоторые классы интегрируемых функций, используя признаки интегрируемости.

Теорема 1. Если $f(x) \in C([a,b])$, то $f(x) \in R([a,b])$ (т.е. если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ существует).

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию, $f(x) \in C([a,b]) \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$ (см. теорему Кантора) $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \delta$, будет $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ одновременно для всех $k = \overline{0, n-1}$ (см. следствие из теоремы Кантора).

Возьмем любой способ разбиения $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$, у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь для такого способа разбиения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Неравенство $0 \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$ получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Последнее означает, что $f(x) \in R([a,b])$. ◄

Теорема 2. Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на $[a,b]$ и является там монотонной. Тогда $f(x) \in R([a,b])$.

► Для определенности рассмотрим случай, когда $f(x)$ – монотонно возрастающая на $[a,b]$.

Возьмем любое разбиение $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Для нашей функции $f(x)$ будет

$$m_k = f(x_k), \quad M_k = f(x_{k+1}), \quad \omega_k = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

Поэтому

$$0 \le S - s = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \Delta x_k .$$

Имеем $0 < \Delta x_k \le \lambda$, $k = \overline{0, n-1}$. Поэтому

$$0 \le S - s \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) = \lambda\Big(\big(f(x_1) - f(x_0)\big) + \big(f(x_2) - f(x_1)\big) +$$

$$+ \big(f(x_3) - f(x_2)\big) + \ldots + \big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big)\Big) = \lambda\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \lambda\big(f(b) - f(a)\big).$$

Итак,

$$0 \le S - s \le \lambda\big(f(b) - f(a)\big). \tag{1}$$

Переходя в неравенстве (1) к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in R([a,b]). \text{ ◄}$$

Теорема 3. Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на $[c,d]$ и непрерывна там всюду, за исключением точки *d*. Тогда $f(x) \in R([c,d])$.

* ► Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию, $f(x)$ – ограниченная на $[c,d]$ $\Rightarrow$ существуют $m = \inf_{[c,d]}\{f(x)\}$ и $M = \sup_{[c,d]}\{f(x)\}$, а следовательно, существует $\Omega = M - m$ (Ω – колебание $f(x)$ на $[c,d]$). Возьмем теперь $\tilde{\varepsilon} > 0$ – любое, но такое, чтобы было

$$\tilde{\varepsilon} < \min\left\{(d - c), \frac{\varepsilon}{(d - c) + 2\Omega}\right\}. \tag{2}$$

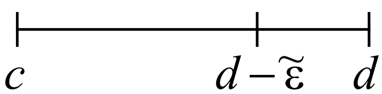

Рис. 1.8. К доказательству теоремы 3

Так как $0 < \tilde{\varepsilon} < d - c$, то точка $(d - \tilde{\varepsilon}) \in (c,d)$ (рис. 1.8). По условию, $f(x)$ – непрерывная на $[c,d]$ всюду, за исключением точки d $\Rightarrow$ $f(x) \in C([c, d - \tilde{\varepsilon}])$. Но тогда, по следствию к теореме

Кантора, взятому $\tilde{\varepsilon} > 0$ отвечает $\tilde{\delta} > 0$ такое, что для любого разбиения промежутка $[c, d - \tilde{\varepsilon}]$ на части, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, будет $\omega_k < \tilde{\varepsilon}$ одновременно для всех *k*. Заметим, что в случае надобности число $\tilde{\delta} > 0$ можно уменьшить. (Если λ будет меньше уменьшенного $\tilde{\delta}$, то и подавно $\omega_k < \tilde{\varepsilon}$ одновременно для всех *k*). Имея в виду замеченное, будем считать, например, $\tilde{\delta} < \tilde{\varepsilon}$.

Далее поступаем так. Берем произвольное разбиение $[c, d]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, и составляем сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k . \tag{3}$$

Затем (3) представляем в виде суммы двух сумм

$$\sum\nolimits_I \omega_k \Delta x_k, \quad \sum\nolimits_{II} \omega_k \Delta x_k .$$

В $\sum_I \omega_k \Delta x_k$ отправляем все те слагаемые из (3), которые соответствуют частичным промежуткам $[x_k, x_{k+1}]$, целиком лежащим в $[c, d - \tilde{\varepsilon}]$ (рис. 1.9). В $\sum_{II} \omega_k \Delta x_k$ отправляем все остальные слагаемые из (3).

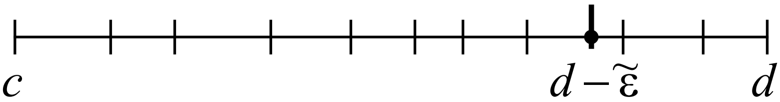

Рис. 1.9. К доказательству теоремы 3

Произведем оценку сумм $\sum_I \omega_k \Delta x_k$ и $\sum_{II} \omega_k \Delta x_k$.

1. Имеем $\sum_I \omega_k \Delta x_k < \sum_I \tilde{\varepsilon} \Delta x_k = \tilde{\varepsilon} \sum_I \Delta x_k \le \tilde{\varepsilon}\left[(d - \tilde{\varepsilon}) - c\right] < \tilde{\varepsilon}(d - c)$.

2. Замечаем, что сумма длин частичных промежутков, соответствующих слагаемым суммы $\sum_{II} \omega_k \Delta x_k$ будет меньше числа $\tilde{\varepsilon} + \lambda$. У нас $\lambda < \tilde{\delta}$, а $\tilde{\delta} < \tilde{\varepsilon}$. Поэтому $\tilde{\varepsilon} + \lambda < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\delta} < 2\tilde{\varepsilon}$.

Замечаем также, что $\omega_k \le \Omega$, $k = \overline{0, n-1}$. Поэтому

$$\sum\nolimits_{II} \omega_k \Delta x_k \le \Omega \sum\nolimits_{II} \Delta x_k < \Omega(\tilde{\varepsilon} + \lambda) < \Omega \cdot 2\tilde{\varepsilon} .$$

Тогда для суммы (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \tilde{\varepsilon}(d - c) + \tilde{\varepsilon} \cdot 2\Omega = \tilde{\varepsilon}\left[(d - c) + 2\Omega\right].$$

У нас (см. (2)) $\tilde{\varepsilon} < \dfrac{\varepsilon}{(d - c) + 2\Omega}$. Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, если $\lambda < \tilde{\delta}$ $\Rightarrow$ $f(x) \in R([c, d])$. ◄

Замечание. Совершенно аналогично доказывается утверждение:

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на $[c,d]$ и непрерывна там всюду, за исключением точки *c*. Тогда $f(x) \in R([c,d])$.

Обобщение теоремы 3. Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на $[a,b]$ и непрерывна там всюду, за исключением конечного числа точек. Тогда $f(x) \in R([a,b])$.

▶ Ясно, что промежуток $[a,b]$ можно разбить на конечное число участков, в каждом из которых будет находиться лишь одна точка разрыва функции $f(x)$, причем эта точка будет лежать на конце участка (рис. 1.10). Пусть, например, $f(x)$ имеет внутри промежутка $[a,b]$ три точки разрыва. Во всех остальных точках промежутка $[a,b]$ $f(x)$ – непрерывна. В этом случае, как видим, промежуток $[a,b]$ может быть разбит на шесть участков. На каждом из шести участков функция $f(x)$ непрерывна всюду, за исключением одной точки, лежащей на конце участка.

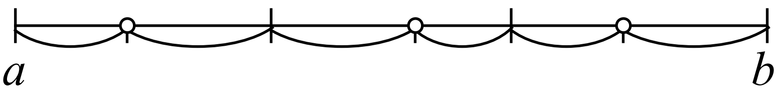

Рис. 1.10. К доказательству обобщения теоремы 3

По теореме 3 функция $f(x)$ интегрируема на каждом таком участке. Пользуясь затем теоремой 3 предыдущего параграфа, приходим к заключению, что $f(x) \in R([a,b])$. ◀

Пример 1. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на промежутке $[0, 3]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{если } 1 \le x < 2, \\ 3, & \text{если } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Эта функция – ограниченная и непрерывная на $[0, 3]$ всюду, за исключением точек $x = 1$ и $x = 2$ (только две точки разрыва). Вывод: $f(x) \in R([0, 3])$ (см. обобщение теоремы 3).

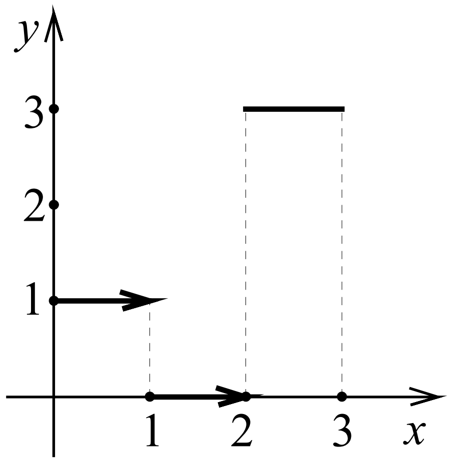

Рис. 1.11. График функции из примера 1

Пример 2. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на промежутке $[0, 1]$ следующим образом:

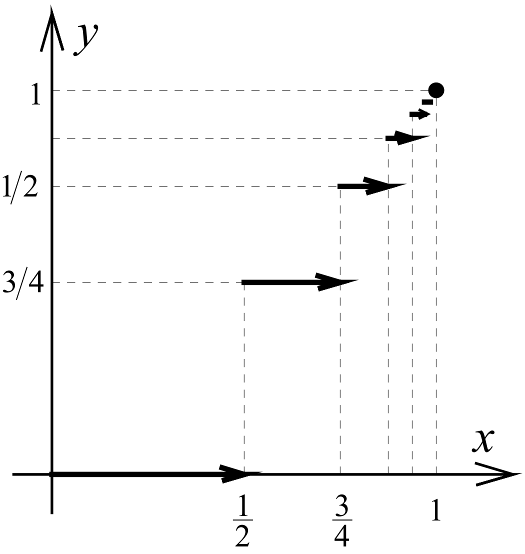

Рис. 1.12. График функции из примера 2

$$
f(x)=\begin{cases}
0, & \text{если } 0\le x<\dfrac{1}{2},\\
\dfrac{1}{2}, & \text{если } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{4},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, & \text{если } \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\le x<\dfrac{2^{n}-1}{2^{n}},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
1, & \text{если } x=1.
\end{cases}
$$

Эта функция – ограниченная на $[0,1]$ и монотонно возрастающая там (рис. 1.12). Вывод: $f(x)\in R\big([0,1]\big)$ (см. теорему 2).

Замечание. В примере 2 мы имели функцию $f(x)$, которая на промежутке $[0,1]$ имеет бесконечное число точек разрыва.

Пример 3. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на промежутке $[0,1]$ следующим образом:

$$
f(x)=\begin{cases}
0, & \text{если } x=0,\\
\dfrac{x\ln x}{1-x}, & \text{если } 0<x<1,\\
-1, & \text{если } x=1.
\end{cases}
$$

Непрерывность этой функции $f(x)$ в $(0,1)$ очевидна. Имеем далее:

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x\ln x}{1-x}=0=f(0)$$ ($f(x)$ непрерывна справа в точке $x=0$);

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x\ln x}{1-x}=-1=f(1)$$ ($f(x)$ непрерывна слева в точке $x=1$).

Видим, что $f(x)\in C\big([0,1]\big)\ \Rightarrow\ f(x)\in R\big([0,1]\big)$ (см. теорему 1).

Пример 4. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b]$ следующим образом:

$$
f(x)=\begin{cases}
c_i\ne 0, & \text{если } x=x_i,\ (x_i\in[a,b],\ i=\overline{1,p}),\ p \text{ – конечное число},\\
0, & \text{если } x\in[a,b] \text{ и } x\ne x_i.
\end{cases}
$$

Видим, что $f(x)$ – ограниченная на $[a,b]$ и что $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ всюду, за исключением конечного числа точек. По обобщению теоремы 3 заключаем: $f(x)\in R\big([a,b]\big)$.

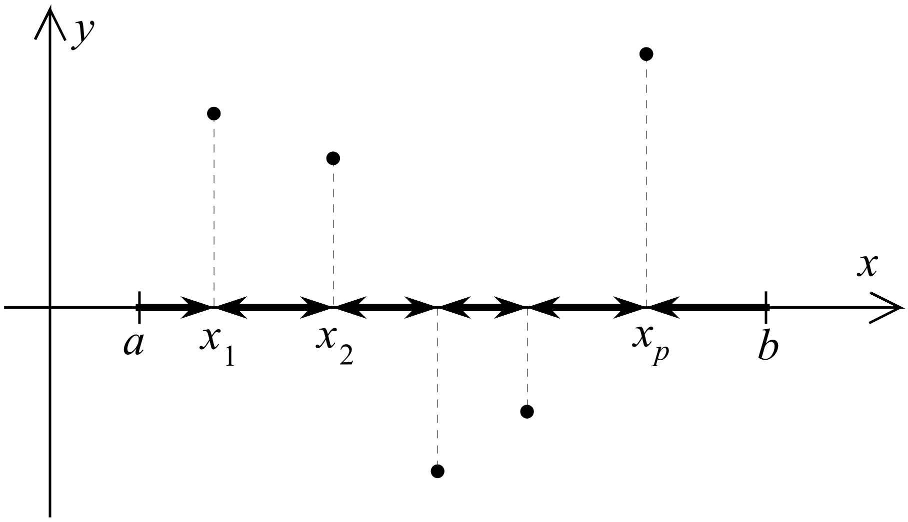

Рис. 1.13. График функции из примера 4

Покажем, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Для этого берем произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ и составляем интегральную сумму Римана

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,.$$

В этой сумме отличных от нуля слагаемых не более чем p (p – конечное число), причем каждое такое слагаемое, отличное от нуля, – бесконечно малая величина (б.м.в.) при $\lambda \to 0$. Но тогда и σ – б.м.в. при $\lambda \to 0$ (как сумма конечного числа б.м.в.). Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = 0$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

§4. Действия над интегрируемыми функциями

Теорема 1. Пусть $f(x) \in R([a,b])$, и пусть α – определенное число. Тогда $\alpha \cdot f(x) \in R([a,b])$, причем

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

▶ Возьмем произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ и составим интегральную сумму Римана для функции $\alpha f(x)$. Будем иметь

$$\sigma(\alpha f) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha f(\xi_k)\,\Delta x_k = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \alpha \cdot \sigma(f)\,.$$

По условию, $f(x)\in R([a,b])$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ существует, конечный и равный $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Но тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)=\alpha\lim_{\lambda\to 0}\sigma(f)=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

т.е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(\alpha f)$ существует, конечный $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx$ существует, причем

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleleft$$

Теорема 2. Пусть $f(x)\in R([a,b])$ и $g(x)\in R([a,b])$. Тогда $\big(f(x)\pm g(x)\big)\in R([a,b])$, причем

$$\int\limits_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx\pm\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

$\blacktriangleright$ Берем произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$ и составляем интегральную сумму Римана для функции $f(x)\pm g(x)$. Будем иметь:

$$\sigma(f\pm g)=\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(\xi_k)\pm g(\xi_k)\big)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\,\Delta x_k\pm\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\,\Delta x_k=\sigma(f)\pm\sigma(g).$$

По условию $f(x)\in R([a,b])$ и $g(x)\in R([a,b])$ $\Rightarrow$ существуют конечные $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(g)$. Но тогда существует конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)$, причем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma(f\pm g)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma(f)\pm\lim_{\lambda\to 0}\sigma(g)\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\int\limits_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx$ существует, причем

$$\int\limits_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx\pm\int\limits_a^b g(x)\,dx. \blacktriangleleft$$

Теорема 3. Пусть $f(x)\in R([a,b])$. Если в конечном числе точек промежутка $[a,b]$ изменить значения функции $f(x)$, то от этого интегрируемость функции не нарушится и величина интеграла не изменится.

$\blacktriangleright$ Изменим значения функции $f(x)$ в точках x_i ($i=\overline{1,p}$, p – конечное число; $x_i\in[a,b]$). В результате получим некоторую новую функцию $\widetilde{f}(x)$, $x\in[a,b]$. Положим

$$r(x)=\tilde{f}(x)-f(x),\quad x\in[a,b]. \tag{1}$$

Функция $r(x)$ на промежутке $[a,b]$ будет задана так:

$$r(x)=\begin{cases} c_i\neq 0, & \text{если } x=x_i,\ (x_i\in[a,b],\ i=\overline{1,p}),\\ 0, & \text{если } x\in[a,b] \text{ и } x\neq x_i. \end{cases}$$

Было показано (см. пример 4 предыдущего параграфа), что $r(x)\in R([a,b])$ и что $\int\limits_a^b r(x)\,dx=0$.

Из (1) имеем $\tilde{f}(x)=f(x)+r(x)$. Так как $f(x)\in R([a,b])$ и $r(x)\in R([a,b])$, то по теореме 2 заключаем, что $\tilde{f}(x)\in R([a,b])$, причем

$$\int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b r(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+0=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleleft$$

Теорема 4. Пусть $f(x)\in R([a,b])$. Тогда $|f(x)|\in R([a,b])$, причем $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

$\blacktriangleright$ По условию $f(x)\in R([a,b])$. Значит, $f(x)$ – ограниченная на $[a,b]$, т.е. существует число $L>0$ такое, что $|f(x)|\leq L$, $x\in[a,b]$. Последнее означает, что функция $|f(x)|$ – ограниченная на $[a,b]$. Но тогда существуют $m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M=\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, $\tilde{m}=\inf\limits_{[a,b]}\{|f(x)|\}$, $\tilde{M}=\sup\limits_{[a,b]}\{|f(x)|\}$, а следовательно, существуют $\Omega=M-m$ и $\tilde{\Omega}=\tilde{M}-\tilde{m}$ (Ω – колебание $f(x)$, а $\tilde{\Omega}$ – колебание $|f(x)|$ на $[a,b]$). Легко понять, что $\tilde{\Omega}\leq\Omega$.

Возьмем произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$. Пусть ω_k – колебание $f(x)$ на $[x_k,x_{k+1}]$, $\tilde{\omega}_k$ – колебание $|f(x)|$ на $[x_k,x_{k+1}]$. Имеем $0\leq\tilde{\omega}_k\leq\omega_k$, $k=\overline{0,n-1}$. Тогда $0\leq\tilde{\omega}_k\Delta x_k\leq\omega_k\Delta x_k$, $k=\overline{0,n-1}$, и, следовательно,

$$0\leq\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\omega}_k\Delta x_k\leq\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k. \tag{2}$$

Так как $f(x)\in R([a,b])$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$. Тогда из (2) заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{\omega}_k\Delta x_k=0$. Последнее означает, что $|f(x)|\in R([a,b])$.

Имеем, далее,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(\xi_k)\right| \Delta x_k ,$$

т.е. $|\sigma(f)| \le \sigma(|f|)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx . \blacktriangleleft$$

Теорема 5. Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$. Тогда $p(x) = f(x) \cdot g(x) \in R([a,b])$.

* ▶ По условию $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$. Значит, эти функции – ограниченные на $[a,b]$, т.е. существуют числа $L_f > 0$ и $L_g > 0$ такие, что

$$|f(x)| \le L_f, \quad |g(x)| \le L_g, \quad x \in [a,b]. \tag{3}$$

Существуют также числа M_f, m_f, M_g, m_g:

$$M_f = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}, \quad m_f = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}, \quad M_g = \sup_{[a,b]}\{g(x)\}, \quad m_g = \inf_{[a,b]}\{g(x)\},$$

а, следовательно, существуют

$$\Omega_f = M_f - m_f, \quad \Omega_g = M_g - m_g \tag{4}$$

(Ω_f – колебание функции $f(x)$, Ω_g – колебание функции $g(x)$ на $[a,b]$).

Пусть u и v – любые две точки из $[a,b]$. Имеем

$$p(u) - p(v) = f(u)g(u) - f(v)g(v) = f(u)g(u) - f(u)g(v) + f(u)g(v) - f(v)g(v) =$$

$$= f(u)\big(g(u) - g(v)\big) + g(v)\big(f(u) - f(v)\big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |p(u) - p(v)| \le \underbrace{|f(u)|}_{\le L_f} \cdot \underbrace{|g(u) - g(v)|}_{\le \Omega_g} + \underbrace{|g(v)|}_{\le L_g} \cdot \underbrace{|f(u) - f(v)|}_{\le \Omega_f} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |p(u) - p(v)| \le L_f\Omega_g + L_g\Omega_f \quad \Rightarrow \quad \Omega_p \le L_f\Omega_g + L_g\Omega_f . \tag{5}$$

Возьмем теперь произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Пусть $\omega_p^{(k)}$, $\omega_f^{(k)}$, $\omega_g^{(k)}$ – колебания функций $p(x)$, $f(x)$, $g(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ соответственно. Нетрудно понять, что

$$\omega_p^{(k)} \le L_f\omega_g^{(k)} + L_g\omega_f^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{6}$$

Умножим обе части неравенства (6) на Δx_k ($\Delta x_k > 0$) и просуммируем по k от 0 до $n-1$. Получим:

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_p^{(k)} \Delta x_k \le L_f \sum_{k=0}^{n-1} \omega_g^{(k)} \Delta x_k + L_g \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f^{(k)} \Delta x_k . \tag{7}$$

Так как $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_f^{(k)}\Delta x_k = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_g^{(k)}\Delta x_k = 0.$$

Тогда, переходя к пределу при $\lambda\to 0$ в (7), будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_p^{(k)}\Delta x_k = 0 \quad\Rightarrow\quad p(x)=f(x)\cdot g(x)\in R([a,b]). \blacktriangleleft$$

§5. Свойства определенного интеграла

1°. $\int\limits_a^b dx = b-a$.

$\blacktriangleright$ В самом деле, здесь $f(x)\equiv 1$, $x\in[a,b]$. Поэтому, взяв любое разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, и выбрав произвольно точки ξ_k в $[x_k,x_{k+1}]$, будем иметь $f(\xi_0)=1$; $f(\xi_1)=1$; … ; $f(\xi_{n-1})=1$. Следовательно,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=b-a \quad\Rightarrow\quad \lim_{\lambda\to 0}\sigma=b-a. \blacktriangleleft$$

2°. В определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вместо *x* можно писать любую другую букву. Так что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(t)\,dt=\ldots=\int\limits_a^b f(z)\,dz. \qquad (1)$$

$\blacktriangleright$ Действительно, если взять произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на частичные промежутки и выбрать произвольно точки ξ_k (по одной в каждом частичном промежутке), то для функций $f(x)$, $x\in[a,b]$; $f(t)$, $t\in[a,b]$; … ; $f(z)$, $z\in[a,b]$ мы получим одну и ту же величину σ. Следовательно, и величина определенного интеграла не будет зависеть от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования. $\blacktriangleleft$

Замечание (о расширении смысла символа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$). Пусть $f(x)\in R([a,b])$, $a<b$. Условимся считать

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Условимся считать также

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,. \tag{3}$$

3°. Пусть *a*, *b*, *c* – три числа. Пусть $p = \min\{a,b,c\}$; $q = \max\{a,b,c\}$. Тогда, если $f(x) \in R([p,q])$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\,. \tag{4}$$

▶ Если все три числа *a*, *b*, *c* равны между собой, или если равны любые два из этих чисел, то (4) выполняется (это очевидно). Пусть теперь *a*, *b*, *c* – различные числа. Могут иметь место следующие случаи:

1) $a < b < c$	4) $b < c < a$
2) $a < c < b$	5) $c < a < b$
3) $b < a < c$	6) $c < b < a$.

В случае 1) соотношение (4) верно (это следует из теорем 2 и 3 §2). Все остальные пять случаев сводятся к случаю 1).

Действительно, рассмотрим, например, случай 5). Из теорем 2 и 3 §2 следует

$$\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow$$

принимая во внимание (2),

$$\Rightarrow \quad -\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\,,$$

а это и требовалось установить. ◀

4°. **Теорема об интегральном среднем значении функции в промежутке**. Пусть $f(x) \in R([a,b])$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\,, \tag{5}$$

где μ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $m \le \mu \le M$ ($m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$).

▶ 1) Если $b = a$, то (5) выполняется для любого $\mu \in [m, M]$.

2) Обсудим случай, когда $a < b$ (порядок пределов нормальный). Берем произвольное разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$; $\Delta x_k > 0$) и выбираем произвольно точки ξ_k (по одной в каждом частичном промежутке). При любом $k = \overline{0, n-1}$ будем иметь $m \le f(\xi_k) \le M$. Умножим обе

части этого двойного неравенства на Δx_k ($\Delta x_k > 0$) и просуммируем по k от 0 до $n-1$. Получим

$$m\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \le M\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k ,$$

т.е.

$$m\cdot(b-a) \le \sigma(f) \le M\cdot(b-a). \tag{6}$$

У нас $f(x)\in R([a,b]) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma(f)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Переходя в (6) к пределу при $\lambda\to 0$, получим

$$m\cdot(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a). \tag{7}$$

Мы обсуждаем случай, когда $a<b$, т.е. когда $b-a>0$. Разделив все части двойного неравенства (7) на $b-a$, будем иметь

$$m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Обозначим $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu$ (ясно, что $m\le\mu\le M$). Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, а это и требовалось установить.

3). Рассмотрим теперь случай, когда $a>b$. Мы знаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{8}$$

У интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ порядок пределов нормальный ($b<a$). В пункте 2) было установлено для такого интеграла

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = \mu(a-b), \qquad m\le\mu\le M.$$

Принимая во внимание (8), последнее соотношение можно переписать в виде

$$-\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\mu(b-a) \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \blacktriangleleft$$

Частный случай теоремы об интегральном среднем. Пусть $f(x)\in C([a,b])$. Тогда на промежутке $[a,b]$ обязательно найдется по крайней мере одна точка c такая, что будет

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

▶ По условию, $f(x)\in C([a,b]) \;\Rightarrow\; f(x)$ достигает в $[a,b]$ своих наименьшего m и наибольшего M значений. Так как $f(x)\in C([a,b])$, то $f(x)\in R([a,b])$. Тогда, по теореме о среднем,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad \text{где} \quad m \le \mu \le M.$$

Значения m и M $f(x)$ принимает на $[a,b]$. Если же $m<\mu<M$, то по теореме о промежуточном значении для функции $f(x)\in C([a,b])$ заключаем: на $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что будет $f(c)=\mu$, а значит, и в этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Число μ, определяемое соотношением $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, называется *интегральным средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

К этому понятию приводят следующие рассуждения. Разобьем промежуток $[a,b]$ на n частичных промежутков $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, равной длины. Тогда $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ для любого $k=\overline{0,n-1}$. В каждом частичном промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем среднюю точку ξ_k, $k=\overline{0,n-1}$, и находим $f(\xi_k)$. Составим среднее арифметическое найденных значений функции. Это будет

$$f_{\text{ср}} = \frac{f(\xi_0)+f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})}{n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{ср}} = \frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = \frac{1}{b-a}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\frac{b-a}{n} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \xrightarrow[\substack{\lambda\to 0\\ (\lambda=\Delta x_k)}]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следует отметить, что интегральное среднее значение функции широко используется в инженерной и естественнонаучной практике.

Замечание 2 (геометрическая интерпретация теоремы об интегральном среднем значении функции). Пусть $f(x)\in C([a,b])$ и $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$ ($a<b$). В этом частном случае из соотношения (5) следует, что существует прямоугольник с высотой $\mu=f(c)$ и длиной основания $(b-a)$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$.

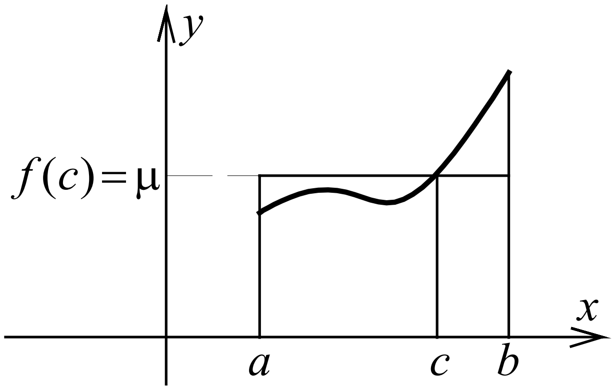

Рис. 1.14. Геометрическая интерпретация теоремы об интегральном среднем значении функции

Примеры.

1. Определить интегральное среднее значение функции $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi)$ на промежутке $[0,2\pi]$.

$$\blacktriangleright\ f_{\text{ср}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\big[\cos\varphi-\cos(2x+\varphi)\big]dx=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[x\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi}=\frac{\cos\varphi}{2}.\ \blacktriangleleft$$

2. Сила переменного тока меняется по закону $i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$, где i_0 – амплитуда, t – время, T – период и φ – начальная фаза. Найти интегральное среднее значение квадрата силы тока.

$$\blacktriangleright\ i^2=i_0^2\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)=\frac{i_0^2}{2}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right];$$

$$(i^2)_{\text{ср}}=\frac{i_0^2}{2T}\int\limits_0^T\left[1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right]dt=\frac{i_0^2}{2T}\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=T}=\frac{i_0^2}{2}.\ \blacktriangleleft$$

§6. Некоторые неравенства для определенных интегралов

Теорема 1. Пусть $f(x)\in R([a,b])$ ($a\leq b$), и пусть $f(x)$ – такая, что $A\leq f(x)\leq B$, $x\in[a,b]$. Тогда

$$A(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)\,dx\leq B(b-a). \qquad (1)$$

▶ 1) Если $a=b$, то соотношение (1) выполняется (очевидно).

2) Пусть $a<b$. По теореме о среднем имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad \text{где} \quad m \le \mu \le M \tag{2}$$

($m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$).

По условию, $A \le f(x) \le B$, $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ числа A и B являются соответственно нижней и верхней границами множества $\{f(x)\}$, $x \in [a,b]$. Значит, $A \le m \le M \le B$. Так как $m \le \mu \le M$, то и подавно $A \le \mu \le B$. Умножим все части последнего неравенства на $(b-a)$ (у нас $b > a \Rightarrow b-a > 0$). Получим $A(b-a) \le \mu(b-a) \le B(b-a)$. Из (2): $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$. Тогда предыдущее неравенство может быть записано в виде

. ◀

Замечание. Из доказанной теоремы вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть $f(x) \in R([a,b])$ ($a \le b$), и пусть $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

▶ Если в теореме 1 положить $A = 0$, то получим утверждение 1. ◀

Утверждение 2. Пусть $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ ($a \le b$). Пусть $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$, т.е. неравенство можно интегрировать, если порядок пределов нормальный.

▶ Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$. Ясно, что $\varphi(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, и что $\varphi(x) \in R([a,b])$. Но тогда из утверждения 1 следует: $\int_a^b \varphi(x)\,dx \ge 0$, т.е.

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \ ◀$$

Теорема 2. Пусть $f(x)\in C([a,b])$ ($a<b$). Пусть $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$. Тогда если в $[a,b]$ имеется хотя бы одна точка x_0 такая, что $f(x_0)>0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx>0$.

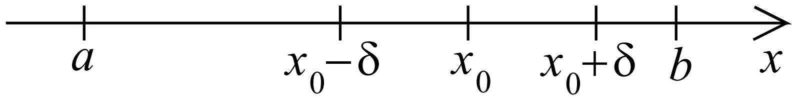

Рис. 1.15. К доказательству теоремы 2

▶ Пусть, для определенности, точка $x_0\in(a,b)$ (т.е. x_0 – внутренняя точка промежутка). Пусть $f(x_0)=h$ ($h>0$). По теореме о стабильности знака существует $\overline{u}_\delta(x_0)$ такая, что $\overline{u}_\delta(x_0)\subset(a,b)$ и $f(x)>\frac{h}{2}$, $x\in\overline{u}_\delta(x_0)$. Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

По утверждению 1: $\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx\geq 0$; $\int\limits_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx\geq 0$. По теореме 1: $\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx>\frac{h}{2}\cdot 2\delta=h\delta>0$. Тогда из (3) следует: $\int\limits_a^b f(x)\,dx>0$. ◀

Замечание. Справедливо утверждение:

Пусть $f(x)\in C([a,b])$ ($a<b$). Пусть $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$. Тогда если $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$, то $f(x)\equiv 0$, $x\in[a,b]$.

▶ Рассуждаем от противного. Предположим, что в $[a,b]$ имеется хотя бы одна точка x_0 такая, что $f(x_0)>0$. Тогда по теореме 2 должно быть $\int\limits_a^b f(x)\,dx>0$, а это не так (по условию $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$). ◀

Теорема 3. Пусть $f(x)\in R([a,b])$. Пусть $|f(x)|\leq K$, $x\in[a,b]$. Тогда $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leq K\cdot|b-a|$.

▶ По теореме о среднем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, где $m \le \mu \le M$ $\left(m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}\right.$, $\left.M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}\right)$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = |\mu| \cdot |b-a|. \qquad (4)$$

По условию $-K \le f(x) \le K$, $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ числа $-K$ и K являются соответственно нижней и верхней границами множества $\{f(x)\}$, $x \in [a,b]$. Следовательно, $-K \le m \le \mu \le M \le K \Rightarrow -K \le \mu \le K$, т.е. $|\mu| \le K \Rightarrow |\mu| \cdot |b-a| \le K \cdot |b-a|$. Тогда из (4) получаем $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le K \cdot |b-a|$. ◀

Примеры.

1. Оценить интеграл $\int\limits_{12}^{20} \frac{\cos^2 x}{1+x^8}\,dx$.

▶ Так как $0 \le \cos^2 x \le 1$, то при $x \ge 12$ выполняется неравенство

$$0 \le \frac{\cos^2 x}{1+x^8} \le \frac{1}{1+12^8} < \frac{1}{12^8}.$$

Поэтому

$$0 < \int\limits_{12}^{20} \frac{\cos^2 x}{1+x^8}\,dx < \frac{1}{12^8} \cdot (20-12) = \frac{8}{12^8} \left(< \frac{1}{10^7}\right). \text{ ◀}$$

2. Пусть функция $f(x)$ задана на $[0,1]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x \in (0,1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Имеем $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1 = f(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in C([0,1]) \quad \Rightarrow$ $f(x) \in R([0,1])$, т.е. $\int\limits_0^1 x^x\,dx$ существует. Произведем оценку этого интеграла.

▶ Для этого найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в $[0,1]$. Имеем для $x \in (0,1)$: $y'_x = (x^x)'_x = (e^{x\ln x})'_x = e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1) \Rightarrow y'_x = 0$ лишь в точке $x = \frac{1}{e}$ (в остальных точках промежутка $(0,1)$ y'_x существует, конечная, отличная от нуля). Из выражения для y'_x следует: $y'_x < 0$, $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, и

$y'_x > 0$, $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ $\Rightarrow$ точка $x = \frac{1}{e}$ – точка минимума функции $y = x^x$ ($y_{\min} = e^{-\frac{1}{e}} = 0.692...$). Имеем далее: $f(0) = 1$; $f(1) = 1$. Вывод: наименьшее значение нашей функции $m = e^{-\frac{1}{e}}$; наибольшее значение $M = 1$.

Таким образом, получаем неравенство

$$e^{-\frac{1}{e}} \cdot (1-0) \le \int_0^1 x^x dx \le 1 \cdot (1-0), \text{ т.е. } e^{-\frac{1}{e}} \le \int_0^1 x^x dx \le 1. \blacktriangleleft$$

3. Неравенство Буняковского – Шварца (Буняковский В.Я., 1804–1889 – российский математик, Шварц К.Г., 1843–1921 – немецкий математик).

▶ Пусть $f(x) \in R([a,b])$; $g(x) \in R([a,b])$ ($a \le b$). Пусть λ – любое, вещественное. Имеем

$$\int_a^b \left[f(x) + \lambda g(x)\right]^2 dx \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \ge 0. \tag{5}$$

Обозначим $\int_a^b g^2(x)\,dx = \alpha$; $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \beta$; $\int_a^b f^2(x)\,dx = \gamma$. В новых обозначениях (5) примет вид

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma \ge 0. \tag{6}$$

Так как трехчлен $\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma$ неотрицателен для всех λ лишь тогда, когда $\beta^2 - \alpha\gamma \le 0$, то в силу (5)

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx, \tag{7}$$

или

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \blacktriangleleft \tag{8}$$

Неравенства (7) и (8) носят название *неравенств Буняковского – Шварца*.

В частном случае, когда $g(x) \equiv 1$, $x \in [a,b]$, будем иметь

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,. \qquad (\tilde{8})$$

§7. Обобщенная теорема о среднем значении для определенного интеграла

Пусть

1) $f(x)\in R([a,b])$ и $g(x)\in R([a,b])$,
2) $m\le f(x)\le M$, $x\in[a,b]$,
3) функция $g(x)$ не меняет знака на $[a,b]$, т.е. либо неотрицательна, либо неположительна на $[a,b]$.

Тогда справедливо соотношение:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx\,, \qquad (1)$$

где μ – некоторое число, удовлетворяющее условию $m\le\mu\le M$.

▶ Заметим, что если $a=b$, то соотношение (1) выполняется для любого $\mu\in[m,M]$.

1) Обсудим случай, когда $a<b$. По условию имеем:

$$m\le f(x)\le M,\quad x\in[a,b]. \qquad (2)$$

Умножим все части неравенства (2) на $g(x)$. Получим:

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)\text{, если } g(x)\ge 0,$$

и

$$mg(x)\ge f(x)g(x)\ge Mg(x)\text{, если } g(x)\le 0.$$

У нас $a<b$ (порядок пределов интеграла нормальный). А тогда, интегрируя последние неравенства, будем иметь соответственно

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx\text{, если } g(x)\ge 0, \qquad (3)$$

$$m\int_a^b g(x)\,dx\ge\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\ge M\int_a^b g(x)\,dx\text{, если } g(x)\le 0. \qquad (4)$$

Заметим, что $\int_a^b g(x)\,dx\ge 0$, если $g(x)\ge 0$, и $\int_a^b g(x)\,dx\le 0$, если $g(x)\le 0$. Если окажется, что $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то как в первом, так и во втором случаях

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

(это видно непосредственно из (3) и (4)), и, следовательно, соотношение (1) будет выполняться при любом $\mu \in [m, M]$. Если же $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то будем иметь

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0, \text{ если } g(x) \geq 0,\ x \in [a,b],$$

и

$$\int_a^b g(x)\,dx < 0, \text{ если } g(x) \leq 0,\ x \in [a,b].$$

Разделив неравенства (3) и (4) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получим в обоих случаях одно и то же неравенство

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M. \tag{5}$$

Обозначим $\dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu$ (ясно, что $m \leq \mu \leq M$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

а это и требовалось установить.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $a > b$. Мы знаем, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,g(x)\,dx, \tag{6}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx. \tag{7}$$

У интегралов $\int\limits_b^a f(x)\,g(x)\,dx$ и $\int\limits_b^a g(x)\,dx$ порядок пределов нормальный ($b<a$). Для таких интегралов в пункте 1) было установлено

$$\int\limits_b^a f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int\limits_b^a g(x)\,dx, \quad m \le \mu \le M.$$

Принимая во внимание (6), (7), последнее соотношение можно переписать в виде

$$-\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = -\mu\int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad (1). ◀$$

Частный случай обобщенной теоремы о среднем. Пусть $g(x) \in R([a,b])$ и $g(x)$ не меняет знака на $[a,b]$, т.е. либо неотрицательна, либо неположительна на $[a,b]$. Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда на $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка *c* такая, что будет

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

▶ По условию $f(x) \in C([a,b]) \;\Rightarrow\; f(x)$ достигает в $[a,b]$ своих наибольшего M и наименьшего m значений $\Rightarrow$ $m \le f(x) \le M$, $x \in [a,b]$. Так как $f(x) \in C([a,b])$, то $f(x) \in R([a,b])$. Видим, что выполнены все условия обобщенной теоремы о среднем. Поэтому $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$, где $m \le \mu \le M$. Было отмечено, что значения *m* и *M* функцией $f(x)$ достигаются на $[a,b]$. Если же $m<\mu<M$, то по теореме о промежуточном значении для функции $f(x) \in C([a,b])$ заключаем: на промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка *c* такая, что будет $f(c)=\mu$, а значит, и в этом случае $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx$. ◀

Примеры применения обобщенной теоремы об интегральном среднем значении функции на промежутке.

1. Определить знак интеграла $J = \int\limits_{-2}^{2} x^3 e^x\,dx$.

▶ $\int\limits_{-2}^{2} x^3 e^x\,dx = \int\limits_{-2}^{0} x^3 e^x\,dx + \int\limits_{0}^{2} x^3 e^x\,dx$. В первом интеграле справа делаем замену $x=-t$. Получаем

$$\int_{-2}^{0} x^3 e^x\,dx = -\int_0^2 t^3 e^{-t}\,dt \quad \left(= -\int_0^2 x^3 e^{-x}\,dx \right).$$

Следовательно, $J = \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x})\,dx = 2\int_0^2 x^3 \operatorname{sh} x\,dx$. Положим $f(x) = \operatorname{sh} x$, $g(x) = x^3$. Тогда по обобщенной теореме об интегральном среднем значении функции будем иметь

$$J = 2\operatorname{sh} c \int_0^2 x^3 dx = 8\operatorname{sh} c > 0, \quad 0 < c < 2. \blacktriangleleft$$

2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

▶ Положим $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = x^n$. Применяем обобщенную теорему об интегральном среднем значении функции. Получаем

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{1}{1+c} \cdot \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+c} \cdot \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(n+1)(1+c)}, \quad \text{где} \quad 0 \le c \le 1,$$

откуда

$$\frac{1}{(n+1)\cdot 2} \le \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} \le \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0. \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое сколь угодно малое. Имеем

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx}_{=\tilde{J}_n} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx}_{=\tilde{\tilde{J}}_n} = \tilde{J}_n + \tilde{\tilde{J}}_n.$$

При любом $n \in \mathbf{N}$ справедлива оценка

$$\left|\tilde{\tilde{J}}_n\right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \right| \le \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^n x\right| dx \le \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $0 \le \sin^n x \le \sin^{n-1} x$ для $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, то $0 < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\, dx \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^{n-1} x\, dx$, т. е. $0 < \widetilde{J}_n \le \widetilde{J}_{n-1} \Rightarrow \left\{\widetilde{J}_n\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ монотонно убывающая, ограниченная снизу. Значит, существует конечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{J}_n$. Представим $\widetilde{J}_n$ в виде $\widetilde{J}_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{=g(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{=f(x)}\, dx \Rightarrow$ по обобщенной теореме об интегральном среднем значении $\widetilde{J}_n = \sin c_n \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^{n-1} x\, dx = \sin c_n \cdot \widetilde{J}_{n-1}$, где $c_n \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

Из соотношения $\widetilde{J}_n = \widetilde{J}_{n-1} \cdot \sin c_n$ заключаем, что $l = 0$. (Если предположить, что $l \ne 0$, то будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \sin c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{J}_n}{\widetilde{J}_{n-1}} = 1$, а это невозможно, ибо все значения $\sin c_n \in \left[0, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$.)

Таким образом, получили $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{J}_n = 0$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что $\left|\widetilde{J}_n\right| = \widetilde{J}_n < \frac{\varepsilon}{2}$, если $n > \mathbf{N}$. А тогда $|J_n| \le \left|\widetilde{J}_n\right| + \left|\widetilde{\widetilde{J}}_n\right| < \varepsilon$, если $n > \mathbf{N}$. Последнее означает, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = 0. \blacktriangleleft$$

§8. Определенный интеграл как функция своего верхнего (нижнего) предела

Пусть функция $f(t) \in R([a,b])$. Пусть x – любое, удовлетворяющее условию: $a \le x \le b$. Ясно, что $[a,x] \subset [a,b]$ и, следовательно, $f(t) \in R([a,x])$, т.е. $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ существует для любого $x \in [a,b]$.

Нетрудно понять, что $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ представляет собой функцию аргумента x, определенную в промежутке $[a,b]$. Будем обозначать эту функцию через $\Phi(x)$, $x \in [a,b]$. Таким образом,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b],\tag{1}$$

т.е. $\Phi(x)$ является функцией верхнего предела интеграла от функции $f(t)$, $t\in[a,b]$. Аналогично можно ввести в рассмотрение функцию нижнего предела интеграла от функции $f(t)$, $t\in[a,b]$, т.е. функцию

$$\widetilde{\Phi}(x)=\int_x^b f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].\tag{2}$$

Теорема 1 (о непрерывности функции $\Phi(x)$). Пусть $f(t)\in R([a,b])$, и пусть $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Тогда $\Phi(x)\in C([a,b])$.

Рис. 1.16. К доказательству теоремы 1

* ▶ Выберем и закрепим любую точку $x_0\in[a,b]$. Пусть x – любая другая точка из $[a,b]$. По свойству определенных интегралов, для любого расположения (взаимного) точек a, x_0 и x справедливо соотношение

$$\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{=\Phi(x)}=\underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{=\Phi(x_0)}+\int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Phi(x)-\Phi(x_0)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt.\tag{3}$$

Так как $f(t)\in R([a,b])$, то $f(t)$ – ограниченная на $[a,b]$, т.е. существует число $K>0$ такое, что $|f(t)|\le K$, $t\in[a,b]$. Имеем из (3):

$$|\Phi(x)-\Phi(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|\le K\cdot|x-x_0| \quad\Rightarrow\quad 0\le|\Phi(x)-\Phi(x_0)|\le K\cdot|x-x_0|.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x\to x_0$, получаем $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x)=\Phi(x_0)$. Последнее означает, что $\Phi(x)$ – непрерывная в точке x_0.

Так как x_0 – любое из $[a,b]$, то $\Phi(x)\in C([a,b])$. ◀

Теорема 2 (о существовании производной у функции $\Phi(x)$). Пусть $f(t)\in R([a,b])$, и пусть $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Тогда в каждой точке

$x \in [a,b]$, в которой функция $f(t)$ непрерывна, существует производная функции $\Phi(x)$, причем $\Phi'(x) = f(x)$.

▶ Выберем и закрепим любую точку $x_0 \in [a,b]$, в которой функция $f(t)$ непрерывна. Тогда, взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, мы можем найти по нему число $\delta > 0$ такое, что для каждой точки t из промежутка $[a,b]$, удовлетворяющей неравенству $|t - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon . \tag{4}$$

Дадим x_0 приращение Δx любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$ и $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Будем иметь

$$\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt.$$

Тогда

$$\frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt . \tag{5}$$

Из (4) следует:

1) если $\Delta x > 0$, то

$$\big(f(x_0) - \varepsilon\big) \cdot \Delta x < \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt < \big(f(x_0) + \varepsilon\big) \cdot \Delta x ;$$

2) если $\Delta x < 0$, то

$$\big(f(x_0) - \varepsilon\big) \cdot \Delta x > \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt > \big(f(x_0) + \varepsilon\big) \cdot \Delta x .$$

Однако в обоих случаях

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt < f(x_0) + \varepsilon .$$

Тогда из (5) следует, что

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} < f(x_0) + \varepsilon ,$$

т.е.

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Итак, показано: любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $|\Delta x| < \delta$ ($\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$), так сейчас же

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Последнее означает, что

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\Phi'(x_0)$ существует, причем $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Так как точка x_0 – любая из $[a,b]$, в которой функция $f(t)$ – непрерывна, то теорема доказана. ◀

Замечание. Справедливо утверждение:

Пусть $f(x) \in R([a,b])$, и пусть $\tilde{\Phi}(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Тогда в каждой точке $x \in [a,b]$, в которой функция $f(t)$ – непрерывна, существует производная функции $\tilde{\Phi}(x)$, причем $\tilde{\Phi}'(x) = -f(x)$.

▶ Действительно, $\tilde{\Phi}(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt = -\int\limits_b^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}'(x) = -f(x)$, в каждой точке $x \in [a,b]$, в которой функция $f(t)$ непрерывна. ◀

Частный случай теоремы 2 (теорема Барроу).

Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Пусть $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $\tilde{\Phi}(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Тогда $\Phi'(x)$ и $\tilde{\Phi}'(x)$ существуют в каждой точке $x \in [a,b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$, $\tilde{\Phi}'(x) = -f(x)$, $x \in [a,b]$.

Замечание. Из теоремы Барроу сразу следует такое утверждение:

У всякой функции $f(x) \in C([a,b])$ существует в промежутке $[a,b]$ первообразная. Такой первообразной для $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ является, например, функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

Примеры.

1. Найти $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \sin t^2 dt$; $\frac{d}{dx}\int\limits_x^b \sin t^2 dt$; $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin t^2 dt$, где a и b – постоянные числа.

▶ Так как $\sin t^2 \in C([a,b])$, то по теореме Барроу

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \sin t^2 dt = \sin x^2; \qquad \frac{d}{dx}\int\limits_x^b \sin t^2 dt = -\sin x^2, \quad x \in [a,b].$$

Так как $\int\limits_a^b \sin t^2 dt$ – постоянное число, то $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin t^2 dt = 0$. ◀

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}$.

▶ Отношение $\dfrac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}$ при $x\to 0$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2 dx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1. \blacktriangleleft$$

*** *3***. Найти $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}$.

▶ Отношение $\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}$ при $x\to +0$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. И здесь применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}=\lim_{x\to +0}\frac{\left(\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx\right)'_x}{\left(\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx\right)'_x}=\lim_{x\to +0}\frac{\left(\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx\right)'_{\sin x}\cdot(\sin x)'_x}{\left(\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx\right)'_{\operatorname{tg} x}\cdot(\operatorname{tg} x)'_x}=$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}}=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1. \blacktriangleleft$$

§9. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона – Лейбница)

Теорема. Пусть $f(x)\in C([a,b])$. Пусть $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$ в $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

▶ По условию, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ в $[a,b]$. Так как $f(x)\in C([a,b])$, то $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ – тоже первообразная для $f(x)$ в $[a,b]$. Но тогда $\Phi(x)$ и $F(x)$ отличаются друг от друга в $[a,b]$ только на постоянную величину, т.е. $\Phi(x)-F(x)=c$, $x\in[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+c$, $x\in[a,b]$. Положив в этом соотношении $x=a$, получим $0=F(a)+c$ $\Rightarrow$ $c=-F(a)$. Следовательно, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$, $x\in[a,b]$. Положив в последнем соотношении $x=b$, получим

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a).\ ◀ \tag{1}$$

(1) – основная формула интегрального исчисления (*формула Ньютона – Лейбница*). Она позволяет вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ в случае, когда известна первообразная этой функции.

Для краткости формулу (1) часто пишут в другом виде. Именно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \text{ или } \int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b.$$

(Символ $F(x)\Big|_a^b$ носит название *двойной подстановки*).

Пример 1. Вычислить $\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx$ ($a>0$).

▶ Имеем $f(x)=\frac{x^2}{a^3+x^3}\in C([0,a])$ (так как $a>0$). $F(x)=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)$ – первообразная для $f(x)$ в $[0,a]$. Поэтому

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln(2a^3)-\frac{1}{3}\ln(a^3)=\frac{1}{3}\ln 2.\ ◀$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

▶ Имеем

$$f(x) = \sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}\cdot|\sin x|, \quad x \in [0, 2\pi] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sin x, & x \in [0,\pi], \\ -\sqrt{2}\cdot\sin x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \sqrt{2}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \sqrt{2}\cdot(2+2) = 4\sqrt{2}.$$

Замечание. Вычисляя интегралы с помощью формулы Ньютона – Лейбница, следует внимательно проверять условия, при которых эта формула установлена. Отступление от этого правила может привести к абсурдному результату.

Так, формальное применение формулы Ньютона – Лейбница дает, например,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1} = -1-1 = -2 \;\; \text{(абсурд)}.$$

(Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, порядок пределов нормальный. Следовательно, интеграл не может равняться отрицательному числу).

В этом примере подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$, принадлежащей промежутку интегрирования $[-1, 1]$, а потому применение формулы Ньютона – Лейбница было незаконным.

Пример 3. *Вопрос*: можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{1+x^2}$ брать в качестве первообразной функции для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, функцию $F(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$?

▶ *Ответ*: Нельзя. В точке $x = 0$ функция $F(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ терпит разрыв, а потому не может быть первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ в промежутке $[-1, 1]$ ($F'(x) = \left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ лишь для $x \neq 0$). ◀

§10. Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ определены на $[a,b]$ и имеют там непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$. Тогда имеет место формула

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

▶ Имеем:

$$\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x), \quad x\in[a,b],$$

откуда

$$\int_a^b \left[u(x)\cdot v(x)\right]' dx = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx\,.$$

Так как $\int_a^b \left[u(x)\cdot v(x)\right]' dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b$, то

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx\,. \blacktriangleleft$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$.

▶ Имеем

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ \cos x\,dx = dv; & v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 0 - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -1-1 = -2\,. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить интеграл $\int_0^1 x(1-x)^7\,dx$.

▶ Имеем

$$\int_0^1 x(1-x)^7\,dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = (1-x)^7\,dx; & v = -\dfrac{(1-x)^8}{8} \end{bmatrix} =$$

$$= -x\frac{(1-x)^8}{8}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{8}\cdot\int_0^1 (1-x)^8\,dx = 0 - \frac{1}{8}\cdot\frac{(1-x)^9}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{72}. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить интеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ ($n \in \mathbf{N}$).

▶ Имеем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\cdot\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x; & du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx \\ dv = \sin x\,dx; & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x\,dx = 0 + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\Bigg[\underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx}_{=I_{n-2}} - \underbrace{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx}_{=I_n}\Bigg] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{2}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (2), можем написать:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4};\quad I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4} I_{n-6};\quad \text{и т. д.}$$

Поэтому будем иметь

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases} I_0, & \text{если } n \text{ – четное,} \\ I_1, & \text{если } n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Так как $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, то окончательно получаем

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ – четное,} \\ 1, & \text{если } n \text{ – нечетное.} \end{cases} \quad\blacktriangleleft$$

§11. Замена переменных в определенных интегралах

Теорема. Пусть имеется определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x) \in C([a,b])$, т.е. непрерывна на $[a,b]$. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена в $[\alpha,\beta]$ и имеет там непрерывную производную $\varphi'(t)$. Пусть, кроме того, функция $x=\varphi(t)$ – строго монотонная в $[\alpha,\beta]$ и такая, что $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

▶ Пусть, для определенности, $a<b$, и функция $x=\varphi(t)$ – строго возрастающая в промежутке $[\alpha,\beta]$. Введем в рассмотрение следующие две функции:

$$\lambda(\xi)=\int\limits_\alpha^\xi f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\mu(\xi)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\xi)} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Отметим, что функции $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$ определены и непрерывны на промежутке $[\alpha,\beta]$. Кроме того, имеем для любой точки $\xi\in[\alpha,\beta]$:

$$\lambda'(\xi)=f\left[\varphi(\xi)\right]\cdot\varphi'(\xi),$$

$$\mu'(\xi)=\left(\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\xi)} f(x)\,dx\right)'_\xi=\left(\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\xi)} f(x)\,dx\right)'_\varphi\cdot\varphi'(\xi)=f\left[\varphi(\xi)\right]\cdot\varphi'(\xi).$$

Видим, что $\lambda'(\xi)=\mu'(\xi)$, $\xi\in[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \lambda(\xi)-\mu(\xi)=c\ \text{(const)},\quad \xi\in[\alpha,\beta]. \tag{4}$$

Из (2) и (3) видим, что $\lambda(\alpha)=0$, $\mu(\alpha)=0$ $\Rightarrow$ $\lambda(\alpha)-\mu(\alpha)=0$. Так как в (4) c – одно и то же для всех $\xi\in[\alpha,\beta]$, то получаем $c=0$.

Таким образом, $\lambda(\xi)-\mu(\xi)=0$, $\xi\in[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $\lambda(\xi)=\mu(\xi)$, $\xi\in[\alpha,\beta]$. Следовательно, в частности, $\lambda(\beta)=\mu(\beta)$, т.е.

$$\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\quad\left(=\int\limits_a^b f(x)\,dx\right).$$ ◀

Примеры.

1. Вычислить интеграл $J=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

▶ Положим $x=\operatorname{tg}t$ $\Rightarrow$ $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Имеем

$$t=0\quad\text{при}\quad x=0,$$

$$t=\frac{\pi}{4}\quad\text{при}\quad x=1.$$

Замечаем, что $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\in C([0,1])$, $x=\varphi(t)$ $(=\operatorname{tg}t)$ определена в $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ и имеет там непрерывную производную $\varphi'(t)$ $(=1/\cos^2 t)$. Следовательно,

$$J=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}t)\,dt=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}dt=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

Во втором интеграле в правой части сделаем замену $\dfrac{\pi}{4}-t=u\ \Rightarrow\ dt=-du$. Будем иметь

$$\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=-\int_{\pi/4}^{0}\ln\cos u\,du=\int_0^{\pi/4}\ln\cos u\,du\ \left(=\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt\right).$$

Таким образом,

$$J=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt=\frac{\pi}{8}\ln 2.\ ◀$$

2. Вычислить интеграл $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

▶ Имеем

$$J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену $x=\pi-t\ \Rightarrow\ dx=-dt$. Замечаем, что

$$t=\frac{\pi}{2}\quad\text{при}\quad x=\frac{\pi}{2},$$
$$t=0\quad\text{при}\quad x=\pi.$$

Будем иметь

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt\ \left(=\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx\right).$$

Теперь можем написать

$$J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\pi \operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}. \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Вычисляя определенные интегралы по формуле (1), следует внимательно проверять условия, при которых эта формула установлена. Формальное применение формулы (1) может привести к неверному результату.

С этой целью рассмотрим следующий пример.

Ясно, что $J = \int_0^{\pi} dx = \pi$. Запишем теперь интеграл J в виде

$$J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 1)}.$$

В последнем интеграле сделаем замену $\operatorname{tg} x = t \;\Rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Получим

$$J = \int_0^0 \frac{dt}{t^2+1} = 0.$$

Таким образом, получили $\pi = 0$ (абсурд).

Дело в том, что в промежутке $[0, \pi]$ нельзя было делать замену $\operatorname{tg} x = t$, так как функция $\operatorname{tg} x$ терпит разрыв в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ ($\dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$).

Замечание 2 (об определенном интеграле от четной и нечетной функции по симметричному промежутку). Пусть функция $f(x) \in R([-a, a])$ (промежуток симметричен относительно точки $x = 0$). Тогда:

1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$, если $f(x)$ – четная функция;

2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, если $f(x)$ – нечетная функция.

▶ Имеем $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(x)\,dx$. В первом интеграле справа сделаем подстановку $x = -t$. Получим:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^{0} f(-t)\,dt = \int_0^{a} f(-t)\,dt \;\left(= \int_0^{a} f(-x)\,dx \right).$$

А тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(-x)\,dx = \int_0^{a} \left[f(x) + f(-x) \right] dx.$$

1. Пусть $f(x)$ – четная функция. Тогда $f(x)+f(-x)\equiv 2f(x)$ и, следовательно, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

2. Пусть $f(x)$ – нечетная функция. Тогда $f(x)+f(-x)\equiv 0$ и, следовательно, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Примеры.

3. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Здесь $f(-x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}=f(x)$, т. е. $f(x)$ – четная функция; промежуток интегрирования $[-\pi,\pi]$ симметричен относительно точки $x=0$. Поэтому

$$J=2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=2\cdot\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}$$

(использован результат примера 2).

4. Вычислить $J=\int\limits_{-1}^{1}x^3\sqrt{1+x^6}\,dx$.

Здесь $f(-x)=-x^3\sqrt{1+x^6}=-f(x)$, т. е. $f(x)$ – нечетная функция; промежуток интегрирования $[-1,1]$ симметричен относительно точки $x=0$. Поэтому $J=0$.

§12. Применение теории определенного интеграла к вычислению некоторых пределов

Мы знаем, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,. \qquad (1)$$

Помним также, что если $f(x)\in R([a,b])$, то предел, стоящий в правой части, не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, ни от способа выбора точек ξ_k в $[x_k,x_{k+1}]$. В частности, промежуток $[a,b]$ может быть разбит на части $[x_k,x_{k+1}]$ равной длины, так что $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$ для любого *k*, а в качестве точек ξ_k могут быть взяты, например, левые или правые концы промежутков $[x_k,x_{k+1}]$. Все вышесказанное позволяет использовать теорию определенного интеграла для вычисления пределов некоторых сумм. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 1. Пусть $S_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$. Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

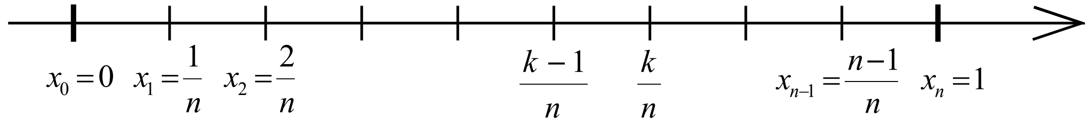

Рис. 1.17. К решению примера 1

▶ Перепишем S_n в виде $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$. Введем в рассмотрение функцию $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Составим интегральную сумму Римана σ для функции $f(x)$ в промежутке $[0,1]$. Для этого разделим промежуток $[0,1]$ на n равных частей $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$, для любого $k = \overline{1,n}$. В качестве точки ξ_k на промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ берем точку $x_k = \frac{k}{n}$, т. е. правый конец промежутка. Получим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{=f(\xi_k)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\Delta x_k} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = S_n.$$

У нас $f(x) = \frac{1}{1+x} \in C([0,1]) \Rightarrow f(x) \in R([0,1])$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sigma = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln 2. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Пусть $S_n = \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$. Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

▶ Введем в рассмотрение функцию $f(x) = \sin \pi x$, $x \in [0,1]$. Составим интегральную сумму Римана σ для этой функции в промежутке $[0,1]$. Для этого разделим промежуток $[0,1]$ на n равных частей $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Будем иметь $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$, для любого $k = \overline{0, n-1}$. В качестве точки ξ_k на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ берем точку $x_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, т. е. левый конец промежутка. Получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n} = S_n .$$

Так как $f(x) = \sin \pi x \in R\big([0,1]\big)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sigma = \int_0^1 \sin \pi x\, dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{\pi}. ◀$$

Пример 3. Пусть $S_n = \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ ($p > 0$). Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

▶ Перепишем S_n в виде $S_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right]$. Введем в рассмотрение функцию $f(x) = x^p$, $x \in [0,1]$. Составим для этой функции в промежутке $[0,1]$ интегральную сумму Римана σ. Для этого делим промежуток $[0,1]$ на n равных частей $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. В качестве точки ξ_k в промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ берем точку $x_k = \dfrac{k}{n}$, т. е. правый конец промежутка. Получим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n} = S_n .$$

Так как $f(x) = x^p$ ($p > 0$), $f(x) \in R\big([0,1]\big)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sigma = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1}. ◀$$

ГЛАВА 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе вводится понятие интеграла в случаях:

1) когда функция $f(x)$, ограниченная в $[a,b]$, не определена в нескольких точках этого промежутка;

2) когда функция $f(x)$ не является ограниченной в $[a,b]$;

3) когда промежуток интегрирования имеет бесконечную длину.

§1. Несобственный интеграл от ограниченной функции, не определенной в нескольких точках

Пусть функция $f(x)$ определена в $[a,b]$ всюду, за исключением конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ($x_1 < x_2 < \ldots < x_p$, a и b – конечные числа), и пусть $f(x)$ – ограниченная функция.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

будем называть в этом случае *несобственным интегралом* функции $f(x)$.

Доопределим функцию $f(x)$ произвольным образом в точках $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Новую функцию, которая определена уже во всем промежутке $[a,b]$, обозначим через $\widetilde{f}(x)$.

Если функция $\widetilde{f}(x) \in R([a,b])$, причем $\int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx = J$, то символу (*) приписывают числовое значение, полагая

$$\int_a^b f(x)\,dx = J.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится.*

Замечание. Если мы доопределим функцию $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_p$ иначе, то получим другую функцию $\tilde{\tilde{f}}(x)$. Так как $\tilde{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x) + \left[\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)\right]$ и так как $\left[\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)\right]$ обращается в нуль всюду в $[a,b]$, за исключением точек $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то $\left[\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)\right] \in R([a,b])$, и $\int\limits_a^b \left[\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)\right] dx = 0$. Значит, если функция $\tilde{f}(x) \in R([a,b])$, то $\tilde{\tilde{f}}(x) \in R([a,b])$, причем

$$\int\limits_a^b \tilde{\tilde{f}}(x)\,dx = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$$

Приходим к выводу: несобственный интеграл (*) не зависит от того, как доопределена функция $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Примеры.

1. Пусть имеется $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$. Здесь $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ определена в $[0,1]$ всюду, за исключением точки $x = 0$; $f(x)$ – ограниченная функция. Положим, например,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ определена уже во всех точках $[0,1]$. Она ограниченная в $[0,1]$ и имеет лишь одну точку разрыва $x = 0$. Следовательно, $\tilde{f}(x) \in R([0,1])$, а значит, $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ сходится.

2. Пусть имеется $\int\limits_0^a x\ln x\,dx$ ($a > 0$ – определенное число). Здесь $f(x) = x\ln x$ определена в $[0,a]$ всюду, за исключением точки $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$, то $f(x)$ – ограниченная функция. Если положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\ln x, & x \in (0,a], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

то легко видеть, что $\tilde{f}(x) \in C([0,a])$. Следовательно, $\tilde{f}(x) \in R([0,a])$, а значит, несобственный интеграл $\int\limits_0^a x\ln x\,dx$ ($a > 0$) сходится.

§2. Несобственные интегралы II рода (или несобственные интегралы от неограниченных функций)

I. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ всюду, за исключением, быть может, точки a, в окрестности которой функция $f(x)$ не ограничена (a и b – конечные числа). Пусть $f(x)$ такая, что $f(x)\in R([\alpha,b])$, где α – любое, удовлетворяющее условию $a<\alpha<b$.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

называется в этом случае *несобственным интегралом II рода функции* $f(x)$.

Если существует конечный или бесконечный предел

$$J=\lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

то символу (*) приписывают числовое значение, полагая

$$\int_a^b f(x)\,dx=J.$$

Если предел J – число конечное, то говорят, что несобственный интеграл (*) *сходится*. Если же предел J бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл (*) *расходится*.

II. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ всюду, за исключением, быть может, точки b, в окрестности которой функция $f(x)$ не ограничена (a и b – конечные числа). Пусть функция $f(x)$ такая, что $f(x)\in R([a,\beta])$, где β – любое, удовлетворяющее условию $a<\beta<b$.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (**)$$

и в этом случае называется *несобственным интегралом II рода функции* $f(x)$.

Если существует конечный или бесконечный предел

$$J=\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx,$$

то символу (**) приписывают числовое значение, полагая

$$\int_a^b f(x)\,dx=J.$$

Если предел J – число конечное, то говорят, что несобственный интеграл (**) *сходится*. Если же предел J бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл (**) *расходится*.

III. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ всюду, за исключением, быть может, точки c, в окрестности которой функция $f(x)$ не ограничена (a и b – конечные числа, $a<c<b$).

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в любом замкнутом промежутке, содержащемся в $[a,b]$ и не содержащем точку c. И в этом случае символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (***)$$

называется *несобственным интегралом II рода функции* $f(x)$.

Числовое значение символу (***) приписывают следующими двумя равносильными способами.

Способ 1.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Здесь в правой части $\int_a^c f(x)\,dx$ – несобственный интеграл II рода типа (**), $\int_c^b f(x)\,dx$ – несобственный интеграл II рода типа (*).

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называют сходящимся, если сходятся одновременно $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$.

Способ 2.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\gamma'\to+0\\ \gamma''\to+0}}\left[\int_a^{c-\gamma'} f(x)\,dx + \int_{c+\gamma''}^b f(x)\,dx\right].$$

Важно заметить, что здесь $\gamma'\to+0$ и $\gamma''\to+0$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам.

Замечание. Может оказаться, что не существует конечный

$$\lim_{\substack{\gamma'\to+0\\ \gamma''\to+0}}\left[\int_a^{c-\gamma'} f(x)\,dx + \int_{c+\gamma''}^b f(x)\,dx\right],$$

когда $\gamma' \to +0$ и $\gamma'' \to +0$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам, однако существует конечный предел

$$\widetilde{J} = \lim_{\gamma \to +0} \left[\int_{a}^{c-\gamma} f(x)\,dx + \int_{c+\gamma}^{b} f(x)\,dx \right].$$

В этом случае предел $\widetilde{J}$ называют *главным значением несобственного интеграла* (***) и пишут $\widetilde{J} = \text{v.p.}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Пример. Пусть имеется $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. Здесь $f(x) = \frac{1}{x}$ определена в $[-1, 1]$ всюду, за исключением точки $x = 0$, в окрестности которой $f(x)$ не ограничена. Данный интеграл – несобственный интеграл II рода типа (***).

Имеем

$$\lim_{\substack{\gamma' \to +0 \\ \gamma'' \to +0}} \left[\int_{-1}^{-\gamma'} \frac{dx}{x} + \int_{\gamma''}^{1} \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\substack{\gamma' \to +0 \\ \gamma'' \to +0}} \left[\ln(-x)\Big|_{x=-1}^{x=-\gamma'} + \ln x\Big|_{x=\gamma''}^{x=1} \right] =$$

$$= \lim_{\substack{\gamma' \to +0 \\ \gamma'' \to +0}} \left[\ln\gamma' - \ln\gamma'' \right] = \lim_{\substack{\gamma' \to +0 \\ \gamma'' \to +0}} \ln\frac{\gamma'}{\gamma''}.$$

Этот предел не существует, когда $\gamma' \to +0$ и $\gamma'' \to +0$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам. Однако

$$\lim_{\gamma \to +0} \left[\int_{-1}^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \int_{\gamma}^{1} \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\gamma \to +0} \ln\frac{\gamma}{\gamma} = 0.$$

Вывод: $\text{v.p.}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$.

§3. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода

Для определенности будем рассматривать несобственные интегралы II рода типа (**). Утверждения, которые будут установлены для них, легко переносятся на несобственные интегралы II рода типов (*) и (***). Поэтому во всех теоремах, рассматриваемых ниже, предполагается, что функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ всюду, за исключением, быть может, точки b, в окрестности которой $f(x)$ не ограничена. Кроме того, предполагается, что $f(x) \in R([a, \beta])$, где β – любое, удовлетворяющее условию $a < \beta < b$ (рис. 2.1, 2.2).

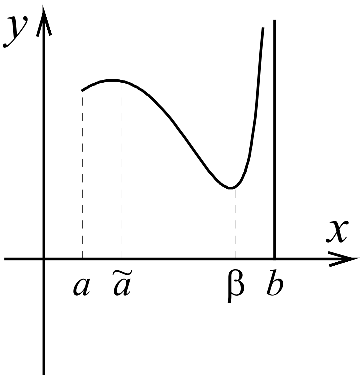

Рис. 2.1

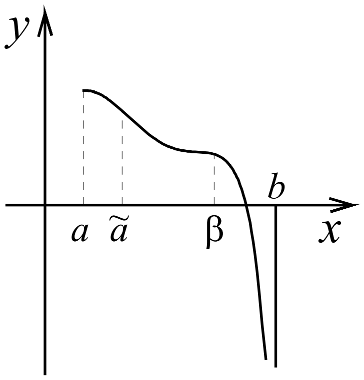

Рис. 2.2

Теорема 1. Пусть $\tilde{a}$ – любое число, удовлетворяющее условию $a<\tilde{a}<b$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

▶ Возьмем β – любое, удовлетворяющее условию $\tilde{a}<\beta<b$. Имеем

$$\int\limits_a^\beta f(x)\,dx=\int\limits_a^{\tilde{a}} f(x)\,dx+\int\limits_{\tilde{a}}^\beta f(x)\,dx. \tag{1}$$

а) Пусть $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный предел $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_{\tilde{a}}^\beta f(x)\,dx$. Но тогда из (1): существует конечный предел $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$ $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

б) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный предел $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$. Но тогда из (1): существует конечный предел $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_{\tilde{a}}^\beta f(x)\,dx$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ сходится.

Замечание. В случаях а) и б) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{\tilde{a}} f(x)\,dx+\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx.$$

в) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. Нужно показать, что и $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ сходится. Но тогда по пункту а) должен сходиться $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а это не так.

г) Пусть $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ расходится. Нужно показать, что и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. Рассуждаем от противного. Допустим, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Но тогда по пункту б) должен сходиться $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$, а это не так. ◀

Пусть $f(x) \geq 0$ хотя бы для $x \in [\tilde{a}, b)$, $a \leq \tilde{a} < b$. Пусть β – любое число, удовлетворяющее условию $\tilde{a} < \beta < b$. Нетрудно понять, что $\int\limits_{\tilde{a}}^{\beta} f(x)\,dx$ представляет собой переменную величину, возрастающую вместе с увеличением β. Мы знаем, что для существования конечного предела у такой переменной при $\beta \to b - 0$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху, т.е. чтобы существовало число $K > 0$ такое, что

$$\int\limits_{\tilde{a}}^{\beta} f(x)\,dx \leq K,$$

для любого β, удовлетворяющего условию $\tilde{a} < \beta < b$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $f(x) \geq 0$ хотя бы для $x \in [\tilde{a}, b)$ ($a \leq \tilde{a} < b$), то для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{\tilde{a}}^b f(x)\,dx$ (а значит, и несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K > 0$ такое, что $\int\limits_{\tilde{a}}^{\beta} f(x)\,dx \leq K$, $\beta \in (\tilde{a}, b)$.

Теорема 3 (первый признак сравнения). Пусть $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ хотя бы для $x \in [\widetilde{a}, b)$, $a \leq \widetilde{a} < b$. Пусть $f(x) \leq g(x)$, $x \in [\widetilde{a}, b)$. Тогда: 1) из сходимости $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; 2) из расходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

▸ Возьмем β – любое, удовлетворяющее условию $\widetilde{a} < \beta < b$. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{a}}^{\beta} f(x)\,dx \leq \int\limits_{\widetilde{a}}^{\beta} g(x)\,dx. \tag{2}$$

1) Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{\widetilde{a}}^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует число $K > 0$ такое, что $\int\limits_{\widetilde{a}}^{\beta} g(x)\,dx \leq K$, $\beta \in (\widetilde{a}, b)$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{\widetilde{a}}^{\beta} f(x)\,dx \leq K$, $\beta \in (\widetilde{a}, b)$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{\widetilde{a}}^b f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. Нужно доказать, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.

От противного: допустим, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ по пункту 1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а это не так. ◂

Теорема 4 (второй признак сравнения). Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ хотя бы для $x \in [\widetilde{a}, b)$, $a \leq \widetilde{a} < b$. Пусть существует конечный, отличный от нуля предел

$$l = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (l \neq 0,\ l \neq \infty).$$

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

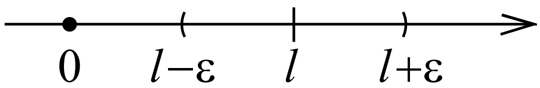

Рис. 2.3. К доказательству теоремы 4

▸ По условию $l \neq 0$, $l \neq \infty$. Ясно, что $l > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, но такое, что $l - \varepsilon > 0$. По условию: $l = \lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad b-\delta<x<b. \tag{3}$$

Можно считать, что $b-\delta=a_*>\widetilde{a}$. Обозначим: $l-\varepsilon=p$, $l+\varepsilon=q$ ($p>0$, $q>0$ – определенные числа). Неравенство (3) можно записать теперь в виде:

$$p<\frac{f(x)}{g(x)}<q, \quad \text{если} \quad x\in[a_*,b),$$

или в виде

$$p\cdot g(x)<f(x)<q\cdot g(x), \quad \text{если} \quad x\in[a_*,b). \tag{4}$$

1) Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{a_*}^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{a_*}^b q\cdot g(x)\,dx$ сходится $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\int\limits_{a_*}^b f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{a_*}^b f(x)\,dx$ сходится $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\int\limits_{a_*}^b p\cdot g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{a_*}^b g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится.

3) Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. Нужно показать, что и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.

От противного: допустим, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. Но тогда, по пункту 1), $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а это не так.

4) Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится. Нужно показать, что расходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

От противного: допустим, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Но тогда, по пункту 2), $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, а это не так. ◄

Замечание. Применение теоремы 4 для исследования несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ требует знания некоторой «эталонной» функции $g(x)$. Довольно часто в роли такой «эталонной» функции выступает

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^{\lambda}} \quad (\lambda > 0, \quad x \in [a,b), \quad a < b).$$

Поэтому важно знать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$$

сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda \geq 1$. (Заметим, что если $\lambda \leq 0$, то данный интеграл является собственным).

▶ 1) Пусть $\lambda < 1$. Имеем

$$\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = -\frac{1}{1-\lambda}(b-x)^{1-\lambda}\Bigg|_{x=a}^{x=\beta} = \frac{1}{1-\lambda}\Big[(b-a)^{1-\lambda} - (b-\beta)^{1-\lambda}\Big] \;\Rightarrow$$

$$\lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ сходится, если $\lambda < 1$.

2) Пусть $\lambda = 1$. Имеем

$$\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x)\Big|_{x=a}^{x=\beta} = \ln(b-a) - \ln(b-\beta) \;\Rightarrow\; \lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{b-x} = +\infty \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ расходится, если $\lambda = 1$.

3) Пусть $\lambda > 1$. Имеем

$$\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = -\frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{(b-x)^{\lambda-1}}\Bigg|_{x=a}^{x=\beta} = \frac{1}{\lambda-1}\left[\frac{1}{(b-\beta)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}\right] \;\Rightarrow$$

$$\lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} = +\infty \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ расходится, если $\lambda > 1$.

Примеры.

1. Исследовать сходимость интеграла $J=\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

▶ $f(x)=\frac{\ln x}{1-x^2}$ определена в промежутке $[0,1]$ всюду, за исключением точек $x=0$ и $x=1$. (Эти две точки – особые). Представим J в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$J=\underbrace{\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln x}{1-x^2}dx}_{=J_1}+\underbrace{\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx}_{=J_2}=J_1+J_2.$$

Рассмотрим $J_1=\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$. У этого интеграла лишь точка $x=0$ является особой. Имеем $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1-x^2}=-\infty \Rightarrow f(x)$ – неограниченная в правой полуокрестности точки $x=0$. Значит, J_1 – несобственный интеграл II рода.

Так как $f(x)=\frac{\ln x}{1-x^2}\underset{x\to+0}{\sim}\ln x$, то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\ln x$. Тогда

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{(1-x^2)\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-x^2}=1.$$

Следовательно, несобственные интегралы $\int\limits_0^{1/2}f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{1/2}g(x)\,dx$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Имеем

$$\int\limits_0^{1/2}g(x)\,dx=\int\limits_0^{1/2}\ln x\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_\alpha^{1/2}\ln x\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\left[x\ln x-x\right]\Big|_{x=\alpha}^{x=1/2}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\left[\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-(\alpha\ln\alpha-\alpha)\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\underbrace{\lim_{\alpha\to+0}(\alpha\ln\alpha-\alpha)}_{=0}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

– определенное число $\Rightarrow \int\limits_0^{1/2}g(x)\,dx$ сходится. Значит, и несобственный интеграл J_1 сходится.

Рассмотрим теперь $J_2 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. У этого интеграла лишь точка $x = 1$ является особой. Имеем:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln[1+(x-1)]}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ – ограниченная в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right); \\ -\frac{1}{2}, \; x = 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{f}(x) \in C\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ $\Rightarrow$ $\int\limits_{1/2}^{1} \tilde{f}(x)\,dx$ существует. Следовательно, $J_2 = \int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ сходится.

Так как несобственные интегралы J_1 и J_2 сходятся, то сходится и несобственный интеграл $J = \int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. ◀

2. Исследовать сходимость интеграла $J = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

▶ $f(x) = \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}$ определена в промежутке $[0, 1]$ всюду, за исключением точки $x = 1$ (если $p \ge 0$) и за исключением точек $x = 0$, $x = 1$ (если $p < 0$). Представим J в виде суммы двух интегралов

$$J = \underbrace{\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}} dx}_{=J_1} + \underbrace{\int\limits_{1/2}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}} dx}_{=J_2} = J_1 + J_2$$

Рассмотрим $J_1 = \int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}} dx$. Если $p \ge 0$, то J_1 – собственный интеграл. В этом случае $f(x) \in C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$, и, следовательно, J_1 существует. Если $p < 0$, то

$f(x)=\dfrac{1}{x^{-p}\sqrt{1-x^4}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x^{-p}\sqrt{1-x^4}}=+\infty \Rightarrow f(x)$ – неограниченная в правой полуокрестности точки $x=0$. Значит, J_1 – несобственный интеграл II рода.

Так как $f(x)=\dfrac{x^p}{\sqrt{1-x^4}} \underset{x\to+0}{\sim} \dfrac{1}{x^{-p}}$, то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\dfrac{1}{x^{-p}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}=1$. Следовательно, несобственные интегралы $\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Но $\int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx=\int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{x^{-p}}$ сходится, если $-p<1$ и расходится, если $-p\ge 1$. Значит, и несобственный интеграл J_1 сходится, если $p>-1$, и расходится, если $p\le -1$.

Рассмотрим теперь $J_2=\int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}dx$. У этого интеграла лишь точка $x=1$ является особой. Имеем $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}=\infty \Rightarrow f(x)$ – неограниченная в левой полуокрестности точки $x=1$. Значит, J_2 – несобственный интеграл второго рода. Так как для любого p

$$f(x)=\frac{x^p}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to1-0}{\sim} \frac{1}{2(1-x)^{1/2}},$$

то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\dfrac{1}{2(1-x)^{1/2}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ и, следовательно, $\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{1/2}^{1} g(x)\,dx$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Но $\int\limits_{1/2}^{1} g(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится. Значит, несобственный интеграл $J_2=\int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{x^p\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ сходится при любом *p*. У нас J_1 сходится при $p>-1$ и расходится при $p\le -1$; J_2 сходится при любом *p*. Следовательно, несобственный интеграл $J=\int\limits_0^1 \frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^4}}$ сходится при $p>-1$ и расходится при $p\le -1$. ◀

3. Исследовать сходимость интеграла $J=\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

▶ $f(x)=\frac{1}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$ в промежутке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ определена и непрерывна, если одновременно $p\le 0$ и $q\le 0$;

$f(x)$ определена в $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ всюду, за исключением точки $x=0$, если $q\le 0$, а $p>0$;

$f(x)$ определена в $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ всюду, за исключением точки $x=\frac{\pi}{2}$, если $p\le 0$, а $q>0$;

$f(x)$ определена в $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ всюду, за исключением точек $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, если одновременно $q>0$, $p>0$.

Представим J в виде суммы двух интегралов $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$; $J_2=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$.

Рассмотрим $J_1=\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x\cdot\cos^q x}$. Этот интеграл – собственный, если $p\le 0$ (q – любое). J_1 – несобственный интеграл лишь при $p>0$. В этом случае у него точка $x=0$ является особой точкой; $f(x)$ оказывается неограниченной в правой полуокрестности точки $x=0$.

Так как $f(x)=\frac{1}{\sin^p x\cdot\cos^q x}\underset{x\to+0}{\sim}\frac{1}{x^p}$ при любом q, то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\frac{1}{x^p}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Следовательно, несобственные интегралы J_1 и $\int\limits_0^{\pi/4} g(x)\,dx=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{x^p}$ в смысле сходимости ведут себя одинаково.

Но $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p \geq 1$. Значит, J_1 сходится при $p<1$ (q – любое) и расходится при $p \geq 1$ (q – любое).

J_2 – несобственный интеграл лишь при $q>0$. В этом случае у него точка $x=\frac{\pi}{2}$ является особой точкой; $f(x)$ оказывается неограниченной в окрестности точки $x=\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$f(x)=\frac{1}{\sin^p x \cdot \cos^q x}=\frac{1}{\sin^p x \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^q} \underset{x\to\frac{\pi}{2}-0}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q},$$

при любом p. Так как $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}$ сходится при $q<1$ и расходится при $q \geq 1$, то заключаем, что $J_2=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cdot \cos^q x}$ сходится при $q<1$ (p – любое) и расходится при $q \geq 1$ (p – любое).

Итак, получили: J_1 сходится лишь тогда, когда $p<1$, q – любое; J_2 сходится лишь тогда, когда $q<1$, p – любое. Следовательно, J_1 и J_2 сходятся одновременно лишь тогда, когда одновременно $p<1$ и $q<1$. Значит, J сходится лишь тогда, когда одновременно $p<1$; $q<1$.

4. Исследовать сходимость интеграла $J=\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

▶ $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ определена в промежутке $[0, 2]$ всюду, за исключением точек $x=0$, $x=1$. Так как точка $x=1$ лежит внутри промежутка интегрирования, то представим интеграл J в виде суммы трех интегралов $J=J_1+J_2+J_3$, где

$$J_1=\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}; \quad J_2=\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\ln x}; \quad J_3=\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x}.$$

Вспоминаем, что интеграл J называется сходящимся, если будут сходиться одновременно все три интеграла J_1, J_2, J_3.

Рассмотрим $J_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}$. У этого интеграла лишь точка $x = 0$ является особой. Имеем $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{\ln x} = 0 \Rightarrow f(x)$ – ограниченная в промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{f}(x) \in C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \Rightarrow \int\limits_0^{1/2} \tilde{f}(x)\,dx$ существует. Следовательно, несобственный интеграл J_1 сходится.

Рассмотрим $J_2 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\ln x}$. У этого интеграла лишь точка $x = 1$ является особой; $f(x)$ – неограниченная в окрестности точки $x = 1$. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln\left[1 + (x-1)\right]} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Так как $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x-1}$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $J_2 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\ln x}$. Совершенно аналогично устанавливается, что несобственный интеграл $J_3 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ расходится.

Общий вывод: исследуемый несобственный интеграл $J = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ расходится.

§4. Общий признак сходимости несобственного интеграла II рода

Прежде чем сформулировать общий признак сходимости несобственного интеграла II рода, вспомним общий признак существования конечного предела у функции $\varphi(\beta)$, заданной в промежутке $[a, b)$ при $\beta \to b - 0$.

Для того, чтобы у функции $\varphi(\beta)$, заданной в промежутке $[a, b)$, существовал конечный предел при $\beta \to b - 0$, необходимо и достаточно, чтобы любому

$\varepsilon > 0$ отвечало $\delta > 0$ такое, что как только $b-\delta < \beta' < b$ и $b-\delta < \beta'' < b$, так сейчас же $|\varphi(\beta'') - \varphi(\beta')| < \varepsilon$.

Пусть $f(x)$ задана в $[a,b]$ всюду, за исключением, быть может, точки *b*, и является неограниченной в окрестности точки *b*. Пусть $f(x)$ такая, что $f(x) \in R([a,\beta])$, где β – любое, удовлетворяющее условию $a < \beta < b$. Подчеркнем, что $f(x)$ может принимать в $[a,b)$ значения разных знаков. Мы знаем, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна существованию конечного предела у функции $\varphi(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)\,dx$ при $\beta \to b-0$.

Имеем

$$\varphi(\beta'') - \varphi(\beta') = \int\limits_a^{\beta''} f(x)\,dx - \int\limits_a^{\beta'} f(x)\,dx = \int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx .$$

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало число $\delta > 0$ такое, что как только $b-\delta < \beta' < b$ и $b-\delta < \beta'' < b$, так сейчас же $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

§5.Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы II рода

Пусть $f(x)$ задана в $[a,b]$ всюду, за исключением, быть может, точки *b*, и не является ограниченной в окрестности точки *b*. Пусть $f(x)$ такая, что $f(x) \in R([a,\beta])$, где β – любое, удовлетворяющее условию $a < \beta < b$. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *абсолютно сходящимся*.

Теорема 1. Если несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ также сходится.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $b-\delta < \beta' < b$, $b-\delta < \beta'' < b$, так сейчас же $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$.

Имеем $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,dx\right|$. Поэтому и подавно $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$, если $b-\delta < \beta' < b$, $b-\delta < \beta'' < b$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. ◀

Замечание. Теорема 1 *необратима*, т.е. из сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ не следует сходимость $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 2. Пусть $|f(x)| \le g(x)$ хотя бы для $x \in [\tilde{a}, b)$, $a \le \tilde{a} < b$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость (и притом абсолютная) несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

▶ По первому признаку сравнения (см. теорему 3) из сходимости $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость $\int_a^b |f(x)|\,dx$ $\Rightarrow$ по теореме 1 делаем заключение о сходимости (и притом абсолютной) несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. ◀

Теорема 3. Пусть имеется несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

1) Пусть $g(x)$ – ограниченная на $[a,b]$, т.е. существует $L>0$ такое, что $|g(x)|\le L$, $x\in[a,b]$.

2) Пусть $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, т.е. сходится $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Тогда $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ сходится абсолютно.

▶ Имеем

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| \le L\cdot|f(x)|, \quad x\in[a,b).$$

По условию $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int_a^b L\cdot|f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится абсолютно. ◀

§6. Несобственные интегралы первого рода (или несобственные интегралы по бесконечному промежутку)

I. Пусть функция $f(x)$ определена в $[a,+\infty)$ (a – конечное число). Пусть $f(x)$ такая, что $f(x)\in R([a,B])$, где B – любое конечное число, удовлетворяющее условию $B>a$.

Символ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (1)$$

называют *несобственным интегралом первого рода* функции $f(x)$.

Если существует конечный или бесконечный предел

$$J=\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\,dx,$$

то символу (1) приписывают числовое значение, полагая

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = J.$$

Если предел J – число конечное, то говорят, что несобственный интеграл (1) сходится. Если же предел J бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл (1) расходится.

II. Пусть функция $f(x)$ определена в $(-\infty, b]$ (b – конечное число), и пусть $f(x)$ такая, что $f(x) \in R([A,b])$, где A – любое конечное число, удовлетворяющее условию $A < b$.

Символ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

называют несобственным интегралом первого рода функции $f(x)$.

Если существует конечный или бесконечный предел

$$J = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{b} f(x)\,dx,$$

то символу (2) приписывают числовое значение, полагая

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = J.$$

Если предел J – число конечное, то говорят, что несобственный интеграл (2) сходится. Если же предел J бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл (2) расходится.

III. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке вещественной оси.

Символ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

называют несобственным интегралом первого рода функции $f(x)$.

Числовое значение символу (3) приписывают следующими двумя равносильными способами.

Способ 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Здесь в правой части $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ – несобственный интеграл первого рода типа (2), $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ – несобственный интеграл первого рода типа (1), b и a – конечные, любые.

Способ 2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} f(x)\,dx,$$

Важно заметить, что здесь $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам.

Замечание. Может оказаться, что не существует конечный предел

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} f(x)\,dx,$$

когда $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам, однако существует конечный предел

$$\widetilde{J} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

В этом случае предел $\widetilde{J}$ называют *главным значением несобственного интеграла* (3) и пишут $\widetilde{J} = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Пример. Пусть имеется $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$. Здесь $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty,+\infty)$ и, следовательно, интегрируема на любом конечном промежутке вещественной оси. Данный интеграл – несобственный интеграл I рода.

Имеем

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \left[\operatorname{arctg} x\Big|_{x=A}^{x=B} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=A}^{x=B} \right] =$$

$$= \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \left[\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A + \frac{1}{2}\ln\frac{1+B^2}{1+A^2} \right] = \pi + \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \frac{1}{2}\ln\frac{1+B^2}{1+A^2}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \frac{1}{2}\ln\frac{1+B^2}{1+A^2}$ не существует, когда $A\to-\infty$, а $B\to+\infty$ по произвольным, не зависящим друг от друга законам. Однако

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}A-\operatorname{arctg}(-A)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+A^2}{1+A^2}\right]=\pi.$$

Вывод: $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\pi$.

§7. Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Для определенности будем рассматривать несобственные интегралы первого рода типа (1). Утверждения, которые будут установлены для них, легко переносятся на несобственные интегралы первого рода типа (2), а следовательно, и типа (3).

Поэтому во всех рассматриваемых ниже теоремах предполагается, что функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,+\infty)$, и $f(x)\in R\big([a,B]\big)$, где B – любое конечное число, удовлетворяющее условию $B>a$.

Теорема 1. Пусть b – конечное число, любое, но такое, что $b>a$. Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ и $\int\limits_b^{+\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

▶ Возьмем число B конечное, любое, но такое, что $B>b$ ($\Rightarrow$ $B>a$). Имеем

$$\int\limits_a^B f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^B f(x)dx. \tag{1}$$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$. Но тогда из (1) следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_b^B f(x)dx$ $\Rightarrow$ $\int\limits_b^{+\infty}f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{b}^{B} f(x)\,dx$. Но тогда из (1) следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

3) Пусть $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ – расходится. Нужно доказать, что расходится и $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Но тогда по пункту 2) должен сходиться $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, а это не так.

4) Пусть $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ – расходится. Нужно доказать, что расходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Но тогда по пункту 1) должен сходиться $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$, а это не так. ◄

Пусть функция $f(x)\geq 0$ хотя бы для $x\in[b,+\infty)$ ($b\geq a$). Пусть число B – конечное, любое, но такое, что $B>b$. Ясно, что $\int\limits_{b}^{B} f(x)\,dx$ $(=\varphi(B))$ представляет собой функцию от B, определенную в $[b,+\infty)$ и неубывающую там. Мы знаем, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильна существанию конечного предела у функции $\varphi(B)=\int\limits_b^B f(x)\,dx$ при $B\to+\infty$. Но для существования конечного предела при $B\to+\infty$ у функции $\varphi(B)$ необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K>0$ такое, чтобы было

$$\varphi(B)=\int\limits_b^B f(x)\,dx\le K,\quad \text{для любого } B\ (B>b).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $f(x)\ge 0$ хотя бы для $x\in[b,+\infty)$ ($b\ge a$), то для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ (а значит, и несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K>0$ такое, что $\int\limits_b^B f(x)\,dx\le K$, для любого B ($B>b$).

Теорема 3 (первый признак сравнения). Пусть $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$ хотя бы для $x\in[b,+\infty)$ ($b\ge a$). Пусть $f(x)\le g(x)$, $x\in[b,+\infty)$. Тогда:

1) из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

2) из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

▶ Возьмем число B конечное, любое, но такое, что $B>b$. Имеем

$$0\le\int\limits_b^B f(x)\,dx\le\int\limits_b^B g(x)\,dx. \tag{2}$$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_b^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует число $K>0$ такое, что $\int\limits_b^B g(x)\,dx\le K$, для любого B ($B>b$). Но тогда из (2) следует,

что $\int\limits_b^B f(x)\,dx \le K$, для любого $B > b$ $\Rightarrow$ по теореме 2: $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Нужно доказать, что расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Но тогда по пункту 1) должен сходиться $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а это не так. ◀

Теорема 4 (второй признак сравнения). Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ хотя бы для $x \in [b, +\infty)$ ($b \ge a$). Пусть существует конечный, отличный от нуля предел

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (l \ne 0,\ l \ne \infty).$$

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

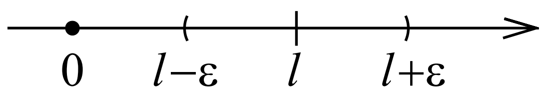

Рис. 2.4. К доказательству теоремы 4

▶ По условию, $l \ne 0$, $l \ne \infty$. Ясно, что $l > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, но такое, что $l - \varepsilon > 0$. По условию $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число b_ε (можно считать $b_\varepsilon > b$) такое, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon, \text{ если } x \ge b_\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon, \quad x \in [b_\varepsilon, +\infty) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p \cdot g(x) < f(x) < q \cdot g(x), \quad x \in [b_\varepsilon, +\infty). \tag{3}$$

(Здесь положено $p = l - \varepsilon$, $q = l + \varepsilon$; $p > 0$, $q > 0$ – определенные числа).

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} q\cdot g(x)\,dx$ сходится $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} p\cdot g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

3) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится. Нужно доказать, что и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Рассуждаем от противного: допустим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Но тогда, по пункту 2), $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ должен сходиться, а это не так.

4) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Нужно доказать, что расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Рассуждаем от противного: допустим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Но тогда, по пункту 1), $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ должен сходиться, а это не так. ◀

Замечание. Применение теоремы 4 для исследования несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ требует знания некоторой "эталонной" функции $g(x)$. Довольно часто в роли такой "эталонной" функции выступает $g(x)=\dfrac{1}{x^\lambda}$, $x\in[a,+\infty)$, $a>0$. Поэтому важно знать, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\lambda}$ ($a>0$) сходится, если $\lambda>1$, и расходится, если $\lambda\le 1$.

▶ Пусть $\lambda\ne 1$. Имеем

$$\int_a^B \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{x^{\lambda-1}}\bigg|_a^B = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{B^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}}\right) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ если $\lambda > 1$, то $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{a^{\lambda-1}}$ (определенное число); если $\lambda < 1$, то $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B \frac{dx}{x^\lambda} = +\infty$.

Пусть $\lambda = 1$. Имеем

$$\int_a^B \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^B = \ln B - \ln a \quad \Rightarrow \quad \lim_{B\to+\infty}\int_a^B \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Вывод: несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, $a > 0$, сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \le 1$. ◀

Примеры.

1. Исследовать сходимость интеграла $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$.

▶ $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$ определена и непрерывна в промежутке $[1, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x) \in R([1, B])$, где B – любое, удовлетворяющее условию $B > 1$. J – несобственный интеграл I рода. Так как $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{5/3}}$, то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x) = \frac{1}{x^{5/3}}$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/3}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} = 1 \quad (\ne 0,\ \ne\infty).$$

Было показано, что $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$ сходится ($\lambda = \frac{5}{3} > 1$). Значит, несобственный интеграл J тоже сходится. ◀

2. Исследовать сходимость интеграла $J = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

▶ Здесь $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$. Если $p \ge 1$, то $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$; Если $p < 1$, то $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$; $f(x)$ – неограниченная в правой полуокрестности точки $x = 0$.

Поэтому представляем J в виде суммы двух интегралов $J = J_1 + J_2$, где $J_1 = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, а $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Рассмотрим $J_1 = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$. Если $p \geq 1$, то J_1 – собственный интеграл; если $p < 1$, то J_1 – несобственный интеграл II рода. Точка $x = 0$ – единственная особая точка этого интеграла. Так как $f(x) = x^{p-1}e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{x^{1-p}} \underset{x \to +0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-p}}$, то в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-p}}$. Тогда

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{x^{1-p}e^{-x}}{x^{1-p}} = \lim_{x \to +0} e^{-x} = 1 \quad (\neq 0,\ \neq \infty).$$

Имеем: $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{1-p}}$ сходится, если $1 - p < 1$, и расходится, если $1 - p \geq 1$. Следовательно, и несобственный интеграл J_1 сходится, если $p > 0$, и расходится, если $p \leq 0$. Рассмотрим теперь $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Здесь $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$ определена и непрерывна на промежутке $[1, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x) \in R([1, B])$, где B – любое, удовлетворяющее условию $B > 1$. J_2 – несобственный интеграл I рода.

Мы знаем, что при любом p: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{p+1}}{e^x} = 0$. Последнее означает, что любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = 1 > 0$) отвечает число $\tilde{x}$ (можно считать, что $\tilde{x} > 1$), такое, что для $x \geq \tilde{x}$ будет: $\dfrac{x^{p+1}}{e^x} < 1 \Rightarrow$ при любом p: $\dfrac{x^{p-1}}{e^x} < \dfrac{1}{x^2}$ для $x \geq \tilde{x}$. Значит, в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Имеем: $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_{\tilde{x}}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится при любом p.

Итак, получили: J_1 сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$, J_2 сходится при любом p. Вывод: несобственный интеграл J сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$.

3. Исследовать сходимость интеграла $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx$ $(n>0)$.

▶ Здесь $f(x)=\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}$ $(n>0)$. Если $m\ge 0$, то $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$. Если $m<0$, то $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(0,+\infty)$; $f(x)$ не определена в точке $x=0$, причем $f(x)$ – ограниченная в окрестности точки $x=0$, если $-1\le m<0$, и неограниченная, если $m<-1$. Поэтому представляем J в виде суммы двух интегралов: $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int\limits_0^1\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx$, $J_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx$. Рассмотрим $J_1=\int\limits_0^1\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx$.

Если $m\ge 0$, то J_1 – собственный интеграл.

Если $-1<m<0$, то

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{m+1}}{2+x^n}=0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ограниченная в окрестности точки $x=0$, и следует рассмотреть функцию

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde f(x)\in C([0,1])$ $\Rightarrow$ $\int\limits_0^1\tilde f(x)dx$ существует, и, следовательно, несобственный интеграл J_1 сходится, если $-1<m<0$.

Если $m=-1$, то

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x(2+x^n)}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x(2+x^n)}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2+x^n}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ – ограниченная в окрестности точки $x=0$, и следует рассмотреть функцию

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,1]\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Так как $\tilde f(x)\in C([0,1])$, то $\int\limits_0^1\tilde f(x)dx$ существует. Значит, и в этом случае несобственный интеграл J_1 сходится. Пусть теперь $m<-1$. Имеем в этом случае

$$f(x)=\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}\underset{x\to+0}{\sim}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{-m-1}}.$$

В качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\dfrac{1}{2x^{-m-1}}$. Имеем: $\int\limits_0^1 g(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^{-(m+1)}}$ сходится, если $-(m+1)<1$, т. е. если $m>-2$, и расходится, если $-(m+1)\ge 1$, т. е. если $m\le -2$.

Объединяя все рассмотренные выше случаи, приходим к выводу, что интеграл J_1 сходится, если $m>-2$, и расходится, если $m\le -2$ ($n>0$, по условию).

Рассмотрим теперь $J_2=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx$, $n>0$ (J_2 имеет смысл исследовать лишь при $m>-2$). Здесь $f(x)=\dfrac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}\in C\big([1,+\infty)\big)\Rightarrow f(x)\in R\big([1,B]\big)$, где B – любое, удовлетворяющее условию $B>1\Rightarrow J_2$ – несобственный интеграл I рода. Имеем

$$f(x)=\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}=\frac{\operatorname{arctg}x}{x^{n-m}\left(1+\dfrac{2}{x^n}\right)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x^{n-m}}.$$

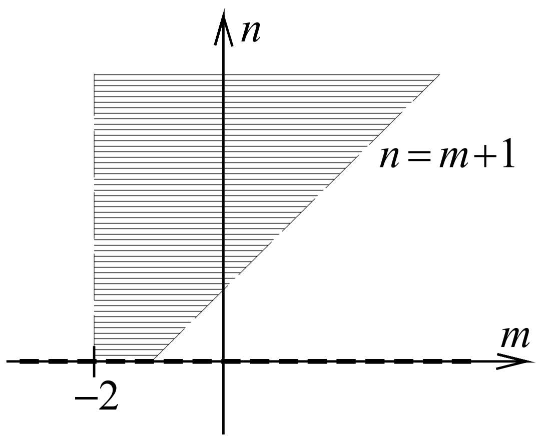

Рис. 2.5. К примеру 3

Поэтому в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{n-m}}$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\,dx=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{n-m}}$ сходится, если $n-m>1$, и расходится, если $n-m\le 1$. Значит, и несобственный интеграл J_2 сходится, если $n-m>1$, и расходится, если $n-m\le 1$.

Заштрихованная часть верхней полуплоскости ($n>0$) – область сходимости несобственного интеграла *J*. Она определяется неравенствами

$$\begin{cases} n>0,\\ m>-2,\\ n>m+1.\end{cases}$$

Незаштрихованная часть верхней полуплоскости ($n>0$) – область, в которой несобственный интеграл *J* расходится. Она состоит из двух частей. Одна из этих частей определяется неравенствами

$$\begin{cases} n>0,\\ m\le -2,\end{cases}$$

другая – неравенствами

$$\begin{cases} n > 0, \\ m > -2, \\ n \le m + 1. \end{cases}$$

§8. Общий признак сходимости несобственного интеграла первого рода

Прежде чем сформулировать общий признак сходимости несобственного интеграла первого рода, вспомним общий признак существования конечного предела у функции $\varphi(B)$, заданной в промежутке $[a, +\infty)$ при $B \to +\infty$.

Для того, чтобы у функции $\varphi(B)$, заданной на промежутке $[a, +\infty)$, существовал конечный предел при $B \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало число M такое, что как только $B_1 > M$ и $B_2 > M$, так сейчас же $\left|\varphi(B_2) - \varphi(B_1)\right| < \varepsilon$.

Мы знаем, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильна существованию конечного предела при $B \to +\infty$ у функции $\varphi(B) = \int\limits_a^{B} f(x)\,dx$. Имеем

$$\varphi(B_2) - \varphi(B_1) = \int\limits_a^{B_2} f(x)\,dx - \int\limits_a^{B_1} f(x)\,dx = \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx.$$

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало число $M(\varepsilon)$ такое, что как только $B_1 > M$, $B_2 > M$, так сейчас же $\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Замечание. В общем признаке сходимости функция $f(x)$ может принимать в $[a, +\infty)$ значения разных знаков.

§9. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ задана в $[a, +\infty)$ и такова, что $f(x) \in R\big([a, B]\big)$, где B – любое, конечное ($B > a$).

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называют *абсолютно сходящимся*.

Теорема 1. Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится (т.е. из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$).

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M(\varepsilon)$ такое, что как только $B_1 > M$, $B_2 > M$ (для определенности можно считать, что $B_2 > B_1$), так сейчас же $\int\limits_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$.

Мы знаем, что $\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx\right| \le \int\limits_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx$. Поэтому если $B_2 > B_1 > M(\varepsilon)$, то и подавно $\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Последнее означает, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. ◀

Замечание. Доказанная теорема позволяет использовать для установления сходимости некоторых несобственных интегралов признаки, установленные для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Правда, здесь следует иметь в виду следующее: если оказывается, что $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то это совсем не означает, что расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Могут иметь место случаи, когда $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, а $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. В этих случаях про несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ говорят, что он сходится условно.

Теорема 2. Пусть $|f(x)| \le g(x)$ хотя бы для $x \in [b, +\infty)$ $(b \ge a)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость (и притом абсолютная) несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

▶ По первому признаку сравнения из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ $\Rightarrow$ по теореме 1 делаем заключение о сходимости (и притом абсолютной) несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. ◀

Теорема 3. Пусть имеется несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Пусть функция $g(x)$ – ограниченная на $[a, +\infty)$, т.е. существует $L > 0$ такое, что $|g(x)| \le L$, $x \in [a, +\infty)$. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно (т.е. сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$). Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится абсолютно.

▶ Имеем

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| \le L|f(x)|, \quad x \in [a, +\infty).$$

По условию, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} L\cdot|f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)\cdot g(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится абсолютно. ◀

* §10. Признак Абеля – Дирихле

Этот признак позволяет устанавливать сходимость несобственных интегралов в ряде случаев, когда абсолютная сходимость отсутствует.

Теорема. Пусть имеется несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Пусть

1) $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$ и имеет там ограниченную первообразную $F(x)$;

2) $g(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и имеет там непрерывную производную $g'(x)$;

3) $g(x)$ монотонно убывает на $[a,+\infty)$ ($\Rightarrow$ $g'(x)\le 0$, $x\in[a,+\infty)$);

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ($\Rightarrow$ $g(x)\ge 0$, $x\in[a,+\infty)$).

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится.

▶ Возьмем B – любое, удовлетворяющее условию $B>a$, и рассмотрим $\int\limits_a^{B} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что существует конечный предел $J=\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f(x)\cdot g(x)\,dx$.

По условию, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a,+\infty)$ $\Rightarrow$ $F'(x)=f(x)$, $x\in(a,+\infty)$. Поэтому $\int\limits_a^{B} f(x)\cdot g(x)\,dx=\int\limits_a^{B} F'(x)\cdot g(x)\,dx$. Применяя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$\int\limits_a^{B} F'(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x)\Big|_{x=a}^{x=B}-\int\limits_a^{B} F(x)\cdot g'(x)\,dx \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\limits_a^{B} f(x)\cdot g(x)\,dx = F(B)\cdot g(B)-F(a)\cdot g(a)-\int\limits_a^{B} F(x)\cdot g'(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Так как $F(B)$ – ограниченная на $[a,+\infty)$, а $g(B)\xrightarrow[B\to+\infty]{}0$, то $\lim\limits_{B\to+\infty}F(B)\cdot g(B)=0$.

А тогда из (1) ясно, что $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)\cdot g(x)\,dx$ будет существовать и будет конечным, если существует конечный предел

$$\lim_{B\to+\infty}\int_a^B F(x)\cdot g'(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Рассмотрим

$$\int_a^B \left|F(x)\cdot g'(x)\right|dx\,. \tag{3}$$

Имеем

$$\int_a^B \left|F(x)\cdot g'(x)\right|dx=\int_a^B \left|F(x)\right|\cdot\left|g'(x)\right|dx\le L\cdot\int_a^B \left|g'(x)\right|dx=$$

$$=-L\cdot\int_a^B g'(x)\,dx=-L\,g(x)\Big|_{x=a}^{x=B}=L\cdot g(a)-\underbrace{L\cdot g(B)}_{\ge 0}\le L\cdot g(a)\,.$$

Получаем: $\int\limits_a^B \left|F(x)\cdot g'(x)\right|dx$ монотонно возрастает вместе с B и ограничен сверху числом $L\cdot g(a)$ при любом $B\in[a,+\infty)$ $\Rightarrow$ существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B \left|F(x)\cdot g'(x)\right|dx$ $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} \left|F(x)\cdot g'(x)\right|dx$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\cdot g'(x)\,dx$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B F(x)\cdot g'(x)\,dx$. А тогда из (1) следует, что существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)\cdot g(x)\,dx$. ◀

Примеры.

1. Исследовать сходимость интеграла $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

▶ Здесь $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}\in C\big((0,+\infty)\big)$. В точке $x=0$ $f(x)$ не определена. Поэтому представляем J в виде суммы двух интегралов: $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int\limits_0^1 \dfrac{\sin^2 x}{x}dx$, $J_2=\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}dx$.

Рассмотрим $J_1=\int\limits_0^1 \dfrac{\sin^2 x}{x}dx$. Точка $x=0$ – единственная особая точка этого интеграла. Имеем $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0 \Rightarrow f(x)$ – ограниченная функция на $(0,1]$. Положим

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,1];\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde f(x)\in C\big([0,1]\big) \Rightarrow \tilde f(x)\in R\big([0,1]\big)$. Значит, несобственный интеграл J_1 сходится.

Рассмотрим $J_2=\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}dx$. Имеем

$$J_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx=\underbrace{\frac12\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}}_{=\tilde J_2}-\underbrace{\frac12\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx}_{=\tilde{\tilde J}_2}=\tilde J_2-\tilde{\tilde J}_2.$$

$\tilde J_2$ – расходится ($\tilde J_2$ – частный случай интеграла $\dfrac12\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\lambda}$, который расходится, если $\lambda\le 1$). Займемся интегралом $\tilde{\tilde J}_2$. Положим $f_1(x)=\dfrac12\cos 2x$, $g_1(x)=\dfrac1x$. Имеем:

1) $f_1(x)=\dfrac12\cos 2x\in C\big([1,+\infty]\big)$ и имеет на промежутке $[1,+\infty)$ ограниченную первообразную $F_1(x)=\dfrac14\sin 2x$;

2) $g_1(x)=\dfrac1x$ определена на $[1,+\infty)$ и имеет там непрерывную производную $g_1'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ ($g_1'(x)<0$, $x\in[1,+\infty)$);

3) $g_1(x)$ монотонно убывает на $[1,+\infty)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac1x=0$

Видим, что для $\tilde{\tilde{J}}_2$ выполнены все условия признака Абеля – Дирихле. Значит, несобственный интеграл $\tilde{\tilde{J}}_2$ сходится. У нас $J_2 = \tilde{J}_2 - \tilde{\tilde{J}}_2$, причем $\tilde{J}_2$ расходится, а $\tilde{\tilde{J}}_2$ сходится. Делаем вывод, что J_2 расходится. В самом деле, если допустить, что J_2 сходится, то получим, что $\tilde{J}_2$ сходится (как сумма двух сходящихся несобственных интегралов J_2 и $\tilde{\tilde{J}}_2$), а это не так.

У нас $J = J_1 + J_2$, причем J_1 сходится, а J_2 расходится. Делаем вывод: J расходится. Если предположить, что несобственный интеграл J сходится, то получим, что должен сходиться J_2 (как разность двух сходящихся несобственных интегралов J и J_1), а это не так. ◀

2. Исследовать сходимость интеграла $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$).

▶ Здесь $f(x) = \frac{\sin x}{x^\lambda} \in C\big([a, +\infty)\big) \Rightarrow f(x) \in R\big([a, B]\big)$, где B – любое, удовлетворяющее условию $B > a \Rightarrow J$ – несобственный интеграл I рода.

а) Пусть $\lambda > 0$. Положим $f_1(x) = \sin x$, $g_1(x) = \frac{1}{x^\lambda}$. Имеем:

1) $f_1(x) = \sin x \in C\big([a, +\infty)\big)$ и имеет на $[a, +\infty)$ ограниченную первообразную $F_1(x) = -\cos x$;

2) $g_1(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ определена на $[a, +\infty)$ и имеет там непрерывную производную $g_1'(x) = -\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}$ ($g_1'(x) < 0$, $x \in [a, +\infty)$);

3) $g_1(x)$ монотонно убывает на $[a, +\infty)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0$.

Видим, что выполнены все условия признака Абеля – Дирихле. Следовательно, $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$) сходится при $\lambda > 0$.

б) Пусть $\lambda \le 0$. Утверждаем, что в этом случае $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$) расходится. Рассуждаем от противного. Допустим, что $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$) сходится. Но тогда по теореме из §8, любому ε, в том числе и $\varepsilon_0 = 1$, отвечает число M, такое, что как только $B_1 > M$ и $B_2 > M$, так сейчас же $\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx\right| < \varepsilon_0\ (=1)$.

Пусть n – натуральное число, такое, что $2\pi n > M$, и пусть $B_1 = 2\pi n$, $B_2 = 2\pi n + \pi$. Ясно, что для любого $x \in [B_1, B_2]$ будет: $x \geq 2\pi n \geq 2\pi > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^\lambda} \geq 1$ (так как $\lambda \leq 0$) $\Rightarrow \frac{\sin x}{x^\lambda} \geq \sin x$ (так как $\sin x$ в промежутке $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ неотрицателен) $\Rightarrow$

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx\right| = \int\limits_{B_1}^{B_2} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \geq \int\limits_{B_1}^{B_2} \sin x\, dx = 2 > 1\ \ (= \varepsilon_0).$$

Получено противоречие. Значит, наше предположение неверно, и $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$) расходится при $\lambda \leq 0$.

Окончательный вывод: $J = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ ($a > 0$) сходится, если $\lambda > 0$, и расходится, если $\lambda \leq 0$. ◀

§11. Основная формула интегрального исчисления для несобственных интегралов

Теорема. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ ($\Rightarrow$ $f(x) \in R([a,\beta])$, где β – любое, удовлетворяющее условию: $a < \beta < b$). Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a,b)$. Тогда если $F(x)$ – функция, непрерывная на $[a,b]$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

▶ Возьмем β – любое, удовлетворяющее условию: $a < \beta < b$. Имеем

$$\int\limits_a^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(a). \tag{1}$$

По условию, $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ в частности, $F(x)$ – непрерывна слева в точке b, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = F(b)$. В соотношении (1) перейдем к пределу при $\beta \to b-0$. Так как $\lim\limits_{\beta \to b-0}\left[F(\beta)-F(a)\right]=F(b)-F(a)$ существует, конечный, то существует конечный $\lim\limits_{\beta \to b-0}\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. ◀

Пример. Пусть имеется $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Здесь $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in C\big([0,1)\big)$. ($f(x)\xrightarrow[x\to 1-0]{}\infty$; данный интеграл – несобственный интеграл II рода). Имеем: $F(x)=\arcsin x$ – первообразная для $f(x)$ на $[0,1)$. Видим далее, что $F(x)\in C\big([0,1]\big)$.

Вывод: данный несобственный интеграл сходится, причем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{x=0}^{x=1} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Для несобственных интегралов I рода имеет место аналогичная теорема. Именно:

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в $[a,+\infty)$ ($\Rightarrow \ f(x)\in R\big([a,B]\big)$, где B – любое, конечное, такое, что $B>a$). Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ в $[a,+\infty)$. Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=+\infty} = F(+\infty)-F(a). \tag{2}$$

Символом $F(+\infty)$ обозначают $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Например, $\operatorname{arctg}(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$. Заметим, что символ $F(+\infty)$ не всегда имеет смысл. Например, $\cos(+\infty)$ не имеет смысла, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ не существует. В соотношении (2) осмысленность одной из частей равенства обеспечивает осмысленность другой.

▶ Возьмем B – любое, но такое, что $B>a$. Имеем

$$\int\limits_a^B f(x)\,dx = F(B)-F(a). \tag{3}$$

Перейдем в (3) к пределу при $B\to+\infty$. Из (3) ясно:

1) Если существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B) = F(+\infty)$, то существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)\,dx$, а значит, сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2) Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т.е. если существует конечный предел $\lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)\,dx$, то существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B) = F(+\infty)$. ◀

§12. Интегрирование по частям несобственных интегралов

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в $[a,b)$ непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \lim_{x\to b-0}\big[f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a)\big] - \int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx, \qquad (1)$$

причем осмысленность любых двух из трех членов в соотношении (1) обеспечивает осмысленность третьего члена.

▶ Возьмем β – любое, удовлетворяющее условию: $a < \beta < b$. Имеем

$$\int\limits_a^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = \big[f(\beta)\cdot g(\beta) - f(a)\cdot g(a)\big] - \int\limits_a^\beta f'(x)\cdot g(x)\,dx. \qquad (2)$$

Перейдем в (2) к пределу при $\beta \to b-0$. Если будут существовать конечные пределы любых двух из трех членов в соотношении (2), то будет существовать конечный предел и третьего члена этого соотношения. ◀

Пример. Пусть имеется $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. Этот интеграл – несобственный интеграл II рода; точка $x = 0$ – особая точка. Положим: $u = \ln\sin x \Rightarrow du = \dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot dx$, $dv = dx \Rightarrow v = x$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \lim_{x\to+0}\left[\frac{\pi}{2}\ln\sin\frac{\pi}{2} - x\ln\sin x\right] - \int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,dx. \qquad (3)$$

Имеем:

1) $\lim\limits_{x\to+0}\Big[\underbrace{\frac{\pi}{2}\ln\sin\frac{\pi}{2}}_{=0}-x\ln\sin x\Big]=-\lim\limits_{x\to+0}x\ln\sin x=$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}x^2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=0.$$

2) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$ (подынтегральная функция не определена в точке $x=0$).

Так как $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=1$, то подынтегральная функция является ограниченной. Положим:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Видим, что $\varphi(x)\in C\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\ \Rightarrow\ \int\limits_0^{\pi/2}\varphi(x)\,dx$ – существует.

Вывод: $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$ – сходится. Видим, что правая часть соотношения (3) имеет смысл. Значит, $\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$ – сходится.

Замечание. Для несобственных интегралов первого рода имеет место аналогичная теорема. Именно:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в $[a,+\infty)$ непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\cdot g'(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)\right]-\int\limits_a^{+\infty}f'(x)\cdot g(x)\,dx, \qquad (4)$$

причем осмысленность любых двух из трех членов в соотношении (4) обеспечивает осмысленность третьего члена.

▶ Возьмем число B – любое, но такое, что $B>a$. Имеем

$$\int\limits_a^{B}f(x)\cdot g'(x)\,dx=\left[f(B)\cdot g(B)-f(a)\cdot g(a)\right]-\int\limits_a^{B}f'(x)\cdot g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Перейдем в (5) к пределу при $B\to+\infty$. Видим, что если будут существовать конечные пределы любых двух из трех членов в соотношении (5), то будет существовать конечный предел и третьего члена этого соотношения. ◀

§13. Замена переменной интегрирования в несобственных интегралах

Теорема. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в $[a,b)$ (случай $b=+\infty$ не исключается). Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена в $[p,q)$ и имеет там непрерывную производную $\varphi'(t)$ (случай $q=\infty$ не исключается). Пусть функция $x=\varphi(t)$ – строго монотонная (для определенности – строго возрастающая). Пусть, далее, $\varphi(p)=a$, $\lim\limits_{t\to q-0}\varphi(t)=b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_p^q f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt, \tag{1}$$

причем осмысленность любой из частей равенства (1) обеспечивает осмысленность другой.

▶ Возьмем число c – любое, удовлетворяющее условию: $p<c<q$. По теореме о замене переменной в определенном интеграле можно написать

$$\int\limits_p^c f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt=\int\limits_a^{\varphi(c)} f(x)\,dx. \tag{2}$$

В соотношении (2) перейдем к пределу при $c\to q-0$ и учтем, что $\lim\limits_{c\to q-0}\varphi(c)=b$. Видим: если будет существовать конечный предел одной из частей равенства (2), то будет существовать конечный предел и другой части этого равенства. При этом будет иметь место соотношение (1). ◀

Примеры к главе 2

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

▶ Здесь $f(x)=\frac{\sin x}{x}\in C\big((0,+\infty)\big)$; $f(x)$ не определена в точке $x=0$. Представим J в виде суммы двух интегралов $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$, $J_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Рассмотрим $J_1 = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. У этого интеграла точка $x = 0$ – единственная особая точка. Имеем $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow f(x)$ – ограниченная функция на $(0, 1]$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1]; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Видим, что $\tilde{f}(x) \in C([0,1]) \Rightarrow \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,dx$ существует. Следовательно, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ – сходится.

Рассмотрим $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Здесь $f(x) = \frac{\sin x}{x} \in C([1, +\infty)) \Rightarrow f(x) \in R([1, B])$, где B – любое, удовлетворяющее условию $B > 1$. J_2 – несобственный интеграл I рода. J_2 является частным случаем несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$, $a > 0$, когда $a = 1$ и $\lambda = 1$. Значит, J_2 сходится. Так как несобственные интегралы J_1 и J_2 сходятся, то сходится и несобственный интеграл *J*, как сумма двух сходящихся несобственных интегралов. Рассмотрим теперь $\tilde{J} = \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$. Имеем $|\sin x| \geq \sin^2 x$, $x \in [0, +\infty) \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Ранее было показано (см. пример 1 к §10), что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится. Но тогда по признаку сравнения заключаем, что $\tilde{J} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Так как $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, а $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится, то приходим к выводу, что $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно. ◀

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $J=\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx$.

▶ Здесь $\widetilde{f}(x)=x^2\cos(e^x)\in C([0,+\infty))$. J – несобственный интеграл I рода. Делаем замену $e^x=t \Rightarrow x=\ln t$ ($t>0$); $dx=\dfrac{dt}{t}$. Значению $x=0$ соответствует значение $t=1$. Значению $x=+\infty$ соответствует значение $t=+\infty$. Получаем $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{(\ln t)^2\cos t}{t}dt$. Полагаем $f(t)=\cos t$; $g(t)=\dfrac{(\ln t)^2}{t}$. Имеем:

1) $f(t)$ имеет на промежутке $[1,+\infty)$ ограниченную первообразную $F(t)=\sin t$.
2) $g(t)=\dfrac{(\ln t)^2}{t}$ имеет на $[1,+\infty)$ непрерывную производную $g'(t)=\dfrac{\ln t(2-\ln t)}{t^2}$. Отметим, что $g'(t)<0$ для $t\in(e^2,+\infty)$. Следовательно,
3) $g(t)$ монотонно убывает на промежутке $[e^2,+\infty)$.
4) $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(\ln t)^2}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2\ln t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2}{t}=0$.

Видим, что на промежутке $[e^2,+\infty)$ выполнены все условия признака Абеля – Дирихле. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\dfrac{(\ln t)^2\cos t}{t}dt$ сходится, а, значит, и несобственный интеграл $J=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{(\ln t)^2\cos t}{t}dt$ сходится. Исследуем теперь J на абсолютную сходимость. Для этого рассматриваем $\widetilde{J}=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{(\ln t)^2|\cos t|}{t}dt$. Имеем для $t\in[1,+\infty)$:

$$\frac{(\ln t)^2|\cos t|}{t}\ge\frac{(\ln t)^2\cos^2 t}{t}=\frac{(\ln t)^2}{2t}(1+\cos 2t);$$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2\cos^2 t}{t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{t}dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2\cos 2t}{t}dt.$$

Заметим, что $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{(\ln t)^2\cos 2t}{t}dt$ сходится (по признаку Абеля – Дирихле).

$$\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{t}dt=\lim_{B\to+\infty}\int_1^{B}\frac{(\ln t)^2}{t}dt=\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{3}(\ln B)^3=+\infty\,.$$

Значит, $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2\cos^2 t}{t}dt$ расходится, а, следовательно, несобственный интеграл $\widetilde{J}$ расходится (по признаку сравнения). Окончательный вывод: несобственный интеграл J сходится условно. ◀

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\widetilde{J}=\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,dx$ $(q\neq 0)$.

▶ Делаем замену $x^q=t\ \Rightarrow\ x=t^{\frac{1}{q}}$; $dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$. Если $q>0$, то значению $x=0$ соответствует значение $t=0$, а значению $x=+\infty$ соответствует значение $t=+\infty$. Если $q<0$, то значению $x=0$ соответствует $t=+\infty$, а значению $x=+\infty$ соответствует $t=0$. Будем иметь, следовательно,

$$\widetilde{J}=\pm\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p}{q}+\frac{1}{q}-1}\sin t\,dt\qquad\left(\begin{matrix}\text{знак "+", если } q>0;\\ \text{знак "–", если } q<0\end{matrix}\right).$$

Станем исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$J=\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt\,.$$

Здесь $f(t)=\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$ определена и непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$, если $\frac{p+1}{q}\geq 1$, и на промежутке $(0,+\infty)$, если $\frac{p+1}{q}<1$.

Представим J в виде суммы двух интегралов $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int_0^{1}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$,

$$J_2=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt\,.$$

Рассмотрим интеграл J_1. Если $\frac{p+1}{q}\geq 1$, то J_1 – собственный интеграл. Если $\frac{p+1}{q}<1$, то J_1 – несобственный интеграл. (Точка $t=0$ в этом случае – единственная особая точка.) Так как $f(t)=\dfrac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\underset{t\to+0}{\sim}\dfrac{1}{t^{-\frac{p+1}{q}}}$, то в качестве $g(t)$ следует взять $g(t)=\dfrac{1}{t^{-\frac{p+1}{q}}}$. Имеем $\int\limits_0^1 g(t)\,dt=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{t^{-\frac{p+1}{q}}}$ сходится, если $-\dfrac{p+1}{q}<1$, и расходится, если $-\dfrac{p+1}{q}\geq 1$. Следовательно, несобственный интеграл J_1 сходится, если $\dfrac{p+1}{q}>-1$, и расходится, если $\dfrac{p+1}{q}\leq -1$.

Рассмотрим $J_2=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$. Интеграл такого вида был изучен (см. $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^{\lambda}}dx$, $a>0$). Здесь $a=1$; $\lambda=1-\dfrac{p+1}{q}$. J_2 сходится, если $\dfrac{p+1}{q}<1$, и расходится, если $\dfrac{p+1}{q}\geq 1$.

Общий вывод: несобственный интеграл J сходится, если $\left|\dfrac{p+1}{q}\right|<1$, и расходится, если $\left|\dfrac{p+1}{q}\right|\geq 1$.

Исследуем теперь J на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим $J^*=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt=J_1^*+J_2^*$, где $J_1^*=\int\limits_0^1\dfrac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt=\int\limits_0^1\dfrac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$, $J_2^*=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$.
Выше было установлено, что J_1^* сходится, если $\dfrac{p+1}{q}>-1$, и расходится, если $\dfrac{p+1}{q}\leq -1$.

Займемся теперь интегралом J_2^*. Имеем: $\dfrac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\leq\dfrac{1}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$, $t\in[1,+\infty)$. $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$ сходится, если $1-\dfrac{p+1}{q}>1\Rightarrow\dfrac{p+1}{q}<0$. Имеем, далее

$$\frac{|\sin t|}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\geq\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}=\frac{1-\cos 2t}{2t^{1-\frac{p+1}{q}}},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt=\frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt\right].$$

Но $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}$ расходится, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$, а $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ сходится, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$ (по признаку Абеля – Дирихле). Значит, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$ расходится, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$, а, следовательно, J_2^* расходится, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$. Получаем, таким образом: J^* сходится, если $-1<\frac{p+1}{q}<0$, и расходится, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$.

Окончательный вывод: несобственный интеграл J сходится абсолютно, если $-1<\frac{p+1}{q}<0$, и сходится условно, если $0\le\frac{p+1}{q}<1$.

*** *4***. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $J=\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ ($q>0$).

▶ Здесь $f(x)=\frac{x^p\sin x}{1+x^q}$ определена и непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$, если $p\ge 0$, и на промежутке $(0,+\infty)$, если $p<0$. Представим J в виде суммы двух интегралов $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int_0^{1}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$, $J_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$.

Рассмотрим $J_1=\int_0^{1}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$. Если $p\ge 0$, то J_1 – собственный интеграл; если $p<0$, то J_1 – несобственный интеграл (в этом случае точка $x=0$ – единственная особая точка интеграла J_1). Отметим, что подынтегральная функция в J_1 – неотрицательная на промежутке $(0,1]$. Имеем $\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\underset{x\to+0}{\sim}x^{p+1}=\frac{1}{x^{-(p+1)}}$; $\int_0^1\frac{dx}{x^{-(p+1)}}$ сходится и притом абсолютно, если $-(p+1)<1$, т. е. если $p>-2$, и расходится, если $p\le -2$, и все это при любом $q>0$ (у нас по условию $q>0$).

Рассмотрим теперь $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. J_2 – несобственный интеграл I рода.

Положим $\tilde{g}(x) = \frac{x^p}{1+x^q}$; $\tilde{f}(x) = \sin x$. Замечаем, что:

1) $\tilde{f}(x)$ имеет на промежутке $[1;+\infty)$ ограниченную первообразную $\tilde{F}(x) = -\cos x$;

2) $\tilde{g}(x)$ имеет на промежутке $[1;+\infty)$ непрерывную производную $\tilde{g}'(x) = \frac{x^{p-1}\left[p-(q-p)x^q\right]}{(1+x^q)^2}$;

3_1) если $q-p>0$, то $\tilde{g}(x)$ монотонно убывающая (по крайней мере, начиная с некоторого места, а именно, для тех x, для которых $x^q > \frac{p}{q-p}$);

3_2) если $q-p \le 0$, то $\tilde{g}(x)$ положительная, монотонно возрастающая на промежутке $[1;+\infty)$ и, следовательно, для $x \ge 1$: $\tilde{g}(x) \ge \tilde{g}(1) = \frac{1}{2}$.

Видим, что если $q-p>0$, то выполнены условия признака Абеля – Дирихле, и, следовательно, несобственный интеграл J_2 сходится.

Покажем, что если $q-p \le 0$, то несобственный интеграл J_2 расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что J_2 сходится. Но тогда любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$) отвечает число $M > 0$ (можно считать: $M > 1$), такое, что как только $B_1 > M$, $B_2 > M$, так сейчас же $\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} \tilde{g}(x) \sin x \, dx \right| < \frac{1}{2}$. Заметим, что каким бы ни было число M, всегда можно указать натуральное число n такое, что будет $2n\pi > M$. Положим $B_1 = 2n\pi$, $B_2 = 2n\pi + \pi$ ($B_2 > B_1 > M$). Для $x \in [2n\pi, 2n\pi + \pi]$: $\tilde{g}(x) \ge \frac{1}{2}$; $\sin x \ge 0$. Поэтому $\tilde{g}(x)\sin x \ge \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow$

$$\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} \tilde{g}(x) \sin x \, dx \right| = \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \tilde{g}(x) \sin x \, dx \ge \frac{1}{2} \int\limits_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin x \, dx = 1 \ (> \varepsilon_0).$$

Получено противоречие. Значит, предположение, что J_2 сходится при $q-p \le 0$, неверно.

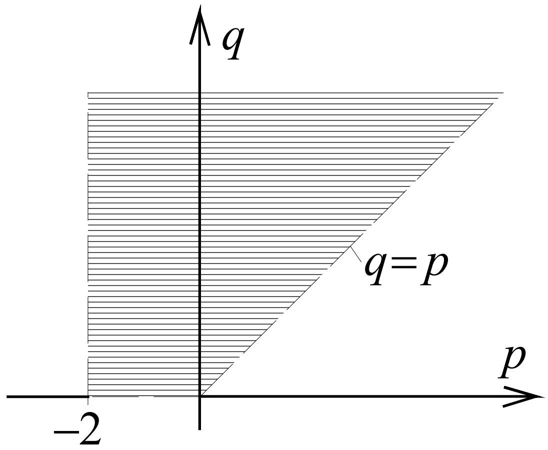

Рис. 2.6. К примеру 4

Таким образом, получаем, что несобственный интеграл J сходится в области, определяемой неравенствами: $q>0$; $p>-2$; $q-p>0$. Во всех остальных точках верхней полуплоскости J расходится.

Исследуем J_2 на абсолютную сходимость. С этой целью рассмотрим интеграл $\widetilde{J}_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}dx$.

Имеем

$$\frac{x^p\sin^2 x}{1+x^q}\le\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\le\frac{x^p}{1+x^q}\le\frac{x^p}{x^q}=\frac{1}{x^{q-p}},\quad x\in[1,+\infty).$$

Так как $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{q-p}}$ сходится при $q-p>1$, то заключаем, что J_2 – сходится абсолютно при $q-p>1$ (т. е. при $q>p+1$). Имеем далее:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p\sin^2 x}{1+x^q}dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx}_{\widetilde{J}_2}-\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p\cos 2x}{1+x^q}dx}_{\widetilde{\widetilde{J}}_2}.$$

Несобственный интеграл $\widetilde{J}_2$ сходится, если $q-p>1$, и расходится, если $q-p\le 1$.

Несобственный интеграл $\widetilde{\widetilde{J}}_2$ сходится, если $q-p>0$, и расходится, если $q-p\le 0$.

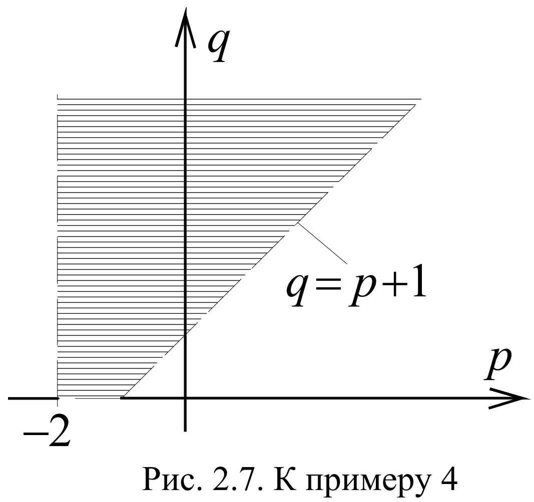

Рис. 2.7. К примеру 4

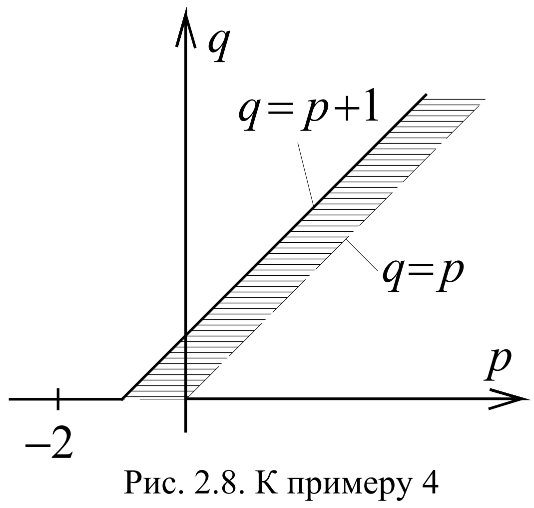

Рис. 2.8. К примеру 4

Следовательно, J_2 сходится абсолютно, если $q > p+1$. Получаем, таким образом, что несобственный интеграл J сходится абсолютно в области, определяемой неравенствами $q > 0$, $p > -2$, $q > p+1$ (рис. 2.7).

Область условной сходимости несобственного интеграла J получается, если из области сходимости J удалить область его абсолютной сходимости. Область условной сходимости несобственного интеграла J определяется неравенствами $q > 0$, $p < q \le p+1$ (рис. 2.8).

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§1. Вычисление площадей плоских фигур

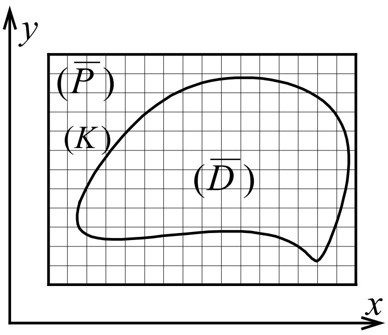

Рис. 3.1. Сетка прямых для определения площади фигуры

1°. Некоторые предварительные сведения. Пусть $(\overline{D})$ – область, расположенная в плоскости (x, y) и ограниченная контуром (K). Заключим $(\overline{D})$ в прямоугольник $(\overline{P})$, стороны которого параллельны координатным осям. Произвольной сетью прямых, параллельных координатным осям, разложим $(\overline{P})$ на частичные прямоугольники $(\overline{P}_{ik})$ $(i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m})$ (рис. 3.1). Обозначим через λ_{ik} длину диагонали частичного прямоугольника $(\overline{P}_{ik})$, а через λ – наибольшую из длин диагоналей этих частичных прямоугольников.

Произведенному разбиению $(\overline{P})$ соотнесем два числа A и B.

A – сумма площадей всех тех частичных прямоугольников $(\overline{P}_{ik})$, которые целиком содержатся в (D). (Они не имеют ни одной общей точки с (K)).

B – сумма площадей всех тех частичных прямоугольников $(\overline{P}_{ik})$, которые имеют хотя бы одну общую точку с $(\overline{D})$.

Ясно, что $B = A + Q$, где Q – сумма площадей всех тех частичных прямоугольников $(\overline{P}_{ik})$, которые имеют хотя бы одну общую точку с (K). Следует отметить, что для закрепленного способа разбиения $(\overline{P})$ A и B – определенные числа. Если же способ разбиения $(\overline{P})$ на части изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа A, B.

Определение. Если существуют конечные $\lim\limits_{\lambda\to 0} A$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} B$, не зависящие от способа разбиения области $(\overline{D})$, и если $\lim\limits_{\lambda\to 0} A = \lim\limits_{\lambda\to 0} B$ $(= S)$, то этот общий предел

предел S называют *площадью области* $(\overline{D})$, а саму область $(\overline{D})$ называют *квадрируемой*.

Теорема 1. Для того, чтобы область $(\overline{D})$ была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\lambda\to 0}(B-A)=0 \tag{1}$$

(разности $B-A$ составляют из чисел, отвечающих одному и тому же способу разбиения $(\overline{P})$).

* ▶ I. *Необходимость* условия (1) очевидна. В самом деле, если $(\overline{D})$ квадрируема и S – площадь $(\overline{D})$, то $A\xrightarrow[\lambda\to 0]{}S$ и $B\xrightarrow[\lambda\to 0]{}S$ и поэтому $B-A\xrightarrow[\lambda\to 0]{}0$.

II. Докажем *достаточность* условия (1).

Заметим, прежде всего, что каждая сумма A из $\{A\}$ не больше, чем всякая сумма B из $\{B\}$, даже если они отвечают и разным способам разбиения $(\overline{P})$ на части. Это предложение можно доказать чисто арифметически, на чем мы не останавливаемся. Геометрически это ясно, ибо каждая сумма A из $\{A\}$ есть площадь многоугольника, содержащегося в (D), а всякая сумма B из $\{B\}$ есть площадь многоугольника, содержащего $(\overline{D})$.

Возьмем на множестве $\{B\}$ произвольную сумму B и закрепим ее. Обозначим эту сумму через B_0. Тогда для всякой суммы A из $\{A\}$ будет $A\le B_0$ $\Rightarrow$ множество $\{A\}$ сумм A, отвечающих всевозможным способам разбиения $(\overline{P})$ на части, ограничено сверху. Значит, существует $\sup\{A\}$. Положим $S=\sup\{A\}$. Ясно, что $S\le B_0$ (ибо B_0 – верхняя граница, а S – точная верхняя граница множества $\{A\}$). У нас B_0 – любая из множества $\{B\}$. Следовательно, $S\le B$, для любой $B\in\{B\}$. Так как $S=\sup\{A\}$, то $A\le S$, для любой $A\in\{A\}$. Таким образом, получаем

$$A\le S\le B. \tag{2}$$

В неравенстве (2) A и B могут отвечать различным, а могут отвечать одному и тому же способу разбиения $(\overline{P})$ на части. Считая A и B отвечающими одному и тому же способу разбиения $(\overline{P})$, можем написать из (2):

$$|A-S|\le(B-A),\quad |B-S|\le(B-A).$$

Отсюда и из (1) следует, что $A\xrightarrow[\lambda\to 0]{}S$ и $B\xrightarrow[\lambda\to 0]{}S$. А это и значит, что область $(\overline{D})$ квадрируема. ◀

Замечание. Необходимое и достаточное условие квадрируемости области $(\overline{D})$ может быть записано также в виде

$$\lim_{\lambda\to 0}Q=0. \tag{3}$$

Здесь $Q = B - A$ есть разности сумм B и A, отвечающих одному и тому же способу разбиения $(\overline{P})$ на части (Q есть сумма площадей всех тех частичных прямоугольников, которые имеют хотя бы одну общую точку с контуром (K)).

Определение 2. Кривую (L), замкнутую или нет, называют *простой*, если она разлагается на конечное число частей, каждая из которых выражается хотя бы одним из уравнений вида $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $x = g(y)$, $y \in [c,d]$. При этом предполагают, что $f(x) \in C([a,b])$, а $g(y) \in C([c,d])$.

Теорема 2 (о простой кривой). Пусть (L) – простая кривая, содержащаяся в прямоугольнике $(\overline{P})$. Разобьем $(\overline{P})$ сетью прямых, параллельных координатным осям, на частичные прямоугольники $(\overline{P}_{ik})$ ($i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$). Пусть Q – сумма площадей всех частичных прямоугольников $(\overline{P}_{ik})$, которые имеют с (L) хотя бы одну общую точку. Тогда $\lim\limits_{\lambda \to 0} Q = 0$, т.е. простая кривая имеет нулевую площадь.

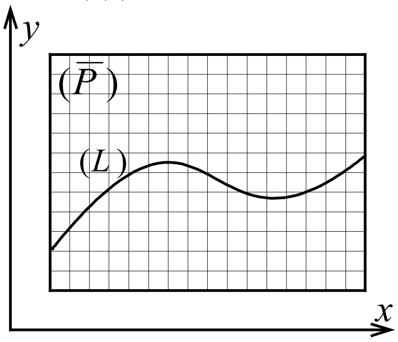

Рис. 3.2. К определению площади простой кривой (теорема 2)

* ▶ Будем считать для определенности, что (L) задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) \in C([a,b])$. Пусть прямые, параллельные оси Oy и входящие в дробящую сеть, есть $x = x_0$, $x = x_1$, … , $x = x_n$, причем $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

У нас $f(x) \in C([a,b])$. Следовательно, любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любого разбиения промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, у которого ранг дробления $\tilde{\lambda} < \delta$, будет $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ сразу для всех $k = \overline{0, n-1}$. Здесь ω_k – колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$. Заметим, что число $\delta > 0$ можно уменьшать в случае надобности. Поэтому можно считать, например, что $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Станем рассматривать разбиение $(\overline{P})$ на части $(\overline{P}_{ik})$, любое, но такое, у которого $\lambda < \delta$ ($\Rightarrow$ и подавно $\tilde{\lambda} < \delta$). Произведем оценку площади тех частичных прямоугольников, которые имеют хотя бы одну общую точку с (L) и которые лежат между прямыми $x = x_k$ и $x = x_{k+1}$.

Если ω_k есть колебание $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$, то сумма высот этих частичных прямоугольников меньше $\omega_k + 2\lambda$. Но $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, ибо $x_{k+1} - x_k \le \widetilde{\lambda} < \lambda < \delta$, $k = \overline{0, n-1}$. Кроме того, $\lambda < \delta < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Значит, сумма высот упомянутых частичных прямоугольников меньше

$$\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

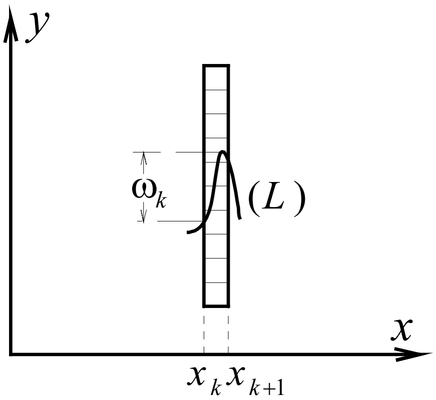

Рис. 3.3. К доказательству теоремы 2

Поэтому сумма их площадей будет меньше, чем $\dfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_{k+1} - x_k)$, следовательно,

$$Q < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Итак, $Q < \varepsilon$. Так как для достижения этого неравенства потребовалось лишь, чтобы было $\lambda < \delta$, то заключаем, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} Q = 0$. ◀

Следствие. Область, ограниченная простым контуром, квадрируема.

2°. Площадь в прямоугольных координатах. Пусть функция $f(x) \in C([a,b])$ и $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, $(a < b)$. Фигура, ограниченная снизу осью *Ox*, сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, а с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

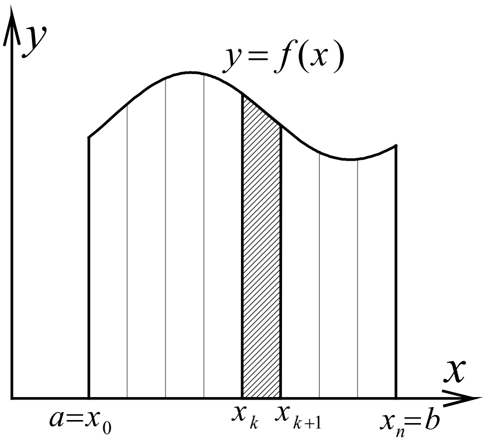

Рис. 3.4. К определению площади криволинейной трапеции

Видим, что контур (K) является простой кривой. Следовательно, криволинейная трапеция квадрируема. Выведем теперь формулу для площади *S* этой криволинейной трапеции.

▶ Для этого:

1) точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ произвольным образом разбиваем промежуток $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$;

2) через точки дробления проводим отрезки прямых параллельно оси *Oy*.

Криволинейная трапеция разобьется при этом на *n* полос (рис. 3.4). Рассмотрим *k*-ю полосу. Ясно, что она имеет площадь. Обозначим эту площадь через S_k.

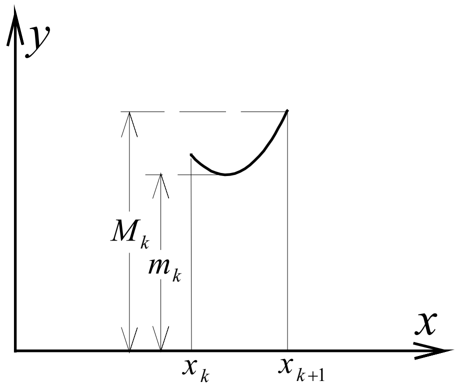

Рис. 3.5. К выводу формулы для площади криволинейной трапеции

У нас $f(x) \in C([a,b]) \Rightarrow f(x) \in C([x_k, x_{k+1}])$ $\Rightarrow$ $f(x)$ достигает на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ своих наименьшего m_k и наибольшего M_k значений (рис. 3.5).

Рассмотрим два прямоугольника. У них общим основанием является отрезок $x_k x_{k+1}$, а высотами являются соответственно m_k и M_k. Ясно, что

$m_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \le S_k \le M_k \cdot (x_{k+1} - x_k), \quad k = \overline{0, n-1}$.

Просуммировав эти неравенства по значку k от 0 до $n-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \le S \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \,. \tag{4}$$

В этом неравенстве суммы $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k$, $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$, являясь нижней и верхней суммами Дарбу соответственно, являются также интегральными суммами Римана для функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$. Так как $f(x) \in C([a,b])$, то $f(x) \in R([a,b]) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Переходя в неравенстве (4) к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx \,. \blacktriangleleft \tag{5}$$

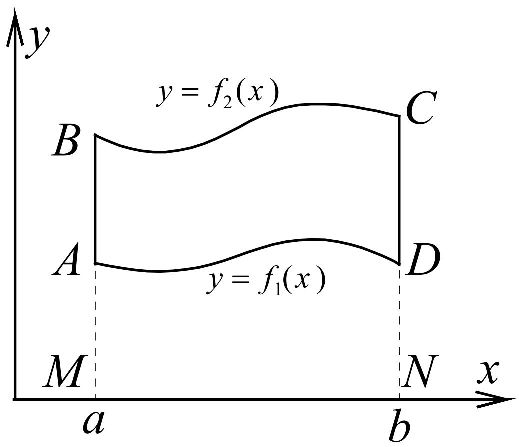

Рис. 3.6. Обобщенная криволинейная трапеция

Площадь обобщенной криволинейной трапеции. Рассмотрим теперь плоскую фигуру, ограниченную снизу графиком функции $y = f_1(x)$, $x \in [a,b]$, сверху графиком функции $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, а с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (рис. 3.6). Предполагается, что $f_1(x) \in C([a,b])$, $f_2(x) \in C([a,b])$ и $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a,b]$. Площадь S у такой фигуры существует, так как контур (K) этой фигуры является простым.

Предположим сначала, что выполнено еще одно условие, а именно, что $f_1(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{MBCN} - S_{MADN} = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_{ABCD} = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx\,. \tag{6}$$

Освободимся теперь от предположения, что $f_1(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. У нас $f_1(x), f_2(x) \in C([a,b])$ $\Rightarrow$ $f_1(x)$, $f_2(x)$ – ограниченные на $[a,b]$ $\Rightarrow$ можно указать число d такое, что будет $f_1(x) + d \geq 0$, $x \in [a,b]$. Положим $\widetilde{f}_1(x) = f_1(x) + d$, $\widetilde{f}_2(x) = f_2(x) + d$. Ясно, что $\widetilde{f}_2(x) \geq \widetilde{f}_1(x)$ и $\widetilde{f}_1(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Имеем

$$S_{ABCD} = S_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}} = \int_a^b \left[\widetilde{f}_2(x) - \widetilde{f}_1(x) \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx\,.$$

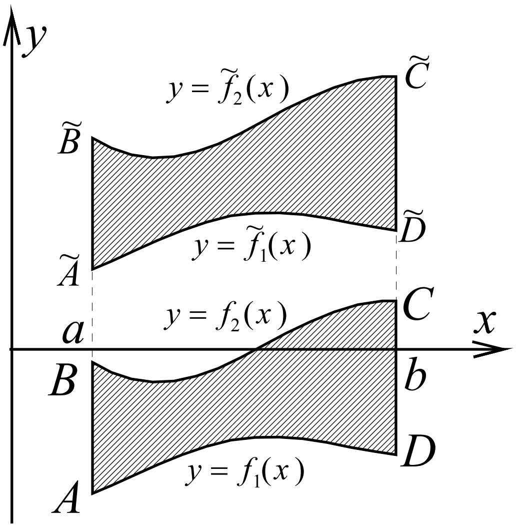

Рис. 3.7. К вычислению площади обобщенной криволинейной трапеции

Замечание. Отрезки прямых $x = a$, $x = b$ (один или оба сразу) могут вырождаться в точку.

Пример 1. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -1$ (рис. 3.8).

▶ Здесь $f_1(x) = x^3$, $x \in [-1,1]$; $f_2(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$. Имеем $f_2(x) \geq f_1(x)$, $x \in [-1,1]$,

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \text{(кв. ед.).} \; ◀$$

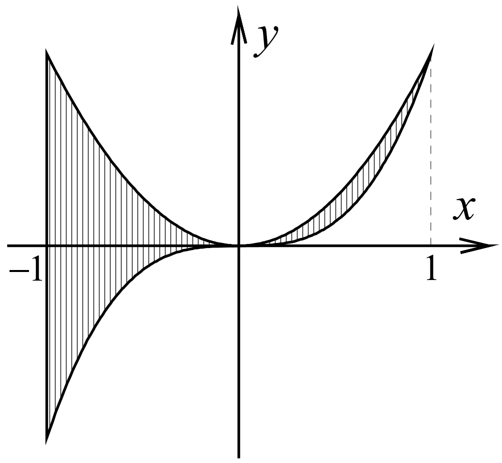

Рис. 3.8. К вычислению площади фигуры в примере 1

Замечание 2. Если плоская фигура ограничена линиями $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = g_1(y)$, $y \in [c,d]$, $x = g_2(y)$, $y \in [c,d]$, причем $g_1(y) \in C([c,d])$, $g_2(y) \in C([c,d])$ и $g_1(y) \leq g_2(y)$, $y \in [c,d]$, то совершенно аналогично для вычисления площади S этой фигуры получают формулу

$$S = \int_c^d \left[g_2(y) - g_1(y) \right] dy\,. \tag{7}$$

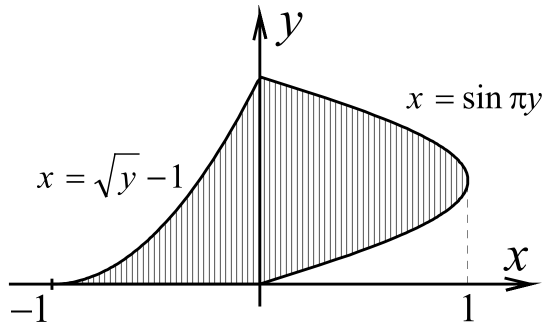

Рис. 3.9. К вычислению площади фигуры в примере 2

Пример 2. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривыми $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \le y \le 1$) (рис. 3.9).

▶ Здесь $g_1(y) = \sqrt{y} - 1$, $g_2(y) = \sin \pi y$, $y \in [0, 1]$.

Имеем $g_1(y) \le g_2(y)$, $y \in [0, 1]$;

$$S = \int_0^1 \left[\sin \pi y - \left(\sqrt{y} - 1\right)\right] dy =$$

$$= \left(-\frac{\cos \pi y}{\pi} - \frac{2}{3} y^{3/2} + y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3} \right) \text{(кв. ед.).} ◀$$

3°. Площадь в полярных координатах. Пусть плоская фигура ограничена линиями, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид

$$\varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta, \quad (\alpha < \beta), \quad r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \ \text{(рис. 3.10).}$$

Предполагается, что $f(\varphi) \in C([\alpha, \beta])$.

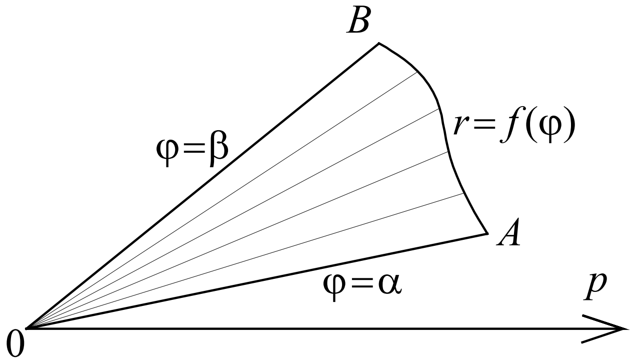

Рис. 3.10. Обобщенный сектор

Выведем формулу для площади S этой фигуры.

▶ Для этого:

1) точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ произвольным образом разбиваем промежуток $[\alpha, \beta]$ на части $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$);

2) проводим лучи $\varphi = \varphi_k$ ($k = \overline{0, n-1}$).

Наша фигура разобьется при этом на n элементарных обобщенных секторов. Рассмотрим k-й обобщенный сектор (рис. 3.11).

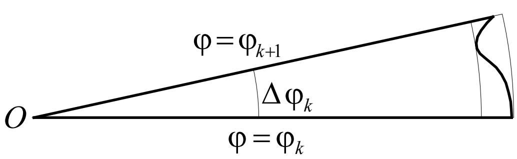

Рис. 3.11. К выводу формулы для площади обобщенного сектора

У нас $f(\varphi) \in C([\alpha, \beta]) \Rightarrow f(\varphi) \in C([\varphi_k, \varphi_{k+1}]) \Rightarrow f(\varphi)$ достигает на промежутке $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ своих наименьшего m_k и наибольшего M_k значений. Проведем две дуги окружностей с центром в точке O и радиусами m_k и M_k соответственно. Если через S_k обозначить площадь k-го обобщенного сектора, то будем иметь $\frac{1}{2} m_k^2 \cdot \Delta\varphi_k \le S_k \le \frac{1}{2} M_k^2 \cdot \Delta\varphi_k$ ($k = \overline{0, n-1}$). Просуммировав все эти неравенства по значку k от 0 до $n-1$, получим, что площадь S всего обобщенного сектора будет удовлетворять неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}m_k^2\cdot\Delta\varphi_k\le S\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}M_k^2\cdot\Delta\varphi_k\,. \qquad (8)$$

Заметим, что суммы $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}m_k^2\cdot\Delta\varphi_k$ и $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}M_k^2\cdot\Delta\varphi_k$, являясь нижней и верхней суммами Дарбу соответственно, являются также интегральными суммами Римана для функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ в промежутке $[\alpha,\beta]$. Так как $f(\varphi)\in C([\alpha,\beta])$, то $\frac{1}{2}f^2(\varphi)\in C([\alpha,\beta])$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}f^2(\varphi)\in R([\alpha,\beta])$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ существует и равен $\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}f^2(\varphi)\,d\varphi$. Переходя в неравенстве (8) к пределу при $\lambda\to 0$, получим

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}f^2(\varphi)\,d\varphi\,. \blacktriangleleft \qquad (9)$$

Замечание 1. Пусть фигура ограничена линиями, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, $r=f_1(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, $r=f_2(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ (рис. 3.12). При этом предполагается, что $f_1(\varphi), f_2(\varphi)\in C([\alpha,\beta])$, $f_1(\varphi)\le f_2(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Обозначим через S площадь фигуры $ABCD$. Будем иметь

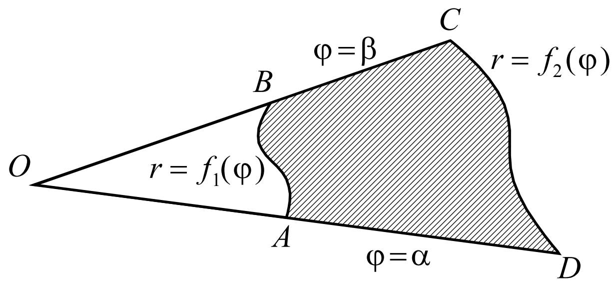

Рис. 3.12. К выводу формулы (10) для площади разности двух обобщенных секторов

$$S=S_{ODC}-S_{OAB}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f_2^2(\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f_1^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[f_2^2(\varphi)-f_1^2(\varphi)\right]d\varphi\,. \qquad (10)$$

Замечание 2. Отрезки лучей $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ (один или оба сразу) могут вырождаться в точку.

Пример 3. Найти площадь части фигуры, ограниченной линией $r=2+\cos 2\varphi$, лежащей вне линии $r=2+\sin\varphi$ (рис. 3.13).

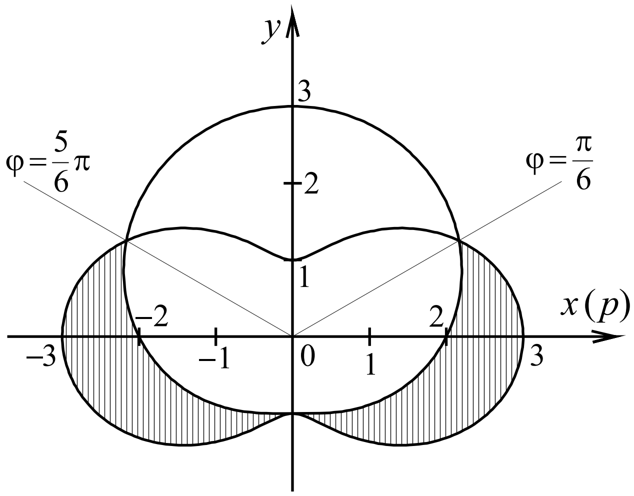

Рис. 3.13. К вычислению площади фигуры в примере 3

▶ Лучи, соответствующие точкам пересечения линий, находим, решая уравнение

$$2+\cos 2\varphi = 2+\sin\varphi \;\Rightarrow\; \varphi_1=\frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_2=\frac{5}{6}\pi,\; \varphi_3=\frac{3}{2}\pi\; \left(\varphi_3=-\frac{\pi}{2}\right).$$

Положим

$$f_1(\varphi)=2+\sin\varphi,\; f_2(\varphi)=2+\cos 2\varphi.$$

Воспользовавшись симметрией фигуры относительно оси Oy, можно рассматривать $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$. Так как $f_1(\varphi)\le f_2(\varphi)$, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$, то

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/6}\left[(2+\cos 2\varphi)^2-(2+\sin\varphi)^2\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/6}\left[4\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}-4\sin\varphi-\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/6}\left(\frac{9}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi-4\sin\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{9}{4}\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi+4\cos\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{51\sqrt{3}}{16}\text{ (кв. ед.).} \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями $r=3+\cos 4\varphi$ и $r=2-\cos 4\varphi$ (рис. 3.14).

▶ Лучи, соответствующие точкам пересечения линий, находим, решая уравнение $3+\cos 4\varphi=2-\cos 4\varphi \;\Rightarrow\; \cos 4\varphi=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi_1=\frac{\pi}{6},\; \varphi_2=\frac{\pi}{3},\; \varphi_3=\frac{2}{3}\pi,$ $\varphi_4=\frac{5}{6}\pi,\; \varphi_5=\frac{7}{6}\pi,\; \varphi_6=\frac{4}{3}\pi,\; \varphi_7=\frac{5}{3}\pi,\; \varphi_8=\frac{11}{6}\pi.$

Для нахождения искомой площади S воспользуемся симметрией фигуры относительно координатных осей и биссектрис координатных углов. Будем иметь $S=8\tilde{S}$, где $\tilde{S}$ – площадь заштрихованной фигуры. Заштрихованная фигура состоит из двух обобщенных секторов. Первый ограничен линиями: $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$,

$r = 2 - \cos 4\varphi$, $\quad \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$. Второй ограничен линиями: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $r = 3 + \cos 4\varphi$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Имеем, следовательно,

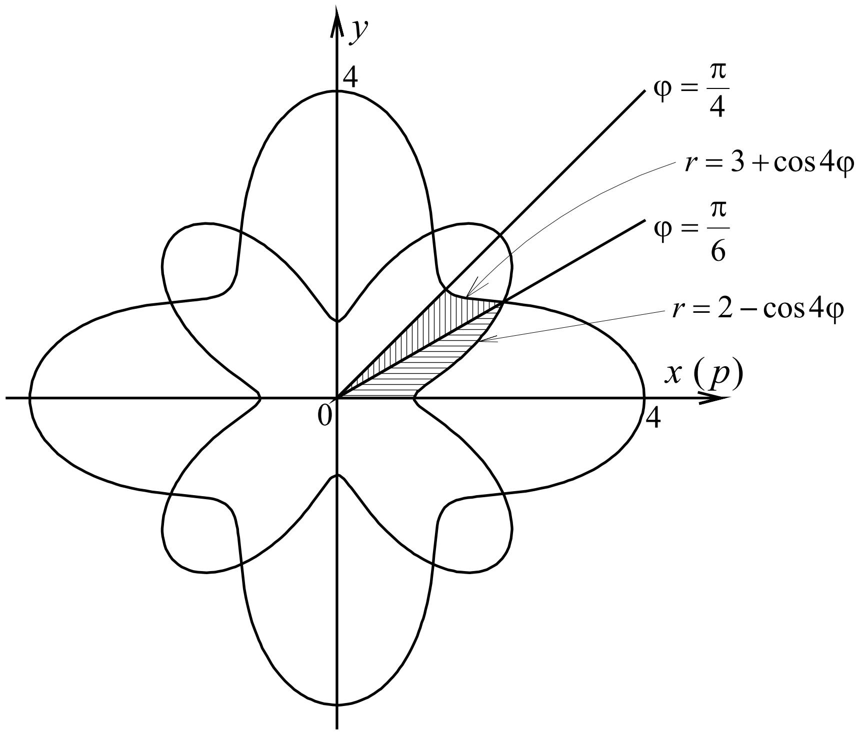

Рис. 3.14. К вычислению площади фигуры в примере 4

$$S = 8\widetilde{S} = 8 \cdot \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/6}(2 - \cos 4\varphi)^2 d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/4}(3 + \cos 4\varphi)^2 d\varphi\right] = \left(\frac{37}{6}\pi - 5\sqrt{3}\right) \text{(кв. ед.).} \blacktriangleleft$$

§2. Вычисление длины кривой

Приступим к выяснению понятия длины кривой линии. Предварительно заметим, что на кривой обычно различают два взаимно противоположных направления, из которых одно считают положительным, другое – отрицательным. Например, в случае параметрического задания кривой считают, что положительное направление отвечает возрастанию параметра, отрицательное – убыванию параметра.

Отметим далее, что если на кривой даны несколько точек, и порядок их следования совпадает с определенным направлением на кривой, то в отношении этих точек говорят, что они следуют друг за другом вдоль кривой.

Итак, пусть имеется кривая $\smile AB$ (точки A и B – концы этой кривой). Возьмем на $\smile AB$ ряд точек, следующих друг за другом вдоль кривой: $M_0 = A$, M_1, … , M_{n-1}, $M_n = B$ (равенства для точек, вроде $M_0 = A$, $M_n = B$, означают попросту, что соответствующие точки совпадают). Соединяя последовательно эти

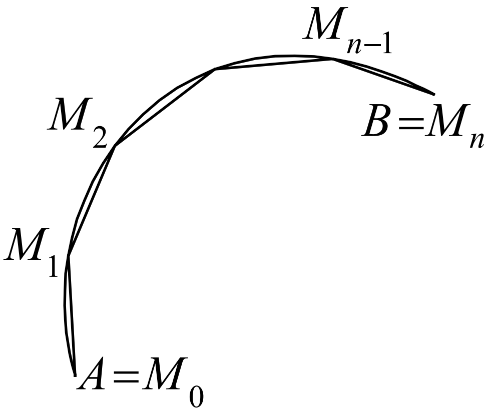

Рис. 3.15. Ломаная, вписанная в дугу кривой

точки прямолинейными отрезками, получим некоторую ломаную линию, вписанную в $\smile AB$ (рис. 3.15). Обозначим через $|M_k M_{k+1}|$ длину k-го звена ломаной. Тогда $l_{\text{лом.}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |M_k M_{k+1}|$ будет длиной всей ломаной.

Заметим, что для закрепленного числа n и для закрепленного способа выбора точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ значение величины $l_{\text{лом.}}$ будет вполне определенным числом. Если же число точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и способы их выбора на $\smile AB$ менять, то будет изменяться, вообще говоря, значение величины $l_{\text{лом.}}$.

Положим $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\, n-1}} |M_k M_{k+1}|$.

Определение. Если существует конечный предел длины вписанной в дугу ломаной

$$l = \lim_{\lambda \to 0} l_{\text{лом.}}, \tag{1}$$

не зависящий от способа выбора вершин ломаной, то этот предел называют *длиной* $\smile AB$, а саму $\smile AB$ называют в этом случае *спрямляемой*.

1°. Длина дуги кривой, заданной параметрически.

Теорема 1. Пусть $\smile AB$ задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (\alpha < \beta).$$

(Считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек; каждая точка на $\smile AB$ получается лишь при одном значении параметра t.) Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют в промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Тогда $\smile AB$ спрямляема, и ее длину следует вычислять по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{2}$$

▶ Впишем в $\smile AB$ ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$ ($M_0 = A$, $M_n = B$), причем сделаем это так: разделим промежуток $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ произвольным образом на части $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$), и возьмем в качестве точек $M_k(x_k, y_k)$ на $\smile AB$ точки, у которых $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$ (рис. 3.16). Длина k-го звена ломаной $|M_k M_{k+1}|$ будет равна

$$|M_k M_{k+1}| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

Но $x_{k+1}-x_k=\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)$, $y_{k+1}-y_k=\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)$. Поэтому

$$|M_k M_{k+1}|=\sqrt{\left(\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)\right)^2+\left(\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)\right)^2}\,.$$

Замечаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ в промежутке $[t_k,t_{k+1}]$ удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, можем написать:

$\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)=\varphi'(\tau_k)\cdot\Delta t_k$, точка $\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]$,

$\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)=\psi'(\theta_k)\cdot\Delta t_k$, точка $\theta_k\in[t_k,t_{k+1}]$.

Тогда $|M_k M_{k+1}|=\sqrt{\left[\varphi'(\tau_k)\right]^2+\left[\psi'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k$, $k=\overline{0,n-1}$. Для длины всей ломаной будем иметь

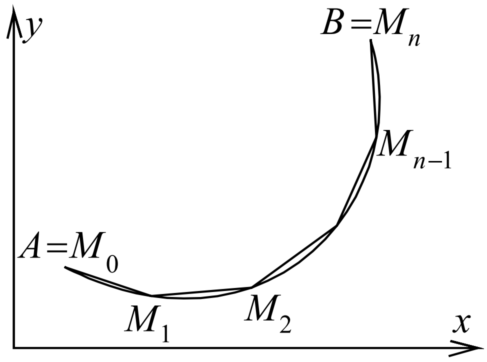

Рис. 3.16. К выводу формулы для длины дуги

$$l_{\text{лом.}}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[\varphi'(\tau_k)\right]^2+\left[\psi'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k\,. \tag{3}$$

Замечаем, что сумма (3) очень похожа на интегральную сумму Римана для интеграла, стоящего в правой части (2), но таковой не является, ибо, вообще говоря, $\theta_k\neq\tau_k$.

Введем в рассмотрение сумму

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[\varphi'(\tau_k)\right]^2+\left[\psi'(\tau_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k\,. \tag{4}$$

Это уже настоящая интегральная сумма Римана для интеграла (2). У нас по условию $\varphi'(t),\psi'(t)\in C([a,b])$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\in C([a,b])$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\in R([a,b])$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\tilde\lambda\to 0}\sigma$ существует и равен $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt$ ($\tilde\lambda=\max\limits_{k=\overline{0,\,n-1}}\{\Delta t_k\}$).

Заметим, что $(\lambda\to 0)$ $\Leftrightarrow$ $(\tilde\lambda\to 0)$ (это доказано, например, в книге Г.М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. I, с. 557).

Рассмотрим очевидное равенство

$$l_{\text{лом.}}=\sigma+(l_{\text{лом.}}-\sigma)\,. \tag{5}$$

Из (5) видно, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\tilde\lambda\to 0}(l_{\text{лом.}}-\sigma)=0\,. \tag{6}$$

Имеем

$$l_{\text{лом.}} - \sigma = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\theta_k)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2}\right)\cdot \Delta t_k .$$

Отсюда

$$\left|l_{\text{лом.}} - \sigma\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\theta_k)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2}\right|\cdot \Delta t_k .$$

Так как $\left|\sqrt{N} - \sqrt{M}\right| \le \sqrt{|N-M|}$, где M и N – любые две неотрицательные величины, то получаем

$$\left|l_{\text{лом.}} - \sigma\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|[\psi'(\theta_k)]^2 - [\psi'(\tau_k)]^2\right|}\cdot \Delta t_k .$$

(Неравенство $\left|\sqrt{N} - \sqrt{M}\right| \le \sqrt{|N-M|}$ доказано ниже. См. (7).)

По условию, $\psi'(t) \in C([a,b]) \Rightarrow [\psi'(t)]^2 \in C([a,b]) \Rightarrow$ по теореме Кантора: любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек t', t'' из $[\alpha,\beta]$ для которых $|t'' - t'| < \delta$, будет $\left|[\psi'(t'')]^2 - [\psi'(t')]^2\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{(\beta-\alpha)^2}$. Возьмем дробление промежутка $[\alpha,\beta]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$ любое, но такое, чтобы было $\tilde{\lambda} < \delta$. Тогда для всех $k = \overline{0, n-1}$: $|\theta_k - \tau_k| \le \tilde{\lambda} < \delta$ и, следовательно, сразу для всех $k = \overline{0, n-1}$: $\left|[\psi'(\theta_k)]^2 - [\psi'(\tau_k)]^2\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{(\beta-\alpha)^2}$. Тогда будем иметь:

$$\left|l_{\text{лом.}} - \sigma\right| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \varepsilon .$$

Неравенство $\left|l_{\text{лом.}} - \sigma\right| < \varepsilon$ получено нами лишь в предположении, что $\tilde{\lambda} < \delta$. Это означает, что $\lim\limits_{\tilde{\lambda}\to 0}(l_{\text{лом.}} - \sigma) = 0$. ◀

Лемма (неравенство для квадратных радикалов). Пусть M и N – любые две неотрицательные величины. Тогда

$$\left|\sqrt{N} - \sqrt{M}\right| \le \sqrt{|N-M|}. \qquad (7)$$

▶ В самом деле, пусть $A = \min\{M, N\}$, $B = \max\{M, N\} \Rightarrow B = A + h$, где $h \ge 0$. Тогда (7) запишется в виде $\sqrt{A+h} - \sqrt{A} \le \sqrt{h} \Leftrightarrow \sqrt{A+h} \le \sqrt{A} + \sqrt{h} \Leftrightarrow A + h \le A + h + 2\sqrt{Ah} \Leftrightarrow 2\sqrt{Ah} \ge 0$. ◀

2°. Длина дуги кривой, заданной явным уравнением.

Теорема 2. Пусть $\smile AB$ задана явным уравнением

$$y = f(x), \quad x \in [a,b], \quad a < b .$$

Пусть функция $f(x)$ имеет в промежутке $[a,b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Тогда $\smile AB$ спрямляема, и ее длину l следует вычислять по формуле

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{8}$$

▶ Представление $\smile AB$ кривой явным уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, может быть рассмотрено как параметрическое:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=f(x), \end{cases} \quad x\in[a,b], \quad a<b$$

(в роли параметра выступает x).

Имеем $x'_x=1$, $y'_x=f'(x)$. Видим, что выполнены условия теоремы 1. Следовательно, $\smile AB$ спрямляема, и ее длину l следует вычислять по формуле $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

3°. Длина дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

Теорема 3. Пусть $\smile AB$ задана уравнением

$$r=f(\varphi), \quad \varphi\in[\alpha,\beta], \quad \alpha<\beta.$$

Пусть функция $f(\varphi)$ имеет в промежутке $[\alpha,\beta]$ непрерывную производную $f'(\varphi)$. Тогда $\smile AB$ спрямляема, и ее длину l следует вычислять по формуле

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[f(\varphi)\right]^2+\left[f'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

▶ Имеет место следующая связь между полярными и декартовыми координатами точки:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Следовательно, параметрические уравнения $\smile AB$ в этом случае будут такими:

$$\begin{cases} x=f(\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y=f(\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi\in[\alpha,\beta], \quad \alpha<\beta$$

(в роли параметра выступает φ).

Имеем

$$\begin{cases} x'_\varphi=f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi=f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi, \end{cases} \Rightarrow \quad [x'_\varphi]^2+[y'_\varphi]^2=\left[f(\varphi)\right]^2+\left[f'(\varphi)\right]^2.$$

Видим, что выполнены условия теоремы 1. Значит, $\smile AB$ спрямляема, и ее длину l следует вычислять по формуле

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[f(\varphi)\right]^2+\left[f'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если $\smile AB$ – пространственная и задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \qquad t\in[\alpha,\beta], \quad \alpha<\beta, \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

и если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют в промежутке $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$, то совершенно аналогично устанавливают, что $\smile AB$ спрямляема и что ее длину l следует вычислять по формуле

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\omega'(t)\right]^2}\,dt.$$

Часто пространственная кривая представляется как линия пересечения двух поверхностей, проектирующих ее на координатные плоскости, т.е. задается системой

$$\begin{cases} y=f(x), \\ z=g(x), \end{cases} \quad x\in[a,b], \quad a<b,$$

причем функции $f(x)$, $g(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке $[a,b]$. (Это представление кривой может быть рассмотрено как своего рода параметрическое, что станет видно сразу, если написать: $x=t$, $y=f(t)$, $z=g(t)$, $t\in[a,b]$ и $a<b$.) В этом случае

$$l=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2+\left[g'(x)\right]^2}\,dx.$$

Пример 1. Вычислить длину одного витка винтовой линии (рис. 3.17)

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \qquad t\in[0,2\pi]. \\ z=bt, \end{cases}$$

$\blacktriangleright$ Имеем $x_t'=-a\sin t$, $y_t'=a\cos t$, $z_t'=b$ $\Rightarrow$ $(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2=a^2+b^2$,

$$l=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \blacktriangleleft$$

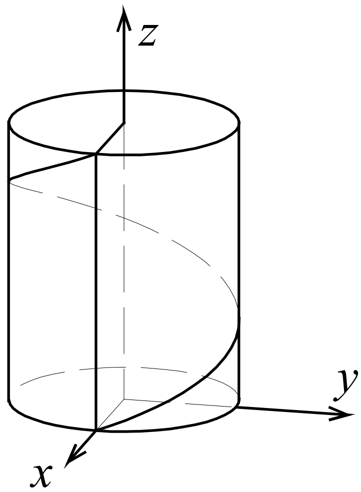

Рис. 3.17. Винтовая линия

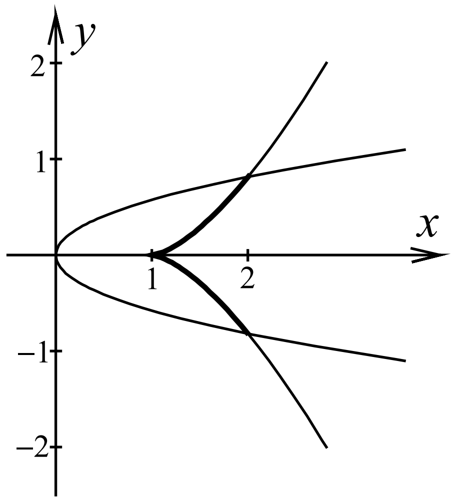

Рис. 3.18. К вычислению длины дуги в примере 2

Пример 2. Вычислить длину полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$ (рис. 3.18).

▶ Найдем абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $\frac{x}{3} = \frac{2}{3}(x-1)^3$ $\Rightarrow$ $x = 2$ – единственный вещественный корень.

Имеем $2yy'_x = 3\cdot\frac{2}{3}(x-1)^2 \quad\Rightarrow\quad y'_x = \frac{(x-1)^2}{y} \quad\Rightarrow\quad (y'_x)^2 = \frac{(x-1)^4}{y^2} \quad\Rightarrow$ $(y'_x)^2 = \frac{(x-1)^4\cdot 3}{2(x-1)^3} = \frac{3}{2}(x-1) \quad\Rightarrow\quad 1+(y'_x)^2 = \frac{3x-1}{2}$. Воспользовавшись симметрией относительно оси Ox, можем написать

$$l = 2\int_1^2 \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{9}(3x-1)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right). ◀$$

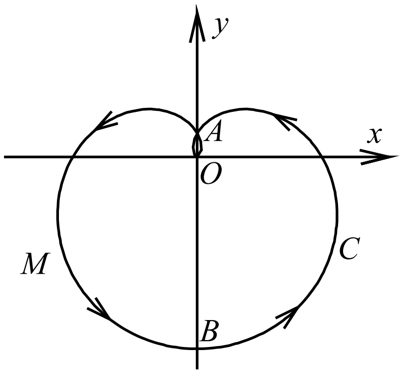

Рис. 3.19. К вычислению длины линии в примере 3

Пример 3. Найти длину линии, заданной уравнением $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (рис. 3.19).

▶ Считая $r \ge 0$, получим, что должно быть: $\sin\frac{\varphi}{3} \ge 0 \;\Rightarrow\; \varphi \in [0, 3\pi]$.

При изменении φ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$ длина радиуса-вектора r возрастает от 0 до a, а конец радиус-вектора описывает дугу $OAMB$. Затем, при изменении φ от $\frac{3}{2}\pi$ до 3π величина r убывает от a до 0;

при этом описывается дуга $BCAO$, симметричная дуге $OAMB$ относительно прямой $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Имеем:

$$r'_\varphi = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3},\quad r^2+(r'_\varphi)^2 = a^2\left(\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)=a^2\sin^4\frac{\varphi}{3},$$

$$\sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}=\frac{a}{2}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right).$$

Следовательно,

$$l=\frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi}=\frac{3a\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

4°. Переменная дуга и ее дифференциал. Пусть $\smile AB$ кривой задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta],\quad \alpha<\beta.$$

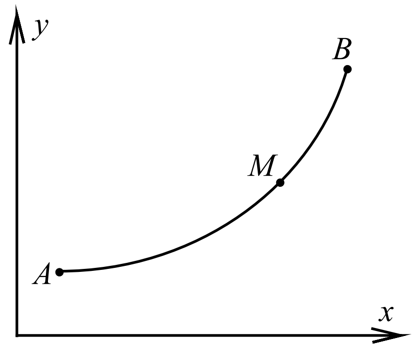

Рис. 3.20. Переменная дуга $\smile AM$

Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ имеют в промежутке $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные x'_t, y'_t.

Возьмем на $\smile AB$ произвольную точку M. Пусть t есть значение параметра, соответствующее положению точки M на $\smile AB$ (рис. 3.20). Тогда длина $\smile AM$ равна $\int\limits_\alpha^t\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$. Ясно, что эта величина представляет собой некоторую функцию от t, определенную в промежутке $[\alpha,\beta]$. Будем обозначать эту функцию через $l(t)$. Таким образом,

$$l(t)=\int_\alpha^t\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt,\quad t\in[\alpha,\beta]. \tag{10}$$

У нас, по условию, $x'_t, y'_t\in C([\alpha,\beta])$ $\Rightarrow$ $\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\in C([\alpha,\beta])$ $\Rightarrow$ для любого $t\in[\alpha,\beta]$ существует $l'(t)$, причем

$$l'(t)=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2} \tag{11}$$

$\Rightarrow$ $l(t)\in C([\alpha,\beta])$, и $l(t)$ – монотонно возрастающая в $[\alpha,\beta]$.

Умножим обе части (11) на dt. Получим

$$l'(t)\cdot dt=\sqrt{(x'_t\cdot dt)^2+(y'_t\cdot dt)^2}\quad\Rightarrow\quad dl(t)=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},\quad t\in[\alpha,\beta].$$

Замечания.

1. Если $\smile AB$ задана явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $a < b$, и если $f'(x) \in C([a,b])$, то для любого $x \in [a,b]$: $l'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ и $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

2. Если $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, и если $r'_\varphi \in C([\alpha,\beta])$, то для любого $\varphi \in [\alpha,\beta]$: $l'(\varphi) = \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}$ и $dl = \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$.

§3. Площадь поверхности вращения

Понятие площади кривой поверхности в общем случае будет дано позднее (при рассмотрении приложений двойного интеграла). Здесь же мы остановимся лишь на случае поверхности вращения.

Пусть в плоскости *Oxy* дана спрямляемая дуга $\smile AB$. Станем вращать эту дугу вокруг оси *Ox*. Мы получим при этом поверхность вращения, о площади *S* которой и пойдет речь.

Возьмем на $\smile AB$ ряд точек, следующих друг за другом вдоль кривой: $A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n = B$. Соединяя последовательно эти точки прямолинейными отрезками, получим ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$, вписанную в $\smile AB$. При вращении этой ломаной также получится некоторая поверхность вращения. Она будет состоять из боковых поверхностей усеченных конусов и, быть может, из боковых поверхностей конусов и цилиндров. Обозначим через $S_{\text{лом.}}$ площадь поверхности, образованной вращением ломаной $M_0 M_1 \ldots M_n$ вокруг оси *Ox* (рис. 3.21).

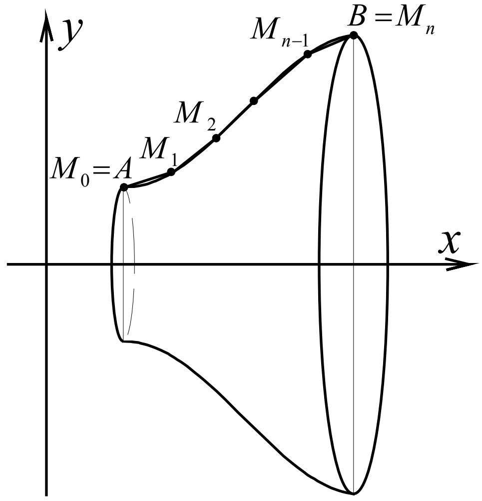

Рис. 3.21. К определению площади поверхности вращения

Отметим, что для закрепленного числа *n* и закрепленного способа выбора точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ значение величины $S_{\text{лом.}}$ будет вполне определенным числом. Если же число точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и способы их выбора на $\smile AB$ менять, то будет изменяться, вообще говоря, значение величины $S_{\text{лом.}}$.

Определение. Если существует конечный предел

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_{\text{лом.}}, \tag{1}$$

не зависящий от способа вписывания ломаной, то этот предел принимают за *площадь поверхности*, получаемой при вращении $\smile AB$ вокруг оси *Ox* (здесь $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\, n-1}} |M_k M_{k+1}|$).

Теорема 1. Пусть $\smile AB$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta .$$

(Считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек.) Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ имеют в $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$. Тогда поверхность, образованная вращением $\smile AB$ вокруг оси *Ox*, имеет площадь *S*, причем

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt . \tag{2}$$

* ▶ Пусть для определенности $\smile AB$ лежит выше оси *Ox*, т.е. $y(t) \geq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$. Впишем в $\smile AB$ ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$ ($M_0 = A$, $M_n = B$), причем сделаем это так: разделим промежуток $[\alpha,\beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ произвольным образом на части $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, и возьмем в качестве точек M_k, $k = \overline{0, n-1}$, точки (x_k, y_k), у которых $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$. Рассмотрим *k*-е звено ломаной. Может реализоваться один из следующих трех случаев (рис. 3.22, 3.23, 3.24).

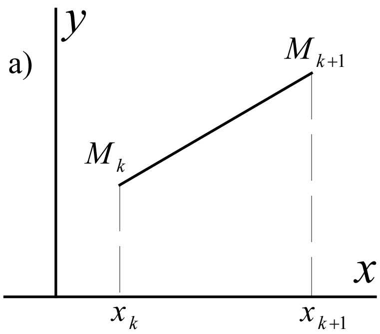

Рис. 3.22

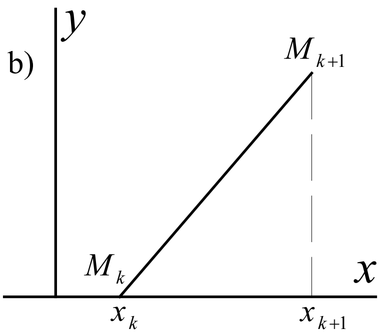

Рис. 3.23

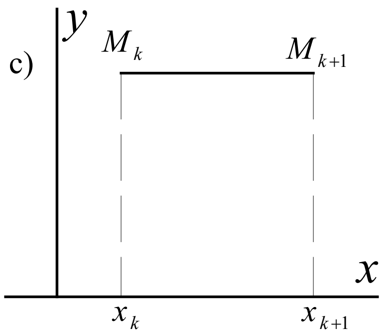

Рис. 3.24

Различные случаи положения звена ломаной относительно оси вращения

Площадь поверхности, образованной вращением звена $M_k M_{k+1}$ вокруг оси *Ox*, будет равна

$$S_k = 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot |M_k M_{k+1}|. \tag{3}$$

Заметим, что выражение (3) остается одним и тем же, независимо от того, какой из трех случаев a), b), или c) реализуется. Имеем

$$|M_k M_{k+1}| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{\left[x(t_{k+1}) - x(t_k)\right]^2 + \left[y(t_{k+1}) - y(t_k)\right]^2} .$$

Замечаем, что функции $x(t)$, $y(t)$ в промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, можно написать

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(\tau_k)\cdot\Delta t_k, \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}],$$
$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(\theta_k)\cdot\Delta t_k, \quad \theta_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Тогда

$$|M_k M_{k+1}| = \sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k,$$
$$S_k = 2\pi\frac{y(t_k) + y(t_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k, \ \ k = \overline{0, n-1}.$$

Для площади $S_{\text{лом.}}$, образованной вращением всей ломаной $M_0 M_1 \ldots M_n$ вокруг оси Ox, будем иметь

$$S_{\text{лом.}} = \pi\sum_{k=0}^{n-1}\left[y(t_k) + y(t_{k+1})\right]\cdot\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение сумму

$$\sigma = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} y(\tau_k)\cdot\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\tau_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k. \qquad (5)$$

Видим, что σ является интегральной суммой Римана для интеграла

$$J = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\cdot\sqrt{\left[x_t'(t)\right]^2 + \left[y_t'(t)\right]^2}\,dt.$$

Из условий теоремы следует, что подынтегральная функция в J есть функция непрерывная на промежутке $[\alpha, \beta]$, следовательно, интеграл J существует. Значит, $\lim\limits_{\tilde\lambda\to 0}\sigma$ существует и равен $2\pi\int\limits_\alpha^\beta y(t)\cdot\sqrt{\left[x_t'(t)\right]^2 + \left[y_t'(t)\right]^2}\,dt$. (Здесь $\tilde\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\,n-1}}\{\Delta t_k\}$. Заметим, что $\lambda \to 0 \ \Leftrightarrow\ \tilde\lambda \to 0$.)

Рассмотрим очевидное равенство

$$S_{\text{лом.}} = \sigma + (S_{\text{лом.}} - \sigma). \qquad (6)$$

Из (6) видим, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\tilde\lambda\to 0}(S_{\text{лом.}} - \sigma) = 0. \qquad (7)$$

Имеем

$$S_{\text{лом.}} - \sigma = \pi\sum_{k=0}^{n-1}\left[y(t_k) + y(t_{k+1})\right]\cdot\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k -$$
$$-\pi\sum_{k=0}^{n-1} 2y(\tau_k)\cdot\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\tau_k)\right]^2}\cdot\Delta t_k =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{n-1} \left[y(t_k) + y(t_{k+1}) - 2y(\tau_k) \right] \cdot \sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2} \cdot \Delta t_k +$$

$$+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} 2y(\tau_k) \cdot \left[\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2} - \sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\tau_k)\right]^2} \right] \cdot \Delta t_k . \qquad (8)$$

Произведем оценку обеих сумм, стоящих в правой части (8). Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое.

1. По условию, $x'_t(t), y'_t(t) \in C([\alpha,\beta]) \Rightarrow x'_t(t), y'_t(t)$ – ограниченные в $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ существует $L > 0$ такое, что $|x'_t(t)| \le L$, $|y'_t(t)| \le L$, для любого $t \in [\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\left[x'_t(t)\right]^2 + \left[y'_t(t)\right]^2} \le L\sqrt{2}$, $t \in [\alpha,\beta]$, $\sqrt{\left[x'_t(\tau_k)\right]^2 + \left[y'_t(\theta_k)\right]^2} \le L\sqrt{2}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда будем иметь

$$\left| \pi \sum_{k=0}^{n-1} \left[y(t_k) + y(t_{k+1}) - 2y(\tau_k) \right] \cdot \sqrt{\left[x'_t(\tau_k)\right]^2 + \left[y'_t(\theta_k)\right]^2} \cdot \Delta t_k \right| \le$$

$$\le \pi L\sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(|y(t_{k+1}) - y(\tau_k)| + |y(t_k) - y(\tau_k)| \right) \cdot \Delta t_k . \qquad (9)$$

По условию $y(t) \in C([\alpha,\beta]) \Rightarrow y(t)$ – равномерно непрерывная на $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_1 > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек t', t'' из $[\alpha,\beta]$, для которых $|t'' - t'| < \delta_1$, будет

$$|y(t'') - y(t')| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2} \cdot \pi L(\beta - \alpha)} . \qquad (10)$$

Если брать дробление промежутка $[\alpha,\beta]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$ любое, но такое, что $\tilde{\lambda} < \delta_1$, то будем иметь сразу для всех $k = \overline{0, n-1}$: $|t_k - \tau_k| \le \tilde{\lambda} < \delta_1$, $|t_{k+1} - \tau_k| \le \tilde{\lambda} < \delta_1$, откуда, принимая во внимание (10), получим:

$$|y(t_k) - y(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2} \cdot \pi L(\beta - \alpha)}; \quad |y(t_{k+1}) - y(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2} \cdot \pi L(\beta - \alpha)} .$$

А значит, из (9)

$$\left| \pi \sum_{k=0}^{n-1} \left[y(t_k) + y(t_{k+1}) - 2y(\tau_k) \right] \cdot \sqrt{\left[x'_t(\tau_k)\right]^2 + \left[y'_t(\theta_k)\right]^2} \cdot \Delta t_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (11)$$

2. По условию $y(t) \in C([\alpha,\beta]) \Rightarrow y(t)$ – ограниченная на $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ существует $\tilde{L} > 0$ такое, что $|y(t)| \le \tilde{L}$, $t \in [\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $|y(\tau_k)| \le \tilde{L}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Имеем

$$\left| \pi \sum_{k=0}^{n-1} 2y(\tau_k) \cdot \left[\sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\theta_k)\right]^2} - \sqrt{\left[x'(\tau_k)\right]^2 + \left[y'(\tau_k)\right]^2} \right] \cdot \Delta t_k \right| \le$$

$$\le 2\pi\widetilde{L}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|\left[y_t'(\theta_k)\right]^2-\left[y_t'(\tau_k)\right]^2\right|}\cdot\Delta t_k$$

(здесь использовано неравенство: $\left|\sqrt{N}-\sqrt{M}\right|\le\sqrt{|N-M|}$, где N и M – любые две неотрицательные величины).

По условию $y_t'(t)\in C([\alpha,\beta]) \Rightarrow \left[y_t'(t)\right]^2\in C([\alpha,\beta]) \Rightarrow$ по теореме Кантора: взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta_2>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек $t',t''\in[\alpha,\beta]$, для которых $|t''-t'|<\delta_2$, будет $\left|\left[y_t'(t'')\right]^2-\left[y_t'(t')\right]^2\right|<\dfrac{\varepsilon^2}{(2\pi\widetilde{L})^2\cdot 4(\beta-\alpha)^2}$.

Возьмем дробление промежутка $[\alpha,\beta]$ на части $[t_k,t_{k+1}]$ любое, но такое, чтобы было $\widetilde{\lambda}<\delta_2$. Тогда для всех $k=\overline{0,n-1}$: $|\theta_k-\tau_k|\le\widetilde{\lambda}<\delta_2$ и, следовательно, сразу для всех $k=\overline{0,n-1}$: $\left|\left[y_t'(\theta_k)\right]^2-\left[y_t'(\tau_k)\right]^2\right|<\dfrac{\varepsilon^2}{(2\pi\widetilde{L})^2\cdot 4(\beta-\alpha)^2}$. Тогда будем иметь

$$2\pi\widetilde{L}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left|\left[y_t'(\theta_k)\right]^2-\left[y_t'(\tau_k)\right]^2\right|}\cdot\Delta t_k<\frac{2\pi\widetilde{L}\cdot\varepsilon\cdot(\beta-\alpha)}{2\pi\widetilde{L}\cdot 2(\beta-\alpha)}=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (12)$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ и возьмем дробление промежутка $[\alpha,\beta]$ на части $[t_k,t_{k+1}]$ любое, но такое, чтобы было $\widetilde{\lambda}<\delta$. Тогда будут выполняться одновременно оба неравенства (11) и (12) и, следовательно,

$$\left|S_{\text{лом.}}-\sigma\right|<\varepsilon.$$

Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\widetilde{\lambda}<\delta$. Значит, $\lim\limits_{\widetilde{\lambda}\to 0}(S_{\text{лом.}}-\sigma)=0$. ◀

Частные случаи.

1°. Теорема 2. Пусть $\smile AB$ кривой задана явным уравнением

$$y=y(x),\quad x\in[a,b],\quad a<b.$$

Пусть функция $y(x)$ имеет в промежутке $[a,b]$ непрерывную производную $y'(x)$. Тогда поверхность, образованная вращением $\smile AB$ вокруг оси Ox, имеет площадь S, причем

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\cdot\sqrt{1+(y_x')^2}\,dx. \qquad (13)$$

▶ Представление $\smile AB$ кривой явным уравнением $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, может быть рассмотрено как параметрическое:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b], \quad a < b.$$

Тогда утверждения, высказанные в этой теореме, сразу вытекают из предыдущей теоремы. ◀

2°. Теорема 3. Пусть $\smile AB$ кривой задана уравнением в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha,\beta], \quad \alpha < \beta.$$

Пусть функция $r(\varphi)$ имеет в $[\alpha,\beta]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$. Тогда поверхность, образованная вращением $\smile AB$ вокруг полярной оси (вокруг оси Ox), имеет площадь S, причем

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\left|\sin\varphi\right| \cdot \sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2 + \left[r'(\varphi)\right]^2}\, d\varphi. \tag{14}$$

▶ Утверждения, высказанные в теореме 3, вытекают из теоремы 1, если принять φ за параметр и вспомнить, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. ◀

3°. Формулы (2), (13), (14) для площади S поверхности вращения могут быть объединены в одну, а именно

$$S = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} \rho\, dl. \tag{15}$$

Здесь ρ есть расстояние от точек $\smile AB$ кривой до оси вращения; dl – дифференциал длины дуги кривой. Символы (A) и (B) показывают, что нужно интегрировать между теми пределами для независимой переменной, которые соответствуют данным точкам кривой A и B.

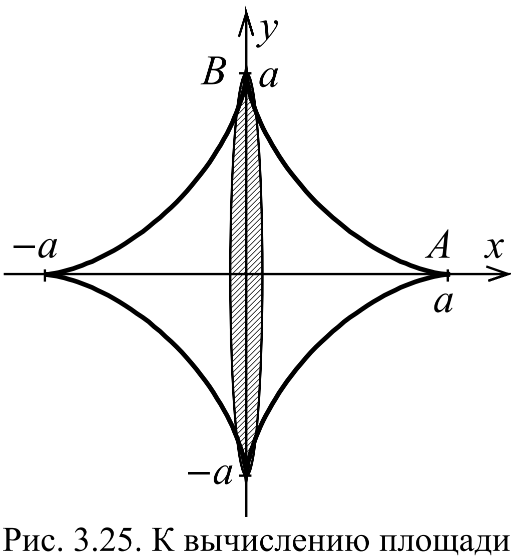

Рис. 3.25. К вычислению площади поверхности вращения в примере 1

Пример 1. Астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ вращается вокруг оси Ox. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.25).

▶ Воспользовавшись симметрией фигуры, достаточно вычислить площадь $\widetilde{S}$ поверхности, образованной вращением $\smile AB$ астроиды вокруг оси Ox.

$\smile AB$ представляется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда:

$$\rho = |y(t)| = \left|a\sin^3 t\right| = a\sin^3 t,$$

так как $\sin t \ge 0$, если $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 3a\sin t\cos t\,dt,$$

так как $\sin t \ge 0$, $\cos t \ge 0$, если $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем

$$\widetilde{S} = 2\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt = 6\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt =$$

$$= \frac{6}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{5}\pi a^2 \text{(кв. ед.)}.$$

Так как $S = 2\widetilde{S}$, то $S = \frac{12}{5}\pi a^2$ (кв. ед.). ◀

Пример 2. Астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ вращается вокруг прямой $y = x$. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.26).

▶ Пусть $\widetilde{S}$ – площадь поверхности, образованной вращением $\smile AB$ астроиды вокруг прямой $y = x$, а $\widetilde{\widetilde{S}}$ – площадь поверхности, образованной вращением $\smile BC$ астроиды вокруг этой прямой. Тогда, приняв во внимание симметрию фигуры, будем иметь $S = 2(\widetilde{S} + \widetilde{\widetilde{S}})$.

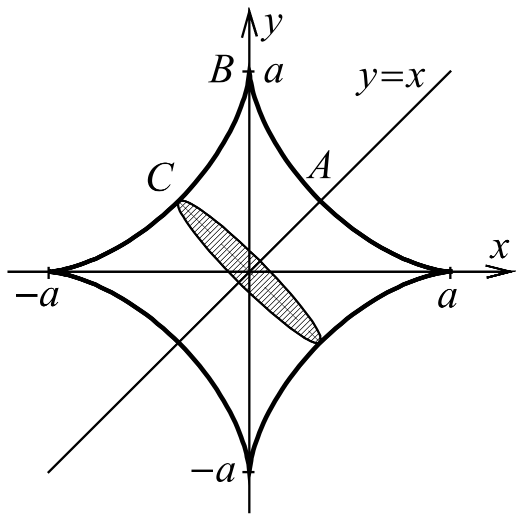

Рис. 3.26. К вычислению площади поверхности вращения в примере 2

Имеем:

$$\smile AB: \quad \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \Rightarrow \quad dl = 3a\sin t\cos t\,dt,$$

$$\smile BC: \quad \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \Rightarrow \quad dl = -3a\sin t\cos t\,dt.$$

Найдем расстояние ρ от точек астроиды $\big(x(t), y(t)\big)$ до прямой $y = x$ (до прямой $y - x = 0$). Имеем

$$\rho = \frac{|x(t) - y(t)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|a\cos^3 t - a\sin^3 t\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin^3 t - \cos^3 t),$$

так как для $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$: $\sin^3 t - \cos^3 t \geq 0$. Следовательно,

$$\tilde{S} = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t - \cos^3 t) \cdot 3a \sin t \cos t \, dt = 3\sqrt{2}\pi a^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^4 t \cos t - \sin t \cos^4 t) \, dt =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{5} \pi a^2 (\sin^5 t + \cos^5 t) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \pi a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ (кв. ед.)},$$

$$\tilde{\tilde{S}} = 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t - \cos^3 t) \cdot (-3a \sin t \cos t) \, dt =$$

$$= 3\sqrt{2}\pi a^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin t \cos^4 t - \sin^4 t \cos t) \, dt =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{5} \pi a^2 (-\sin^5 t - \cos^5 t) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \pi a^2 \text{ (кв. ед.)},$$

$$\tilde{S} + \tilde{\tilde{S}} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \pi a^2 \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ (кв. ед.)};$$

$$S = 2(\tilde{S} + \tilde{\tilde{S}}) = \frac{3}{5} \pi a^2 \left(4\sqrt{2} - 1\right) \text{(кв. ед.)}. ◀$$

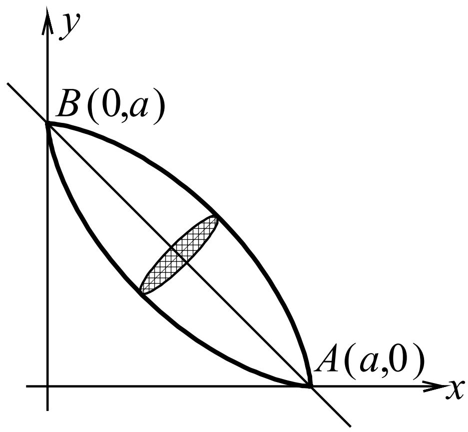

Рис. 3.27. К вычислению площади поверхности вращения в примере 3

Пример 3. Дуга астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ лежащая в первой четверти, вращается около своей хорды (рис. 3.27). Найти площадь S поверхности вращения.

▶ Уравнение хорды, стягивающей $\smile AB$ астроиды, будет таким: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y - a = 0$.

$$\smile AB\colon \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \Rightarrow \quad dl = 3a \sin t \cos t \, dt.$$

Найдем расстояние ρ от точек астроиды $\big(x(t), y(t)\big)$ до прямой $x + y - a = 0$. Имеем

$$\rho = \frac{|x(t) + y(t) - a|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| a\cos^3 t + a\sin^3 t - a \right| = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 - \cos^3 t - \sin^3 t),$$

так как $1 - \cos^3 t - \sin^3 t \geq 0$ для $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{a}{\sqrt{2}}(1-\cos^3 t - \sin^3 t)\cdot 3a \sin t \cos t \, dt =$$

$$= 3\sqrt{2}\cdot \pi a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin t \cos t - \cos^4 t \sin t - \sin^4 t \cos t)\, dt =$$

$$= 3\sqrt{2}\cdot \pi a^2 \left(\frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{5}\sin^5 t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}\pi a^2 \text{ (кв. ед.).} \blacktriangleleft$$

Пример 4. Лемниската $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.28).

$\blacktriangleright$ Принимая во внимание симметрию фигуры, достаточно вычислить площадь поверхности, образованной вращением $\smile AB$ лемнискаты вокруг оси $\varphi = 0$. $\smile AB$ представляется уравнением $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Здесь $\rho = y = r\sin\varphi \;\Rightarrow\; \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot \sin\varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$dl = \sqrt{r^2(\varphi) + [r'_\varphi]^2}\, d\varphi = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\cdot d\varphi = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Поэтому

$$\widetilde{S} = 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot \sin\varphi \cdot \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -2\pi a^2 \cos\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ (кв. ед.).}$$

Тогда $S = 2\widetilde{S} = 2\pi a^2 \left(2 - \sqrt{2}\right)$ (кв. ед.). $\blacktriangleleft$

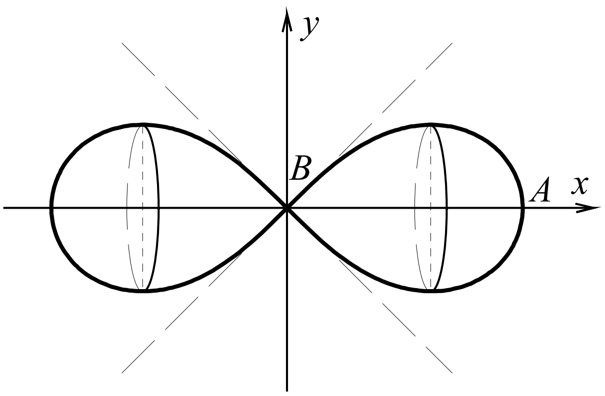

Рис. 3.28. К вычислению площади поверхности в примере 4

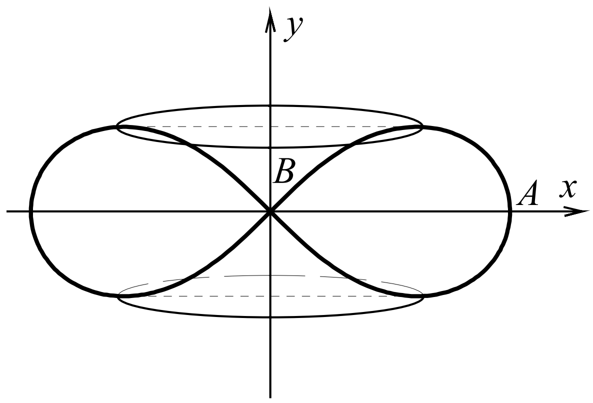

Рис. 3.29. К вычислению площади поверхности вращения в примере 5

Пример 5. Лемниската $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вращается вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.29).

▶ И здесь, воспользовавшись симметрией фигуры, достаточно найти площадь $\widetilde{S}$ поверхности, образованной вращением $\smile AB$ лемнискаты вокруг оси $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ (вокруг оси Oy). $\smile AB$ представляется уравнением $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. В этом случае $\rho=x=r\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi$, $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;

$$dl=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Поэтому

$$\widetilde{S}=2\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=2\pi a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\sqrt{2}\cdot\pi a^2\,(\text{кв. ед.}).$$ ◀

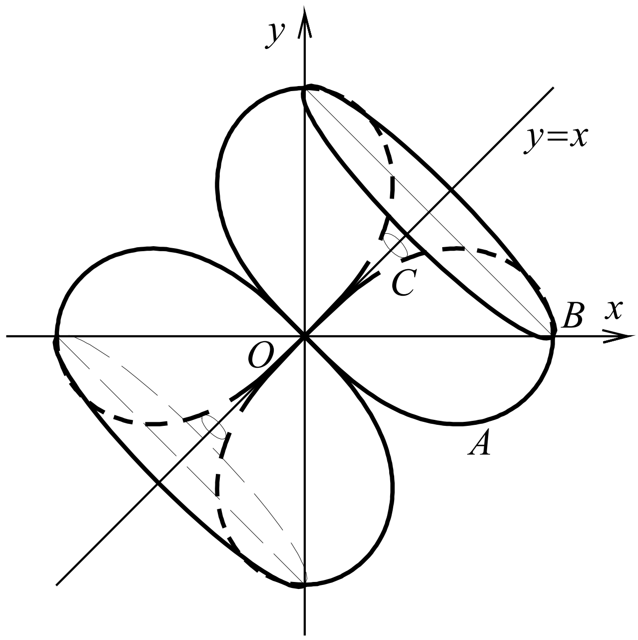

Рис. 3.30. К вычислению площади поверхности вращения в примере 6

Пример 6. Лемниската $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вращается вокруг оси $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.30).

▶ Найдем площадь $\widetilde{S}$ поверхности, образованной вращением вокруг прямой $y=x$ (прямой $x-y=0$) лепестка $OABCO$ лемнискаты. Ясно, что $S=2\widetilde{S}$ (в силу симметрии). Лепесток $OABCO$ определяется уравнением $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$dl=\sqrt{r^2(\varphi)+[r'_\varphi]^2}\cdot d\varphi=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right.$$

.

Найдем расстояние ρ от точек $\big(x(\varphi),y(\varphi)\big)$ лемнискаты до прямой $x-y=0$. Имеем

$$\rho=\frac{\left|a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi-a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\right|}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{2}}\cdot\left|\cos\varphi-\sin\varphi\right|=$$

$$=\frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{2}}\cdot(\cos\varphi-\sin\varphi),$$

так как $\cos\varphi-\sin\varphi\ge 0$, $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. Следовательно,

$$\widetilde{S} = 2\pi \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{2}} (\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \sqrt{2} \cdot \pi a^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi a^2 (\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Значит, $S = 2\widetilde{S} = 4\pi a^2$ (кв. ед.). ◄

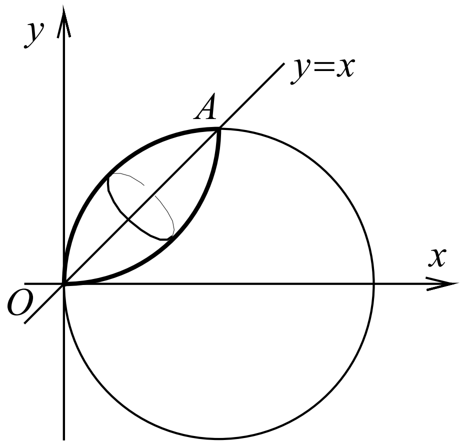

Рис. 3.31. К вычислению площади поверхности вращения в примере 7

Пример *7*. Дуга окружности $x^2 + y^2 = 2x$ (меньшая π), отсекаемая прямой $y = x$, вращается вокруг этой прямой. Найти площадь S поверхности вращения (рис. 3.31).

► $\smile OA$ представляется уравнением $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in [0, 1]$. Из соотношения $x^2 + y^2 = 2x$ находим $2x + 2yy'_x = 2$ $\Rightarrow$ $y'_x = \dfrac{1-x}{y}$ $\Rightarrow$ $1 + (y'_x)^2 = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2x - x^2}$,

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad x \in [0, 1].$$

Найдем расстояние ρ от точек $\left(x, y(x)\right)$ $\smile OA$ до прямой $y = x$ (до прямой $x - y = 0$). Имеем

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} |x - y(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| x - \sqrt{2x - x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2x - x^2} - x \right),$$

так как для $x \in [0, 1]$: $\sqrt{2x - x^2} - x \ge 0$. Следовательно,

$$S = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2x - x^2} - x \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \sqrt{2} \cdot \pi \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} \right) dx =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \left(x + \sqrt{2x - x^2} - \arcsin(x - 1) \right) \Bigg|_0^1 = \sqrt{2} \cdot \pi \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \text{ (кв. ед.)}. ◄$$

§ 4. Вычисление объемов тел

1°. Понятие объема тела вводят совершенно аналогично тому, как было введено понятие площади плоской фигуры.

Пусть $(\overline{T})$ – некоторое пространственное тело, ограниченное поверхностью $(\widetilde{S})$. Заключим $(\overline{T})$ в прямоугольный параллелепипед $(\overline{P})$, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 3.32).

Пусть

$$(\overline{P}) = \begin{cases} a \le x \le b, \\ c \le y \le d, \\ e \le z \le h. \end{cases}$$

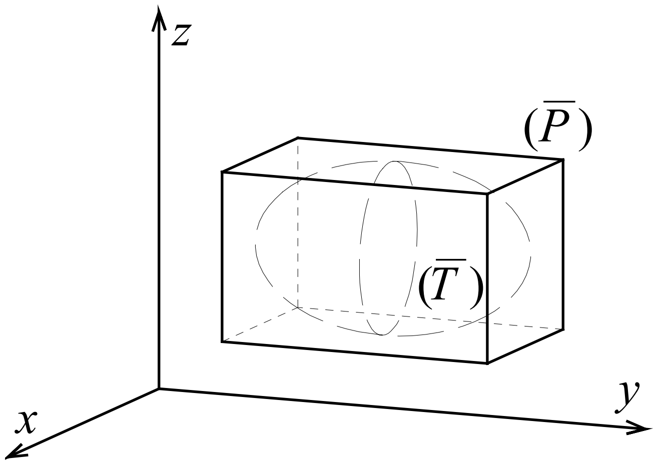

Рис. 3.32. К определению объема тела

Произвольной сетью плоскостей, параллельных координатным плоскостям, разобьем $(\overline{P})$ на частичные параллелепипеды $(\overline{P}_{ijk})$ $(i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, l})$. Обозначим через λ_{ijk} длину диагонали частичного параллелепипеда $(\overline{P}_{ijk})$, а через λ – наибольшую из длин диагоналей этих частичных параллелепипедов $(\lambda = \max\limits_{i,j,k}\{\lambda_{ijk}\})$. Произведенному разбиению $(\overline{P})$ соотносим два числа A и B:

A – сумма объемов всех тех частичных параллелепипедов $(\overline{P}_{ijk})$, которые целиком содержатся в (T) (они не имеют ни одной общей точки с поверхностью $(\widetilde{S})$, ограничивающей (T));

B – сумма объемов всех тех частичных параллелепипедов $(\overline{P}_{ijk})$, которые имеют хотя бы одну общую точку с $(\overline{T})$.

Ясно, что $B = A + Q$, где Q – сумма объемов всех тех частичных параллелепипедов $(\overline{P}_{ijk})$, которые имеют хотя бы одну общую точку с поверхностью $(\widetilde{S})$. Заметим, что для закрепленного способа разбиения $(\overline{P})$ на части $(\overline{P}_{ijk})$ A и B – определенные числа. Если же способ разбиения $(\overline{P})$ на части $(\overline{P}_{ijk})$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа A, B.

Определение 1. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{\lambda\to 0} A$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} B$, не зависящие от способа разбиения тела $(\overline{T})$, и если $\lim\limits_{\lambda\to 0} A = \lim\limits_{\lambda\to 0} B \ (=V)$, то этот общий предел V называют *объемом тела* $(\overline{T})$, а само тело $(\overline{T})$ называют *кубируемым*.

Теорема 1. Для того, чтобы тело $(\overline{T})$ было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{\lambda\to 0}(B - A) = 0 \quad (\lim_{\lambda\to 0} Q = 0). \tag{1}$$

Разности $Q = B - A$ составляются каждый раз из чисел A и B, отвечающих одному и тому же способу разбиения $(\overline{P})$ на части $(\overline{P}_{ijk})$.

Доказательство теоремы 1 совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы в теории площадей (см. §1).

Определение 2. Поверхность $(\widetilde{S})$, замкнутую или нет, называют *простой*, если она разложима на конечное число частей, каждая из которых выражается хотя бы одним из уравнений вида:

1) $z = f(x, y)$;
2) $x = g(y, z)$;
3) $y = h(x, z)$.

При этом предполагается, что функции $f(x, y)$, $g(y, z)$, $h(x, z)$ непрерывны в соответствующих областях.

Теорема 2 (о простой поверхности). Пусть $(\widetilde{S})$ – простая поверхность, содержащаяся в параллелепипеде $(\overline{P})$ (рис. 3.33). Произвольной сетью плоскостей, параллельных координатным плоскостям, разобьем $(\overline{P})$ на частичные параллелепипеды $(\overline{P}_{ijk})$. Пусть Q – сумма объемов всех тех частичных параллелепипедов $(\overline{P}_{ijk})$, которые имеют хотя бы одну общую точку с $(\widetilde{S})$. Тогда $\lim\limits_{\lambda\to 0} Q = 0$.

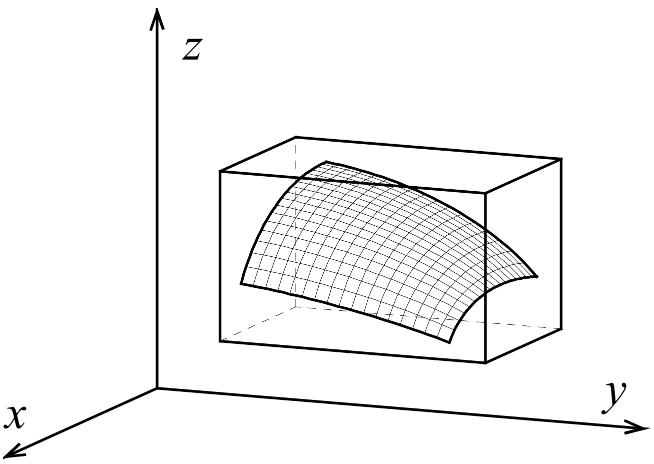

Рис. 3.33. К формулировке теоремы 2

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы о простой кривой (см. §1).

Следствие из теоремы 2. Тело $(\overline{T})$, ограниченное простой поверхностью $(\widetilde{S})$, кубируемо.

2°. Объем тела вращения в прямоугольных координатах. Пусть $\smile AB$ кривой задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $a < b$. Пусть $f(x) \in C([a,b])$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную снизу осью Ox, сверху – графиком функции $y = f(x)$, а с боков – отрезками прямых $x = a$, $x = b$. Станем вращать эту криволинейную трапецию вокруг оси Ox. Получим тело вращения $(\overline{T})$. Поверхность $(\widetilde{S})$, ограничивающая тело $(\overline{T})$, состоит из частей, определяемых уравнениями:

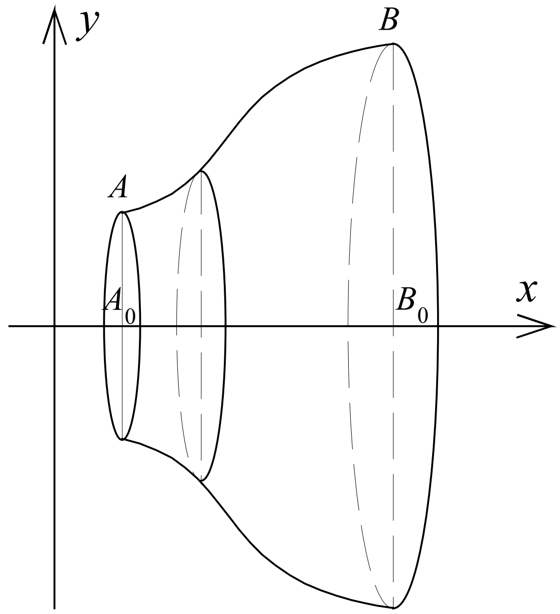

Рис. 3.34. К вычислению объема тела вращения

1) $x = a$; 2) $x = b$; 3)

$$z = \pm\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}.$$

Заметим, что $z(x,y) \in C(\overline{D}_{xy})$, где $(\overline{D}_{xy}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ -f(x) \leq y \leq f(x). \end{cases}$ Видим, что $(\widetilde{S})$ – простая поверхность $\Rightarrow$ тело $(\overline{T})$ имеет объем.

Выведем формулу для объема V тела $(\overline{T})$. Для этого:

1) точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ произвольным образом разбиваем промежуток $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$);

2) на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ как на основании строим два прямоугольника с высотами m_k и M_k, где m_k – наименьшее, а M_k – наибольшее значение функции $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ (m_k и M_k существуют, так как $f(x) \in C([x_k, x_{k+1}])$).

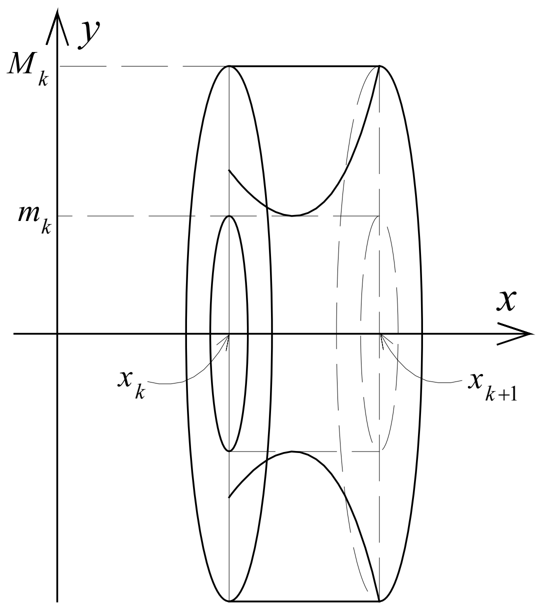

Рис. 3.35. К вычислению объема тела вращения

Получим две ступенчатых фигуры. Одна из них, образованная прямоугольниками с основаниями $\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}$ и с высотами, соответственно, $M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{n-1}$, содержит в себе криволинейную трапецию A_0ABB_0. Другая, образованная прямоугольниками с основаниями $\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}$ и высотами, соответственно, $m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{n-1}$, полностью содержится в криволинейной трапеции A_0ABB_0.

При вращении вокруг оси Ox эти ступенчатые фигуры образуют два ступенчатых тела. Ясно, что тело $(\overline{T})$ будет содержаться целиком в одном из ступенчатых тел и содержать внутри себя другое ступенчатое тело.

Ступенчатое тело, содержащее в себе тело $(\overline{T})$, состоит из цилиндров с высотами $\Delta x_0,\ \Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}$ и радиусами оснований $M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{n-1}$, а ступенчатое тело, содержащееся в $(\overline{T})$, состоит из цилиндров с высотами $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ и радиусами оснований $m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{n-1}$ соответственно.

Объем ступенчатого тела, содержащего в себе тело $(\overline{T})$, равен

$$\pi M_0^2 \cdot \Delta x_0 + \pi M_1^2 \cdot \Delta x_1 + \ldots + \pi M_{n-1}^2 \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2 \cdot \Delta x_k .$$

Объем ступенчатого тела, содержащегося в $(\overline{T})$, равен

$$\pi m_0^2 \cdot \Delta x_0 + \pi m_1^2 \cdot \Delta x_1 + \ldots + \pi m_{n-1}^2 \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2 \cdot \Delta x_k .$$

Для объема V тела $(\overline{T})$ будет справедливо неравенство

$$\pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta x_k \le V \le \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot \Delta x_k . \qquad (2)$$

Замечаем, что обе суммы в неравенстве (2), являясь нижней и верхней суммами Дарбу соответственно, являются также интегральными суммами Римана для функции $\pi \cdot f^2(x)$ в промежутке $[a,b]$. Так как $f(x) \in C([a,b])$, то и $\pi \cdot f^2(x) \in C([a,b]) \quad \Rightarrow \quad \pi \cdot f^2(x) \in R([a,b]) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ существует и равен

$\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. (Здесь $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,\,n-1}}\{\Delta x_k\}$.) Переходя в неравенстве (2) к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx. \tag{3}$$

Замечание. В формуле (3) $S = \pi f^2(x)$ есть площадь поперечного сечения тела $(\overline{T})$ плоскостью, перпендикулярной к оси *Ox*. Поэтому (3) может быть записана в виде

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{4}$$

В пункте 3° будет показано, что формула (4) оказывается верной и для объема *V* тела $(\overline{T})$, которое не является телом вращения вокруг оси *Ox*, но кубируемо. Правда, тело $(\overline{T})$ должно быть еще таким, что известны площади $S(x)$ его поперечных сечений плоскостями, перпендикулярными к оси *Ox*, причем $S(x) \in C([a,b])$.

3°. Объем тела с известными площадями поперечных сечений. Рассмотрим кубируемое тело $(\overline{T})$, располагающееся вдоль оси *Ox* между плоскостями $x = a$ и $x = b$. Рассмотрим сечение этого тела плоскостью $x = \text{const}$, где *x* – любое из $[a,b]$. Площадь сечения *S* является функцией от *x*, определенной на промежутке $[a,b]$. $S(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a,b]$ (рис. 3.36).

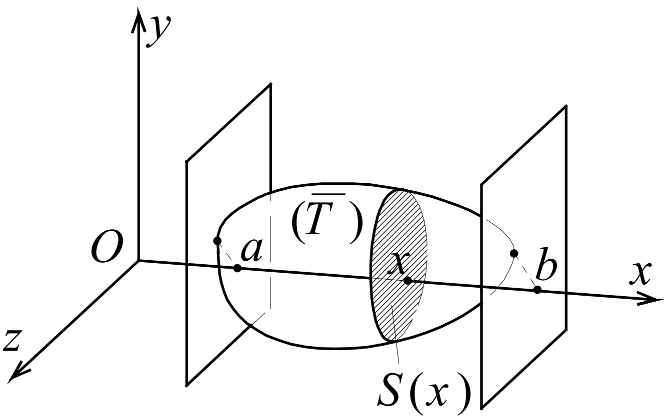

Рис. 3.36. Тело $(\overline{T})$ с известными площадями поперечных сечений

Теорема 3. Объем кубируемого тела с известными площадями сечений $S(x)$ плоскостями, перпендикулярными оси *Ox*, выражается формулой

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{5}$$

▶ Основываясь на определении объема тела $(\overline{T})$, разобьем параллелепипед $(\overline{P})$, содержащий внутри себя тело $(\overline{T})$, сетью плоскостей, параллельных координатным плоскостям, на частичные параллелепипеды. Составим из них ступенчатые тела $(\overline{A})$ с объемом A и $(\overline{B})$ с объемом B такие, что тело $(\overline{A})$ целиком содержится в (T), а тело $(\overline{B})$ целиком содержит тело $(\overline{T})$ внутри себя. Вследствие кубируемости тела разбиение можно сделать настолько мелким, чтобы выполнялось неравенство $B - A < \varepsilon$, где ε – произвольно малое положительное число. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – площади поперечных сечений плоскостью $x = \text{const}$ тел $(\overline{A})$ и $(\overline{B})$ соответственно. Это кусочно-постоянные функции. Для ступенчатых тел $(\overline{A})$ и $(\overline{B})$ формула (5) справедлива, т.е.

$$A = \int_a^b \alpha(x)\,dx; \qquad B = \int_a^b \beta(x)\,dx.$$

Так как эти интегралы сводятся к суммам объемов слоев, составляющих ступенчатые тела и лежащих между плоскостями разбиения, перпендикулярными оси *Ox*. Далее, очевидно, что выполняются неравенства для площадей

$$\alpha(x) \le S(x) \le \beta(x).$$

Интегрируем их по промежутку $[a,b]$. Получаем

$$\int_a^b \alpha(x)\,dx \le \int_a^b S(x)\,dx \le \int_a^b \beta(x)\,dx.$$

Запишем эти неравенства в виде

$$A \le \int_a^b S(x)\,dx \le B. \qquad (*)$$

Кроме того, по смыслу построения тел $(\overline{A})$ и $(\overline{B})$ имеем неравенство

$$B \ge V \ge A. \qquad (**)$$

Вычитаем из неравенств (*) неравенства (**) почленно:

$$A - B \le \int_a^b S(x)\,dx - V \le B - A.$$

Отсюда

$$-\varepsilon \le \int_a^b S(x)\,dx - V \le \varepsilon.$$

Так как разность $\int_a^b S(x)\,dx - V$ есть число постоянное, а ε произвольно мало, то эта разность равна нулю, т.е.

$$\int_a^b S(x)\,dx - V = 0.$$

Отсюда следует доказываемая формула (5). ◀

Пример 1. Объем трехосного эллипсоида, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

▶ Вдоль оси Ox эллипсоид располагается между плоскостями $x=-a$ и $x=a$. Уравнение эллипсоида перепишем в виде $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ $\Rightarrow$ если $|x|<a$, то

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-x^2/a^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-x^2/a^2}\right)^2}=1.$$

Из этого уравнения видим, что в сечении эллипсоида плоскостью $x=\text{const}$ ($|x|<a$) получается эллипс с полуосями $b\sqrt{1-x^2/a^2}$ и $c\sqrt{1-x^2/a^2}$. Площадь эллипса равна числу π, умноженному на произведение полуосей:

$$S(x)=\pi\left(b\sqrt{1-x^2/a^2}\right)\left(c\sqrt{1-x^2/a^2}\right)=\pi bc\left(1-x^2/a^2\right).$$

Тогда по формуле (5) находим

$$V=\int_{-a}^{a} S(x)\,dx = 2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi abc \text{ (куб. ед.).}$$ ◀

* ***Пример 2***. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=ax$; $x+z=0$; $x-z=0$.

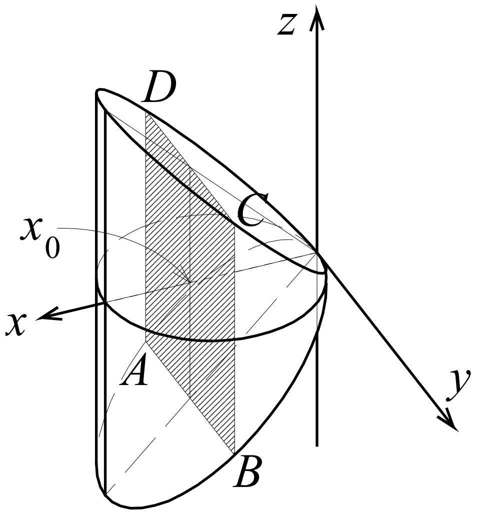

Рис. 3.37. К вычислению объема тела в примере 2

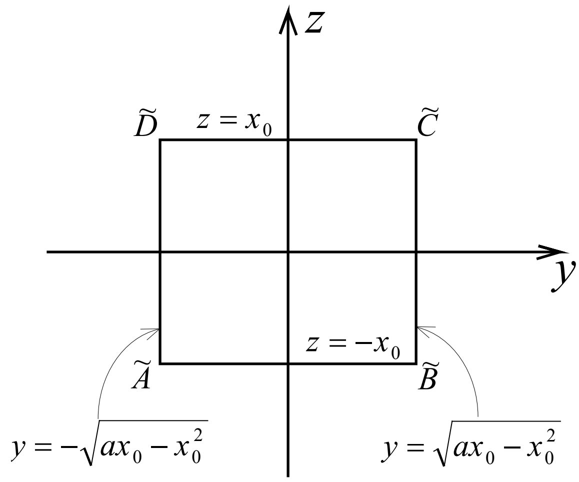

Рис. 3.38. Сечение тела в примере 2

▶ Отмечаем, прежде всего, что тело $(\overline{T})$ ограничено простой поверхностью, а следовательно, оно имеет объем *V*. Пересечем тело $(\overline{T})$ любой плоскостью $x = x_0$, где x_0 – любое, принадлежащее $(0, a)$. В сечении получим прямоугольник *ABCD* (рис. 3.38), проекция которого на плоскость *Oyz* ограничена линиями: $z = -x_0$; $z = x_0$; $y = -\sqrt{ax_0 - x_0^2}$; $y = \sqrt{ax_0 - x_0^2}$. Имеем

$$|AD| = |\tilde{A}\tilde{D}| = 2x_0, \qquad |AB| = |\tilde{A}\tilde{B}| = 2\sqrt{ax_0 - x_0^2}.$$

Значит, площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси *Ox*, будет равна

$$S(x_0) = 4x_0 \cdot \sqrt{ax_0 - x_0^2}, \quad x_0 \in (0, a).$$

Тогда объем *V* тела $(\overline{T})$ будет равен

$$V = \int_0^a S(x_0)\,dx_0 = 4\int_0^a x_0 \cdot \sqrt{ax_0 - x_0^2} \cdot dx_0 =$$

$$= 4\left[\left(-\frac{a^2}{8} - \frac{a}{12}x_0 + \frac{1}{3}x_0^2\right)\sqrt{ax_0 - x_0^2}\,\Bigg|_{x_0=0}^{x_0=a} + \frac{a^3}{16}\int_0^a \frac{dx_0}{\sqrt{ax_0 - x_0^2}}\right] =$$

$$= \frac{a^3}{4}\int_0^a \frac{d(x_0 - a/2)}{\sqrt{(a/2)^2 - (x_0 - a/2)^2}} = \frac{a^3}{4}\arcsin\frac{2x_0 - a}{a}\Bigg|_{x_0=0}^{x_0=a} = \frac{a^3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi a^3}{4}\text{(куб. ед.)}. \blacktriangleleft$$

* ***Пример 3***. Найти объем тела $(\overline{T})$, ограниченного поверхностями $z^2 = a(a - x - y)$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ $(a > 0)$ (рис. 3.39).

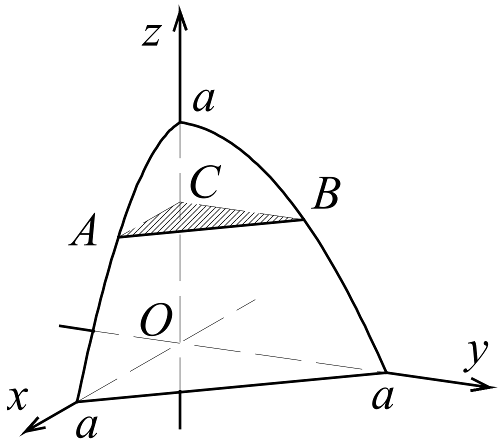

Рис. 3.39. К вычислению объема тела в примере 3

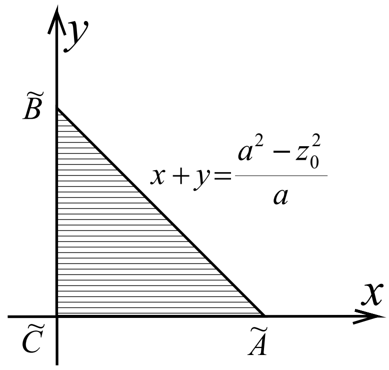

Рис. 3.40. Сечение тела в примере 3

► Тело кубируемо, так как оно ограничено простой поверхностью. Пересечем тело $(\overline{T})$ плоскостью $z = z_0$, где z_0 – любое, принадлежащее $(0, a)$. Получим в сечении треугольник *ABC*, проекция которого на плоскость *Oxy* ограничена линиями: $x = 0$; $y = 0$; $x + y = \dfrac{a^2 - z_0^2}{a}$ (рис. 3.40). Имеем $\left|\widetilde{A}\widetilde{C}\right| = \left|\widetilde{B}\widetilde{C}\right| = \dfrac{a^2 - z_0^2}{a}$. Значит, площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси *Oz*, будет равна $S(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2 - z_0^2}{a}\right)^2$, $z_0 \in [0, a]$. Тогда объем *V* тела $(\overline{T})$ будет равен

$$V = \int_0^a S(z_0)\,dz_0 = \frac{1}{2a^2}\int_0^a (a^2 - z_0^2)^2\,dz_0 =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(a^4 z_0 - \frac{2}{3}a^2 z_0^3 + \frac{z_0^5}{5}\right)\Bigg|_{z_0=0}^{z_0=a} = \frac{4}{15}a^3 (\text{куб. ед.}).$$ ◄

*** *Пример 4*.** Найти объем тела $(\overline{T})$, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 = 8z$; $x^2 + 4y^2 = 1$; $z = 0$ (рис. 3.41).

► Тело $(\overline{T})$ кубируемо, так как оно ограничено простой поверхностью. Пересечем тело $(\overline{T})$ плоскостью $z = z_0$, где $z_0 \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$. Получим в сечении фигуру, проекция которой на плоскость *Oxy* ограничена линиями:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{8z_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2z_0}\right)^2} = 1; \qquad \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1.$$

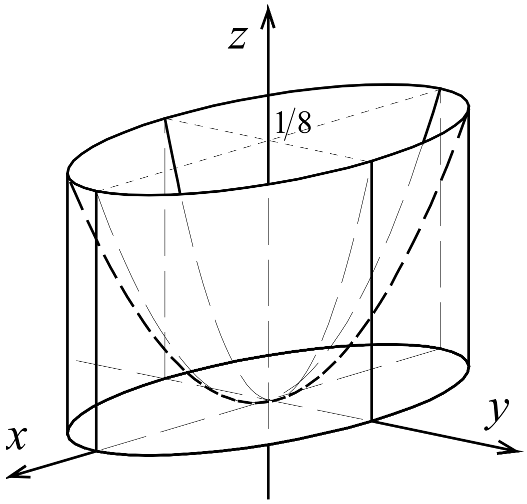

Рис. 3.41. К вычислению объема тела в примере 4

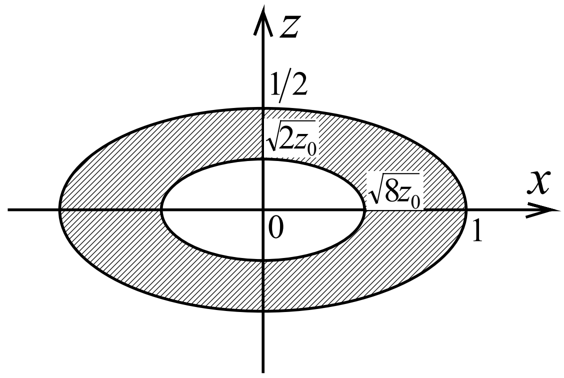

Рис. 3.42. Сечение тела в примере 4

Это кольцо, ограниченное эллипсами с полуосями $a_1 = 1$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$; $a_2 = \sqrt{8z_0}$, $b_2 = \sqrt{2z_0}$ (рис. 3.42). Мы знаем, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab. Поэтому площадь сечения тела $(\overline{T})$ плоскостью, перпендикулярной к оси Oz, будет равна

$$S(z_0) = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - 4z_0\right), \quad z_0 \in \left[0, \frac{1}{8}\right].$$

Тогда объем V тела $(\overline{T})$ будет равен

$$V = \int_0^{1/8} S(z_0)\,dz_0 = \pi \int_0^{1/8} \left(\frac{1}{2} - 4z_0\right) dz_0 = \frac{\pi}{32} \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти объем тела $(\overline{T})$, которое образуется при вращении одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, вокруг оси Ox (рис. 3.43).

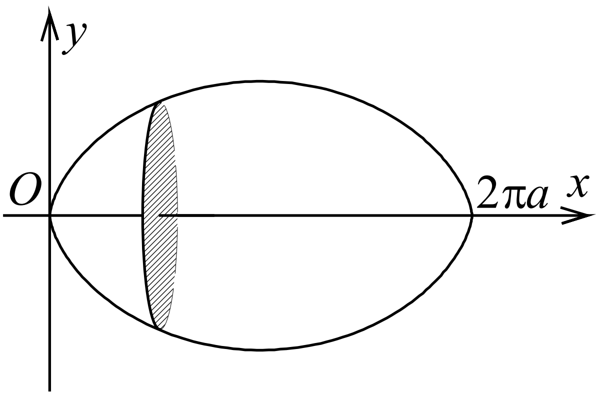

Рис. 3.43. Тело вращения в примере 5

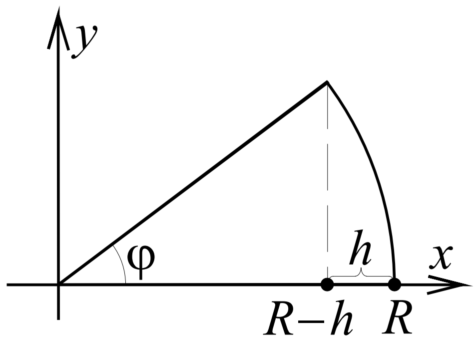

Рис. 3.44. К вычислению объема шарового сектора

▶ В формуле $V=\pi\int\limits_0^{2\pi a} y^2dx$ сделаем замену переменной, положив $x=a(t-\sin t)$. Когда x изменяется от 0 до $2\pi a$, t изменяется от 0 до 2π. Будем иметь, следовательно,

$$V=\pi\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3 \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleleft$$

Пример 6. Круговой сектор, ограниченный линиями $y=0$, $y=x\operatorname{tg}\varphi$ и частью окружности $x^2+y^2=R^2$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем V образующегося при этом шарового сектора.

$$\blacktriangleright\ V=V_1+V_2=\pi\int\limits_0^{R-h}x^2\operatorname{tg}^2\varphi\,dx+\pi\int\limits_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\cdot x^3\Big|_0^{R-h}+\pi R^2\cdot x\Big|_{R-h}^{R}-\frac{\pi}{3}x^3\Big|_{R-h}^{R}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\Big[\operatorname{tg}^2\varphi\cdot(R-h)^3+3R^2h+(R-h)^3-R^3\Big].$$

Имеем $\cos\varphi=\dfrac{R-h}{R}\Rightarrow\cos^2\varphi=\dfrac{(R-h)^2}{R^2}\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}^2\varphi=\dfrac{h(2R-h)}{(R-h)^2}$. А тогда

$$V=\frac{\pi}{3}\Big[h(2R-h)(R-h)+3Rh^2-h^3\Big]\ \Rightarrow\ V=\frac{2}{3}\pi R^2h \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleleft$$

*** 4°. Объем тела вращения в полярных координатах**.

Пусть имеется плоская фигура, ограниченная линиями, уравнения которых в полярной системе координат имеют вид $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ($0\le\alpha<\beta\le\pi$), $r=f(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Пусть $f(\varphi)\in C([\alpha,\beta])$ и $f(\varphi)\ge 0$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Выведем формулу для объема V тела $(\overline{T})$, полученного от вращения этой фигуры вокруг полярной оси, а именно, покажем, что

$$V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\,d\varphi\ \left(=\frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta f^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right). \tag{6}$$

Для этого разобьем промежуток $[\alpha,\beta]$ на части $[\varphi_k,\varphi_{k+1}]$ точками

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_n=\beta$$

и проведем лучи $\varphi=\varphi_k$ ($k=1,2,\ldots,n-1$). Построим ломаную с вершинами в точках A_0, A_1, A_2, …, A_n. Точка A_k имеет координаты $(\varphi_k,f(\varphi_k))$. При вращении вокруг оси Op плоский многоугольник $OA_0A_1\ldots A_n$ образует тело, объем которого обозначим через $\widetilde{V}$. Пусть $\lambda=\max\Delta\varphi_k$. Если существует $\lim\limits_{\lambda\to0}\widetilde{V}$, не зависящий от способа разбиения промежутка $[\alpha,\beta]$ на части, то этот предел бу-

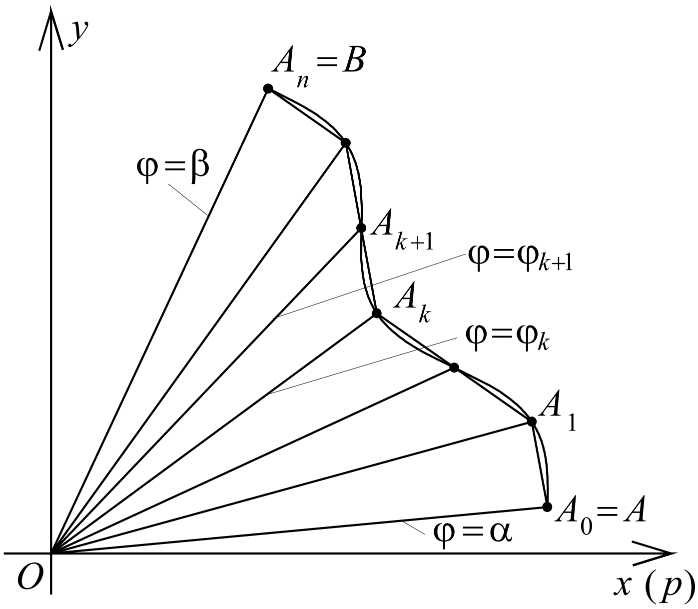

Рис. 3.45. К определению объема тела вращения в полярной системе координат

дем принимать за объем V тела, полученного от вращения криволинейной фигуры OAB вокруг оси Op.

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную лучами $\varphi = \varphi_k$, $\varphi = \varphi_{k+1}$ и кривой $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ (см. рис. 3.46). У нас $f(\varphi) \in C([\alpha, \beta])$ $\Rightarrow$ $f(\varphi) \in C([\varphi_k, \varphi_{k+1}])$ $\Rightarrow$ $f(\varphi)$ достигает на промежутке $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ своих наименьшего m_k и наибольшего M_k значений. Проведем две дуги окружности с центром в точке O и радиусами m_k и M_k. Рассмотрим теперь два тела $(\overline{T}_k^{(1)})$ и $(\overline{T}_k^{(2)})$, образованные вращением плоских фигур, ограниченных лучами $\varphi = \varphi_k$, $\varphi = \varphi_{k+1}$ и дугами окружностей радиусов $r = M_k$ и $r = m_k$. Ясно, что k-ая часть $(\overline{T}_k)$ тела $(\overline{T})$ содержится в теле $(\overline{T}_k^{(1)})$ и содержит в себе тело $(\overline{T}_k^{(2)})$ ($k = \overline{0, n-1}$). Следовательно, если V_k – объем тела $(\overline{T}_k)$, $V_k^{(1)}$ – объем тела $(\overline{T}_k^{(1)})$, $V_k^{(2)}$ – объем тела $(\overline{T}_k^{(2)})$, то имеет место неравенство $V_k^{(2)} \le V_k \le V_k^{(1)}$ ($k = \overline{0, n-1}$). Мы знаем (см. пример 6), что объем шарового сектора $V_{\text{ш.с.}}$ вычисляется по формуле $V_{\text{ш.с.}} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 \cdot h$, где h – высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору, R – радиус шара. Поэтому

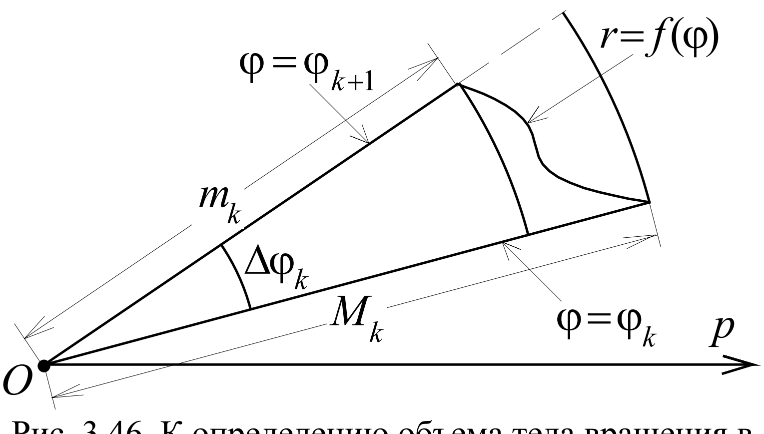

Рис. 3.46. К определению объема тела вращения в полярной системе координат

$$V_k^{(1)} = \frac{2}{3}\pi M_k^2 \cdot (M_k - M_k \cos\varphi_{k+1}) - \frac{2}{3}\pi M_k^2 \cdot (M_k - M_k \cos\varphi_k) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi M_k^3 (\cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1}) = \frac{4}{3}\pi M_k^3 \sin\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}.$$

$$V_k^{(2)} = \frac{2}{3}\pi m_k^2 \cdot (m_k - m_k \cos\varphi_{k+1}) - \frac{2}{3}\pi m_k^2 \cdot (m_k - m_k \cos\varphi_k) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi m_k^3(\cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1}) = \frac{4}{3}\pi m_k^3 \sin\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}.$$

Отметим, что $\varphi_k < \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} < \varphi_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, т. е. $\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2} \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Пусть $\sin\widetilde{\varphi}_k = \max\limits_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} \sin\varphi$, $\sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k = \min\limits_{[\varphi_k, \varphi_{k+1}]} \sin\varphi$. Тогда $V_k^{(1)} \le \frac{4}{3}\pi M_k^3 \cdot \sin\widetilde{\varphi}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}$; $V_k^{(2)} \ge \frac{4}{3}\pi m_k^3 \cdot \sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}$. Получаем, следовательно,

$$\frac{4}{3}\pi m_k^3 \cdot \sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2} \le V_k \le \frac{4}{3}\pi M_k^3 \cdot \sin\widetilde{\varphi}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

а, значит,

$$\frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} m_k^3 \cdot \sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2} \le V \le \frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} M_k^3 \cdot \sin\widetilde{\varphi}_k \cdot \sin\frac{\Delta\varphi_k}{2}.$$

Пусть функция $f(\varphi)$ достигает своего наименьшего значения m_k на промежутке $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ в точке φ_k^{**}, а наибольшего значения M_k в точке φ_k^{*} (φ_k^{**} и $\varphi_k^{*} \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$). По формуле Тейлора $\sin\frac{\Delta\varphi_k}{2} = \frac{\Delta\varphi_k}{2} - \frac{\cos(\theta\Delta\varphi_k)}{6}\cdot\left(\frac{\Delta\varphi_k}{2}\right)^3$. Поэтому предыдущее неравенство перепишется в виде:

$$\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k\Delta\varphi_k - \frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k \cdot \frac{\cos(\theta\Delta\varphi_k)}{6}\cdot\left(\frac{\Delta\varphi_k}{2}\right)^3 \le V \le$$

$$\le \frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\widetilde{\varphi}_k\Delta\varphi_k - \frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\widetilde{\varphi}_k \cdot \frac{\cos(\theta\Delta\varphi_k)}{6}\cdot\left(\frac{\Delta\varphi_k}{2}\right)^3.$$

По условию, $f(\varphi) \in C([\alpha, \beta]) \Rightarrow f(\varphi)$ – ограниченная $\Rightarrow$ существует число $L > 0$ такое, что $|f(\varphi)| \le L$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. А тогда

$$\left|\frac{4\pi}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k \frac{\cos(\theta\Delta\varphi_k)}{6}\left(\frac{\Delta\varphi_k}{2}\right)^3\right| \le \frac{\pi L^3}{36}\lambda^2\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\varphi_k = \frac{\pi L^3(\beta - \alpha)}{36}\lambda^2 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0,$$

$$\left|\frac{4\pi}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\widetilde{\varphi}_k \frac{\cos(\theta\Delta\varphi_k)}{6}\left(\frac{\Delta\varphi_k}{2}\right)^3\right| \le \frac{\pi L^3}{36}\lambda^2\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\varphi_k = \frac{\pi L^3(\beta - \alpha)}{36}\lambda^2 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\widetilde{\widetilde{\varphi}}_k\Delta\varphi_k + (\text{б.м.в. при } \lambda \to 0) \le V \le$$

$$\le \frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\widetilde{\varphi}_k\Delta\varphi_k + (\text{б.м.в. при } \lambda \to 0).$$

Имеем

$$\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\tilde{\tilde{\varphi}}_k\Delta\varphi_k =$$

$$=\underbrace{\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\varphi_k^{**}\Delta\varphi_k}_{=\sigma^{**}\ \text{(обозначение)}} + \frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\left(\sin\tilde{\tilde{\varphi}}_k - \sin\varphi_k^{**}\right)\Delta\varphi_k =$$

$$= \sigma^{**} + \frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\cdot 2\cos\frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_k+\varphi_k^{**}}{2}\sin\frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_k-\varphi_k^{**}}{2}\Delta\varphi_k .$$

Так как $\left|\sin\frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_k-\varphi_k^{**}}{2}\right| \le \frac{\left|\tilde{\tilde{\varphi}}_k-\varphi_k^{**}\right|}{2} \le \frac{\Delta\varphi_k}{2}$, то

$$\left|\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\cdot 2\cos\frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_k+\varphi_k^{**}}{2}\sin\frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_k-\varphi_k^{**}}{2}\Delta\varphi_k\right| \le \frac{2}{3}\pi L^3\lambda\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\varphi_k =$$

$$= \frac{2}{3}\pi L^3\lambda(\beta-\alpha)\xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 .$$

Следовательно,

$$\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{**})\sin\tilde{\tilde{\varphi}}_k\Delta\varphi_k = \sigma^{**} + (\text{б. м. в. при } \lambda\to 0) .$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что

$$\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\tilde{\varphi}_k\Delta\varphi_k = \underbrace{\frac{2}{3}\pi\sum_{k=0}^{n-1} f^3(\varphi_k^{*})\sin\varphi_k^{*}\Delta\varphi_k}_{=\sigma^{*}\ \text{(обозначение)}} + (\text{б. м. в. при } \lambda\to 0).$$

Итак, получим

$$\sigma^{**} + (\text{б. м. в. при } \lambda\to 0) \le V \le \sigma^{*} + (\text{б. м. в. при } \lambda\to 0) . \qquad (7)$$

В этом неравенстве σ^{**} и σ^{*} – интегральные суммы Римана для интеграла $\frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$. Так как $\frac{2}{3}\pi f^3(\varphi)\sin\varphi \in C\big([\alpha,\beta]\big)$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma^{**}$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma^{*}$ существуют и равны $\frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$. Переходя в неравенстве (7) к пределу при $\lambda\to 0$, получаем

$$V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi . \blacktriangleleft$$

Замечание. Если тело $(\overline{T})$ образовано вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной линиями: $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(-\pi\le\alpha<\beta\le 0)$, $r=f(\varphi)$, где

$f(\varphi)\in C([\alpha,\beta])$ и $f(\varphi)\geq 0$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то для объема V тела $(\overline{T})$ справедлива формула

$$V=-\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\varphi\, d\varphi. \qquad (\widetilde{6})$$

Поэтому формулы (6) и $(\widetilde{6})$ можно объединить в одну

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3|\sin\varphi|\, d\varphi. \qquad (8)$$

От плоской фигуры, вращающейся вокруг полярной оси, требуется лишь, чтобы она была расположена по одну сторону от оси вращения.

Если окажется, что $f(\varphi)\leq 0$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то вместо (8) следует пользоваться формулой

$$V=-\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3|\sin\varphi|\, d\varphi. \qquad (\widetilde{8})$$

***Пример** 7*. Улитка Паскаля $r=a+b\cos\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Определим объемы:

1) тела, ограниченного поверхностью вращения, когда $a>b$ (рис. 3.47);

2) тела, ограниченного внешней поверхностью вращения, когда $a<b$ (рис. 3.48);

3) полости между внутренней и внешней поверхностями вращения, когда $a<b$.

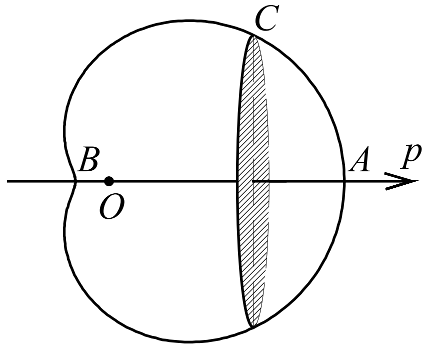

Рис. 3.47. К вычислению объема тела в примере 7. Случай $a>b$

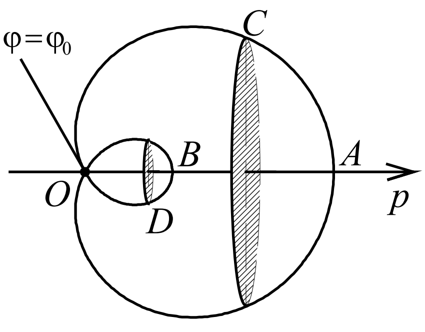

Рис. 3.48. К вычислению объема тела в примере 7. Случай $a<b$

▶ Заметим, что фигура симметрична относительно полярной оси.

1) В случае $a>b$ она имеет вид, изображенный на рис. 3.47. $\smile ACB$ кривой соответствует изменению φ от 0 до π, $f(\varphi)>0$, $\varphi\in[0,\pi]$. Поэтому

$$V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_{0}^{\pi} r^3\sin\varphi\, d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int\limits_{0}^{\pi}(a+b\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi=$$

$$= -\frac{2}{3b}\pi\int_0^{\pi}(a+b\cos\varphi)^3 d(a+b\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3b}\cdot\frac{(a+b\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2) \text{ (куб. ед.).} ◄$$

2) В случае $a<b$ улитка Паскаля имеет вид, изображенный на рис. 3.48. $\smile ACO$ кривой соответствует изменению φ от 0 до φ_0 ($\frac{\pi}{2}<\varphi_0<\pi$); $\smile ODB$ кривой соответствует изменению φ от φ_0 до π; $f(\varphi)\geq 0$, $\varphi\in[0,\varphi_0]$, и $f(\varphi)\leq 0$, $\varphi\in[\varphi_0,\pi]$. Угол φ_0 определяется из соотношения $a+b\cos\varphi_0=0$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi_0=-a/b$.

Объем тела, ограниченного внешней поверхностью вращения (то есть поверхностью, образованной вращением $\smile ACO$), будет равен

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\varphi_0} r^3\sin\varphi\, d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\varphi_0}(a+b\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi=$$

$$=-\frac{2\pi}{3b}\frac{(a+b\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0}=\frac{\pi}{6b}(a+b)^4 \text{ (куб. ед.).}$$

Обозначим через V_* объем тела, ограниченного внутренней поверхностью вращения (то есть поверхностью, образованной вращением $\smile ODB$). Имеем $f(\varphi)\leq 0$, $\varphi\in[\varphi_0,\pi]$. Поэтому

$$V_*=-\frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_0}^{\pi} r^3\sin\varphi\, d\varphi=-\frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_0}^{\pi}(a+b\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{3b}\frac{(a+b\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\pi}=\frac{\pi}{6b}(a-b)^4 \text{ (куб. ед.).}$$

3) Объем V полости между внутренней и внешней поверхностями вращения равен разности объемов тела, ограниченного внешней поверхностью, и тела, ограниченного внутренней поверхностью вращения:

$$V=\frac{\pi}{6b}(a+b)^4-\frac{\pi}{6b}(a-b)^4=\frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2) \text{ (куб. ед.).} ◄$$

5°. Вычисление объемов тел, ограниченных поверхностями, полученными от вращения кривых вокруг произвольных осей.

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением дуги параболы $y^2=4ax$ около прямой $y=2x$ (рис. 3.49).

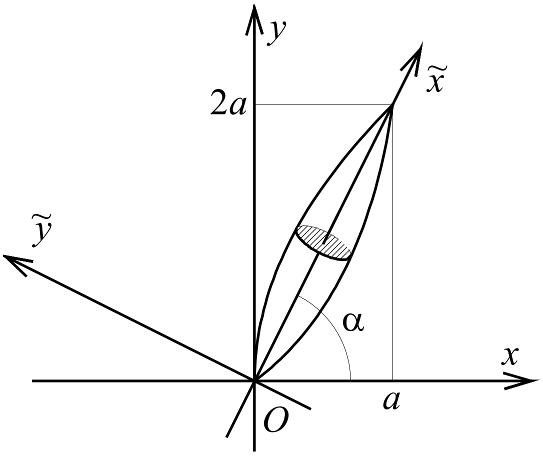

Рис. 3.49. К вычислению объема тела в примере 8

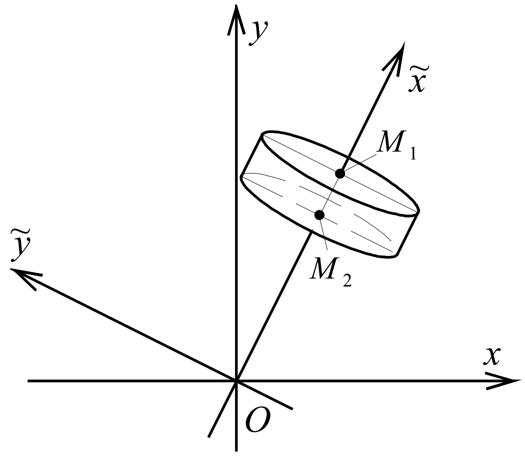

Рис. 3.50. Элемент объема тела вращения в примере 8

▶ Сделаем преобразование координат

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha, \\ y = \widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha, \end{cases}$$

так, чтобы ось вращения стала осью абсцисс новой системы координат. У нас $\operatorname{tg}\alpha = 2 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$. Поэтому

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\widetilde{x} - 2\widetilde{y}), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\widetilde{x} + \widetilde{y}). \end{cases}$$

Уравнение параболы в новой системе координат будет таким:

$$\frac{1}{5}(2\widetilde{x} + \widetilde{y})^2 = \frac{4a}{\sqrt{5}}(\widetilde{x} - 2\widetilde{y}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{y} = -2\left(\widetilde{x} + 2\sqrt{5}\cdot a\right) + 2\sqrt{5\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x} + 20a^2}, \quad x \in \left[0, a\sqrt{5}\right].$$

(Из двух знаков перед радикалом нужно взять знак “+”, так как интересующая нас дуга параболы лежит выше оси $O\widetilde{x}$.)

Для объема V тела будем иметь

$$V = \pi\int_0^{a\sqrt{5}} \widetilde{y}^2 d\widetilde{x} = \pi\int_0^{a\sqrt{5}} \Big[4\left(5\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x} + 20a^2\right) + 4\left(\widetilde{x}^2 + 4\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x} + 20a^2\right) -$$

$$-8\left(\widetilde{x} + 2\sqrt{5}\cdot a\right)\sqrt{5\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x} + 20a^2}\Big]d\widetilde{x} = \frac{770\sqrt{5}}{3}\pi a^3 - 8\pi J,$$

где $J = \displaystyle\int_0^{a\sqrt{5}} \left(\widetilde{x} + 2\sqrt{5}\cdot a\right)\sqrt{5\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x} + 20a^2}\, d\widetilde{x}$.

В J сделаем замену $5\sqrt{5}\cdot a\widetilde{x}+20a^2=t \Rightarrow \widetilde{x}=\dfrac{t-20a^2}{5\sqrt{5}\cdot a}$; $d\widetilde{x}=\dfrac{dt}{5\sqrt{5}\cdot a}$; $\widetilde{x}=0$ соответствует $t=20a^2$, $\widetilde{x}=a\sqrt{5}$ соответствует $t=45a^2$. Получим

$$J=\int\limits_{20a^2}^{45a^2}\left(\frac{t-20a^2}{5\sqrt{5}\cdot a}+2\sqrt{5}\cdot a\right)\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{5\sqrt{5}\cdot a}=\frac{802\sqrt{5}}{25}a^3.$$

Следовательно,

$$V=\left(\frac{770\sqrt{5}}{3}-\frac{6416\sqrt{5}}{25}\right)\pi a^3=\frac{2\sqrt{5}}{75}\pi a^3 \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleleft$$

Приведенный здесь метод решения задачи является универсальным. Однако часто более удобным оказывается другой метод. Этот метод называется методом выделения элементов. Его смысл можно уяснить здесь на примерах 8, 9.

▶ Находим расстояние ρ от произвольной точки $(x, f(x))$ параболы до прямой $y=2x$. Имеем

$$\rho=\frac{|2x-f(x)|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-2\sqrt{ax}|}{\sqrt{5}},\quad x\in[0,a].$$

Элемент dV объема тела вращения будет равен $\pi\rho^2\cdot dl$ (рис. 3.50). Здесь $dl=|M_1M_2|$ – высота, ρ – радиус основания цилиндра. Имеем $dl=\sqrt{1+(y_x')^2}\cdot dx$, где $y=2x$ и, следовательно, $dl=\sqrt{5}\cdot dx$. Значит, $dV=\pi\dfrac{\left(2x-2\sqrt{ax}\right)^2}{5}\sqrt{5}\cdot dx$. Тогда

$$V=\frac{4\pi}{\sqrt{5}}\int\limits_0^a\left(x-\sqrt{ax}\right)^2\cdot dx=\frac{2\sqrt{5}}{75}\pi a^3 \text{ (куб. ед).} \blacktriangleleft$$

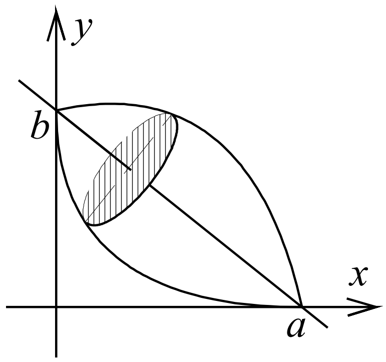

Рис. 3.51. К вычислению объема тела в примере 9

Пример 9. Кривая $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ вращается вокруг прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Найти объем тела, ограниченного поверхностью вращения (рис. 3.51).

▶ Из уравнения кривой $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ следует, что должно быть $\begin{cases}0\le x\le a,\\ 0\le y\le b,\end{cases}$ и $y=b\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right)^2$. Расстояние ρ от произвольной точки этой кривой до прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ будет таким:

$$\rho = \frac{\left|\frac{x}{a} + \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left|\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right|, \quad x \in [0, a].$$

Имеем далее $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx$, где $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Следовательно, $dl = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot dx = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx$. Для элемента dV объема тела вращения будем иметь

$$dV = \pi\rho^2 dl = \pi \cdot \frac{4a^2b^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot dx = \frac{4\pi ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 \cdot dx.$$

Поэтому

$$V = \frac{4\pi ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^a \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{2}{15} \cdot \frac{\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleleft$$

§5. Вычисление статических моментов и координат центров масс плоских кривых и плоских фигур

Определение. Пусть M – материальная точка массы m, Ox – некоторая ось, d – расстояние от точки M до оси Ox. Тогда $S_x = m \cdot d$ называют статическим моментом точки M относительно оси Ox.

При рассмотрении нескольких материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно оказывается полезным приписывать соответствующим расстояниям определенные знаки. По этой причине момент S_x, например, вводят в рассмотрение только тогда, когда точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ расположены в плоскости, содержащей ось Ox. В этом случае через точку O проводят координатную ось Oy, перпендикулярную оси Ox, и под d понимают координату y точки M, так что $S_x = m \cdot y$.

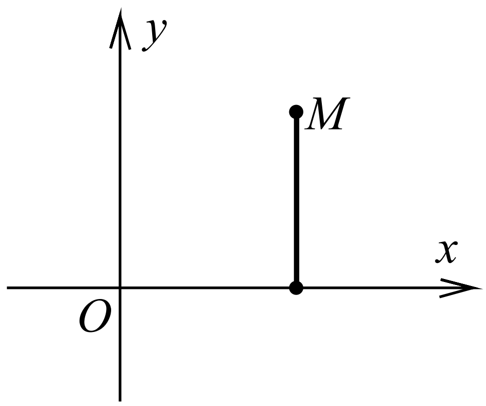

Рис. 3.52. К определению статического момента материальной точки

При пространственном расположении материальных точек статический момент S_x относительно оси *Ox* не рассматривают, ибо нет никаких разумных оснований приписать их расстояниям *d* от оси *Ox* те или иные знаки.

Определение. Статическим моментом системы материальных точек $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$ относительно оси *Ox* называют сумму статических моментов всех точек этой системы относительно оси *Ox*, т.е. величину $S_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k$.

Совершенно аналогично определяется статический момент системы материальных точек относительно оси *Oy*:

$$S_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k .$$

Здесь x_k – абсцисса точки M_k в системе координат *Oxy*. Статические моменты S_x и S_y системы материальных точек позволяют установить положение центра масс $C(x_C, y_C)$ этой системы. Точка $C(x_C, y_C)$ обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы, то момент этой массы относительно любой оси совпадает с моментом системы относительно этой оси, т.е.

$$S_x = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) \cdot y_C, \qquad S_y = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) \cdot x_C .$$

Поэтому

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \qquad y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} .$$

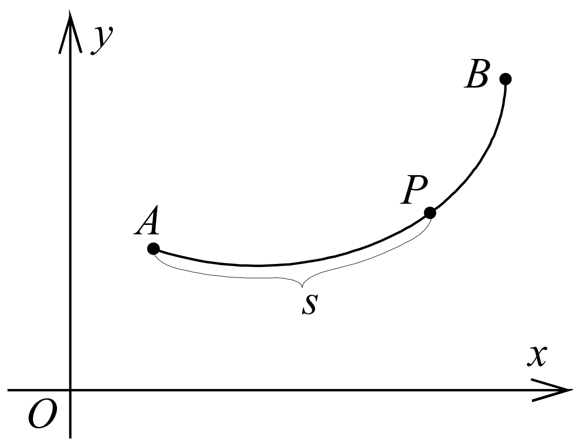

Рис. 3.53. К определению статических моментов кривой относительно координатных осей

Пусть теперь речь идет не о дискретных материальных точках, а о непрерывной материальной кривой *AB* переменной плотности, расположенной в плоскости *Oxy*. Будем предполагать кривую спрямляемой, а координаты *x* и *y* ее переменной точки *P* и линейную плотность распределения массы μ в этой точке заданными как функции длины *s* дуги *AP*. Точке *A* отвечает значение $s = 0$; точке *B* – значение $s = l$ (*l* – длина всей кривой *AB*).

Найдем статические моменты этой кривой относительно координатных осей. Для этого разобьем промежуток $[0, l]$ с помощью значений

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = l$$

на столь малые части Δs_k, чтобы в пределах каждой части линейную плотность $\mu(s)$ можно было считать приближенно постоянной величиной, равной $\mu(\widetilde{s}_k)$, где $\widetilde{s}_k$ – любая точка из промежутка $[s_k, s_{k+1}]$. Масса Δm_k каждой частичной дуги Δs_k $\left[=(s_{k+1}-s_k),\ k=0,1,2,\ldots,n-1\right]$ будет приближенно равна: $\Delta m_k \approx \mu(\widetilde{s}_k)\cdot\Delta s_k$. Сосредоточим всю массу каждой частичной дуги в точке $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)$, отвечающей значению $s = \widetilde{s}_k$. В результате получим систему из n материальных точек. Статические моменты этой системы относительно осей Ox и Oy будут соответственно такими:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k \cdot \widetilde{y}_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\widetilde{s}_k) y(\widetilde{s}_k)\cdot \Delta s_k, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k \cdot \widetilde{x}_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\widetilde{s}_k) x(\widetilde{s}_k)\cdot \Delta s_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Видим, что правые части равенств (1) представляют собой интегральные суммы Римана для функций $\mu(s)\cdot y(s)$, $\mu(s)\cdot x(s)$. Эти суммы дают приближенное значение для статических моментов материальной кривой AB относительно координатных осей. Точное выражение для этих моментов кривой мы получим, переходя в (1) к пределу при $\lambda = \max \Delta s_k \to 0$. Будем иметь

$$S_x = \int_0^l \mu(s)\cdot y(s)\,ds, \qquad S_y = \int_0^l \mu(s)\cdot x(s)\,ds.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют установить положение центра масс $C(x_C, y_C)$ кривой. Так как масса m кривой AB равна $\int_0^l \mu(s)\,ds$ и так как $S_x = m\cdot y_C$, $S_y = m\cdot x_C$, то получаем

$$x_C = \frac{\int_0^l \mu(s)\cdot x(s)\,ds}{\int_0^l \mu(s)\,ds}, \qquad y_C = \frac{\int_0^l \mu(s)\cdot y(s)\,ds}{\int_0^l \mu(s)\,ds}. \tag{2}$$

В случае, когда кривая AB – однородная, т.е. $\mu \equiv \text{const}$, формулы (2) принимают вид

$$x_C = \frac{\int_0^l x\,ds}{l}, \qquad y_C = \frac{\int_0^l y\,ds}{l}. \qquad (\tilde{2})$$

Из выражения для y_C в $(\tilde{2})$ находим

$$l \cdot y_C = \int_0^l y\,ds.$$

Умножим обе части последнего равенства на 2π. Будем иметь

$$2\pi y_C \cdot l = 2\pi \int_0^l y\,ds. \qquad (3)$$

Если кривая *AB* лежит выше оси *Ox*, т.е. $y \geq 0$, то правая часть равенства (3) есть площадь поверхности, полученной от вращения кривой *AB* вокруг оси *Ox*. В левой части равенства (3) множитель $2\pi y_C$ есть длина окружности, которую описывает центр масс кривой при вращении ее вокруг оси *Ox*, l – длина кривой *AB*.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Величина площади поверхности, полученной от вращения дуги плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описываемой центром масс дуги кривой.

(Это есть так называемая **первая теорема Гульдена**).

Пример 1. Найти центр масс полуокружности радиуса *R*.

▶ Имеем $l = \pi R$. Площадь поверхности вращения $s = 4\pi R^2$. Следовательно,

$$y_C = \frac{S}{2\pi \cdot l} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

$x_C = 0$, ибо если кривая симметрична относительно некоторой прямой, то центр масс кривой лежит на этой прямой. ◀

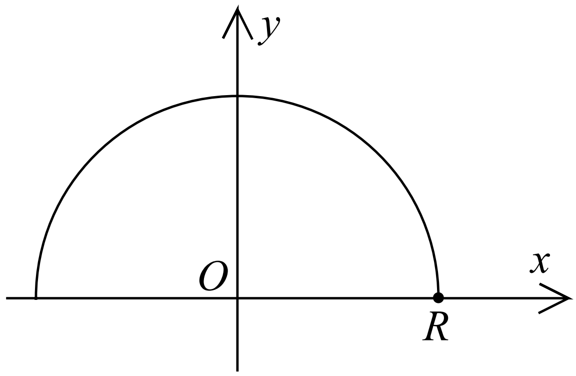

Рис. 3.54. К определению центра масс полуокружности

Рассмотрим теперь плоскую фигуру *ABCD*, ограниченную снизу непрерывной кривой $y = f_1(x)$, $x \in [a,b]$, сверху непрерывной кривой $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, а с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$ ($f_1(x) \leq f_2(x), x \in [a,b]$; $a < b$). Предполагаем, что эта фигура однородная, т.е. поверхностная плотность распределения массы $\rho = \text{const}$.

Разделим промежуток $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и рассмотрим ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Масса Δm_k каждого такого прямоугольника будет равна

$$\Delta m_k = \rho\left[f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})\right] \cdot \Delta x_k .$$

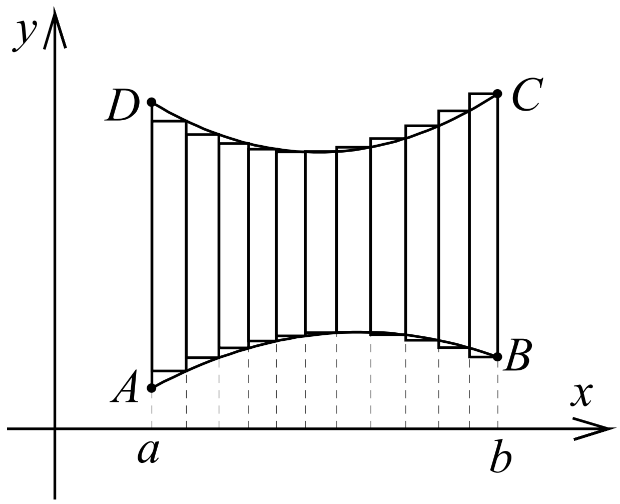

Рис. 3.55. К определению центра масс плоской фигуры

Сосредоточим всю массу такого прямоугольника в его центре масс (центр масс прямоугольника лежит в точке пересечения его диагоналей), т.е. в точке $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)$, где

$$\widetilde{x}_k = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} = x_{k+1} - \frac{\Delta x_k}{2},$$

$$\widetilde{y}_k = f_1(x_{k+1}) + \frac{f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})}{2} = \frac{f_1(x_{k+1}) + f_2(x_{k+1})}{2}.$$

Тогда статические моменты ступенчатой фигуры относительно осей *Ox* и *Oy* будут равны соответственно

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_x &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k \cdot \widetilde{y}_k = \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f_2^2(x_{k+1}) - f_1^2(x_{k+1})\right] \cdot \Delta x_k, \\ \widetilde{S}_y &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k \cdot \widetilde{x}_k = \rho \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})\right]\left(x_{k+1} - \frac{\Delta x_k}{2}\right) \cdot \Delta x_k. \end{aligned} \tag{4}$$

$\widetilde{S}_x$ и $\widetilde{S}_y$ дают приближенные значения для статических моментов S_x и S_y фигуры *ABCD* относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно. Точные выражения для S_x и S_y получим, переходя в равенствах (4) к пределу при $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$. Замечаем, что выражение для $\widetilde{S}_x$ представляет собой интегральную сумму Римана для функции $\frac{\rho}{2}\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]$ в $[a, b]$. Поскольку $f_1(x)$ и $f_2(x) \in C([a, b])$, то $\frac{\rho}{2}\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] \in R([a, b])$ и, следовательно,

$$S_x = \lim_{\lambda \to 0} \widetilde{S}_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] dx .$$

Выражение для $\widetilde{S}_y$ перепишем в виде

$$\widetilde{S}_y = \rho \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \left[f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})\right] \Delta x_k - \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f_2(x_{k+1}) - f_1(x_{k+1})\right] \cdot (\Delta x_k)^2 .$$

Здесь первая сумма в правой части представляет собой интегральную сумму Римана для функции $\rho x\cdot\left[f_2(x)-f_1(x)\right]$ в $[a,b]$. Поскольку $\rho x\cdot\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\in C([a,b])$, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\cdot\left[f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right]\cdot\Delta x_k=\rho\int_a^b x\cdot\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Покажем, что вторая сумма в правой части выражения для $\widetilde{S}_y$ стремится к нулю при $\lambda\to 0$. Действительно, имеем

$$\left|\frac{\rho}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left[f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right]\cdot(\Delta x_k)^2\right|\le$$

$$\le\frac{\rho}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right|\cdot(\Delta x_k)^2\le\frac{\lambda\rho}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right|\cdot\Delta x_k.$$

Поскольку

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right|\cdot\Delta x_k=\int_a^b\left|f_2(x)-f_1(x)\right|dx,$$

ибо $\left|f_2(x)-f_1(x)\right|\in C([a,b])$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\lambda\rho}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right|\Delta x_k=0$, а, следовательно, и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\rho}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[f_2(x_{k+1})-f_1(x_{k+1})\right]\cdot(\Delta x_k)^2=0$. А тогда будем иметь

$$S_y=\lim_{\lambda\to 0}\widetilde{S}_y=\rho\cdot\int_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

По статическим моментам S_x и S_y легко найти теперь координаты центра масс (x_C,y_C) фигуры *ABCD*. Обозначим через *m* массу фигуры *ABCD*. Ясно, что

$$m=\rho\cdot\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

По основному свойству центра масс имеем

$$m\cdot x_C=S_y;\qquad m\cdot y_C=S_x.$$

Отсюда

$$x_C=\frac{S_y}{m}=\frac{\int_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}{\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx};\qquad y_C=\frac{S_x}{m}=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx}{\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}.\qquad(5)$$

В частности, если фигура *ABCD* есть криволинейная трапеция, ограниченная снизу осью *Ox*, сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, а с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, то, полагая в формулах (5) $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) \equiv f(x)$, $x \in [a, b]$, получим

$$x_C = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}; \qquad y_C = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{6}$$

Из формулы для y_C в (6) находим

$$2y_C \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

или, умножив обе части последнего равенства на π,

$$2\pi y_C \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Правая часть равенства (7) выражает объем *V* тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси *Ox*. В левой части равенства (7) множитель $2\pi y_C$ есть длина окружности, которую описывает центр масс криволинейной трапеции при вращении ее вокруг оси *Ox*; множитель $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь *S* криволинейной трапеции. Таким образом, мы приходим ко **второй теореме Гульдена**.

Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади *S* этой фигуры на длину окружности, описываемой центром масс этой фигуры. Заметим, что если плоская фигура имеет ось симметрии, то центр масс фигуры лежит на этой оси.

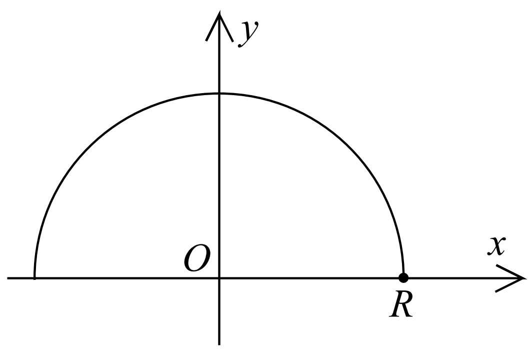

Рис. 3.56. К определению центра масс полукруга

Пример 2. Найти координаты центра масс полукруга радиуса *R*.

▶ Имеем $S = \frac{\pi R^2}{2}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = S \cdot 2\pi y_C$

$\Rightarrow$ $y_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi R^3 \cdot 2}{\pi R^2 \cdot 2\pi} = \frac{4R}{3\pi}$, $x_C = 0$, ибо фигура симметрична относительно оси *Oy*. ◀

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 1. – М.: Высшая школа, 1981.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. – М.: Наука, 1971.

Оглавление

Аксёнов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(Определенный интеграл. Несобственные интегралы.
Приложения определенного интеграла)

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 065394 от 08.09.97

Подписано в печать . .99. Формат 60×84 1/16.
Объем п.л. Тираж . Заказ № .

Отпечатано в издательстве «НЕСТОР»
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29