Лекция 1

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение.

Предмет и Модели механики.

Классическая или Ньютонова механика является разделом физики, в котором изучаются основные законы механического взаимодействия и движения твердых тел.

История развития механики насчитывает тысячелетия. Практически человек стал интересоваться механикой и интуитивно использовать ее законы, когда старался точнее бросить камень на охоте. С тех пор механика прошла огромный путь. Опыт первых исследователей смогли обобщить, заложив основы классической механики, такие мыслители древности, как Архимед (3 век до нашей эры), Леонардо Да Винчи (15в), Галилей и Декарт (16в). Современный вид механика приобрела благодаря гениям Гюйгенса и Ньютона (17в), Эйлера и Лагранжа (18в).

Курс механики принято делить на три основные части: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА. В СТАТИКЕ изучаются условия покоя тел, КИНЕМАТИКА является языком описания их движения, а в ДИНАМИКЕ, собственно и являющейся механикой, выводятся законы движения тел под действием сил. Поскольку покой есть частный случай движения, то уравнения статики было бы легче получить из законов движения тела. Однако они необходимы вам уже сейчас для изучения других механических дисциплин, поэтому мы начинаем со статики.

Модели механики

Как любая точная наука механика рассматривает не реальные, бесконечно сложные физические объекты, а их модели, отражающие лишь главные в данных условиях свойства.

Объектом классической механики является система взаимодействующих материальных точек, называемая *механической системой*.

Частным случаем механической системы, является ***твердое тело*** - модель реального тела, представляющая собой систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется со временем. Деформации большинства инженерных сооружений пренебрежимо малы, поэтому модель твердого тела оправдана. Тем более что она значительно упрощает изучение движения и покоя тела и эти результаты применимы к реальному телу.

Сила как мера механического воздействия

Сила. Проекция и составляющая силы.

Все тела находятся во взаимодействии. Например, маленький шарик, висящий на нити, взаимодействует с Землей и нитью. Оба воздействия имеют точку приложения (сам шарик), линию действия (вертикаль), направление (противоположные) и величину (модуль). Величины, характеризуемые линией действия, направлением и модулем в математике называются векторами. Поэтому меру воздействия одной точки на другую изображают вектором **F** , который называют ***силой.***

Рассмотрим формальные математические операции с векторами сил. Физический смысл этих операций будет выяснен в главе об эквивалентных преобразованиях сил, приложенных к твердому телу.

В письме вектор условимся надчеркивать, в печати- выделять жирным шрифтом. Модуль вектора будем обозначать той же буквой, но без черты: F. Из физики вам известно, что модуль силы измеряется в килограммах кГ (Техническая система единиц) и ньютонах Н (Международная система СИ).

При решении задач, однако, мы можем оперировать только числами, а не векторами. Поэтому пользуются скалярным представлением вектора, например, тремя проекциями на декартовые оси x,y,z. Они определяют вектор матрично, образуя вектор-столбец

$$F = \begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Напомним, что проекцией вектора на ось x называется скалярная величина, равная

$$F_x = FCosa \qquad (2)$$

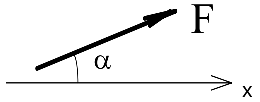


Рис.2

Очевидно, что знак проекции определяется знаком косинуса угла альфа между направлениями силы и оси. Если угол острый, то проекция положительна, если тупой- то она отрицательна. Проще говоря, проекция положительна, если направление силы совпадает с точностью до П/2 с направлением координаты.

Важно помнить, что проекция силы, перпендикулярной оси, РАВНА НУЛЮ.

Известно, что векторы складываются по правилу параллелограмма (Рис 3 b).

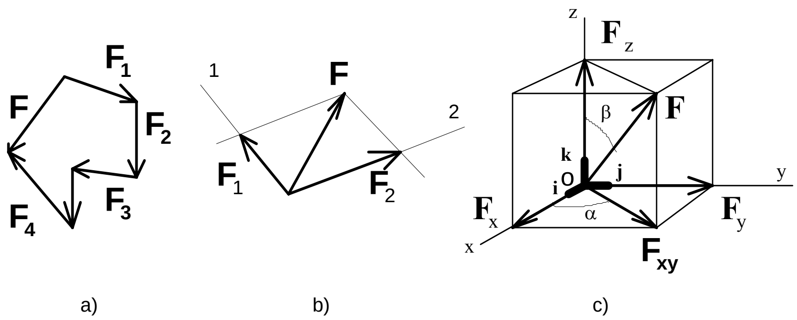


Рис.3

Этот же рисунок указывает правило разложения вектора на две составляющие вдоль направлений 1 и2. Для этого через концы вектора **F** проводятся линии, параллельные заданным направлениям. Вообще ***составляющей*** вектора называется любое из слагаемых в выражении $\mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+...+\mathbf{F_n}$ На Рис.3а составляющие вектора **F** образуют ***векторный многоугольник***.

Рассмотрим вектор силы **F** в декартовых координатах с ортами **i, j, k**, и представим его через проекции.

$$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k} \qquad (3)$$

Ортогональной составляющей вектора F вдоль оси x назовем произведение соответствующей проекции силы на орт оси **i**. Теперь сила может быть представлена векторной суммой своих трех ортогональных составляющих (Рис.3c):

$$\mathbf{F}=\mathbf{F_{xy}}+\mathbf{F_z} \quad \mathbf{F_{xy}}=\mathbf{F_x}+\mathbf{F_y} \quad \mathbf{F}=\mathbf{F_x}+\mathbf{F_y}+\mathbf{F_z} \quad \mathbf{F_x}=F_x\mathbf{i};\ \mathbf{F_y}=F_y\mathbf{j};\ \mathbf{F_z}=F_z\mathbf{k} \qquad (4)$$

$$F_{xy}=FSin\alpha \quad F_x=F_{xy}Cos\beta=FSin\alpha Cos\beta \quad F_y=F_{xy}Sin\beta=FSin\alpha Cos\beta \quad F_z=FCos\alpha$$

Модуль силы находится по теореме Пифагора:

$$F^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2 \qquad (5)$$

Система сил. Главный вектор системы сил.

Системой сил $\{\mathbf{F}\}=\{\mathbf{F_1F_2F_3...F_n}\}$ (Рис.4).называется множество сил, приложенных к точкам механической системы.

Главным вектором системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

$$\mathbf{V}=\sum\mathbf{F_k} \qquad (6)$$

Найти главный вектор можно, построив в произвольном центре О векторный многоугольник, в котором начало последующей силы совпадает с концом предыдущей (рис.4). Замыкающая сторона многоугольника и есть главный вектор **V** системы сил.

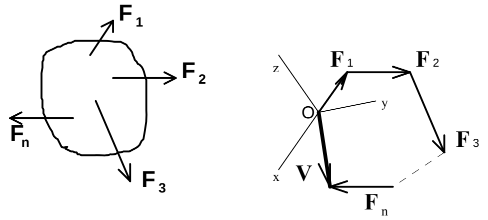


Рис.4

Для пространственной системы сил построить многоугольник практически трудно. Проще найти главный вектор аналитически. Проектируя слагаемые формулу (6) на оси координат, определим проекции главного вектора, его модуль и направляющие косинусы:

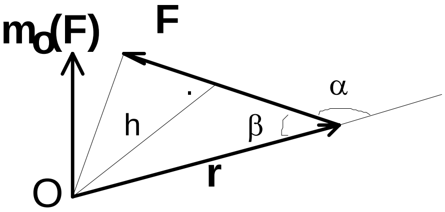
$$V_x=\Sigma F_{kx};\ V_y=\Sigma F_{ky};\ V_z=\Sigma F_{kz} \qquad (7)$$

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2;\ \ Cos(V,x)=V_x/V;\ \ Cos(V,y)=V_y/V;\ \ Cos(V,z)=V_z/V$$

Момент силы относительно точки. Теоремы о моменте

Понятие момента силы возникает при переходе к рассмотрению твердого тела. Действительно, опыт показывает, что, если зафиксировать некоторый центр О в теле, то сила **F,** приложенная в другой точке А тела может повернуть тело вокруг О. Эту способность силы поворачивать тело и характеризует ее момент относительно О.

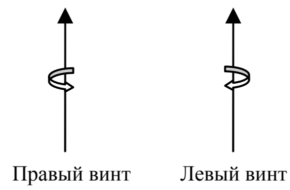
Обозначим через **r** радиус-вектор точки А относительно центра О. ***Моментом силы F относительно центра O*** называется вектор



$$\mathbf{m_o(F)=r} \times \mathbf{F} \qquad (8)$$

Направление векторного произведения условно и зависит от ориентированности пространства. *Ориентированность пространства-* это принятое нами правило соответствия прямой и дуговой стрелок: правого или левого винта.

Вектора, направление которых зависит от ориентированности пространства, называются ***аксиальными.*** Важно, что для них дуговая стрелка указывает действительное направление вращения, а направление самого вектора условно.

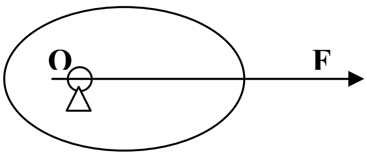


Мы будем работать в право ориентированном пространстве и направление векторного произведения всегда будем определять по правилу ***правого винта:*** с конца $\mathbf{m_o}$ видно , что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Модуль момента равен

$$m_o(F)=FrSin\alpha=FrSin\beta=Fh \qquad (9)$$

произведению модуля силы на плечо h -длину перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы.



Видим, что момент силы тем меньше, чем меньше ее плечо, и он обращается в ноль для любого центра на линии действия силы. Этот результат является ожидаемым, поскольку опыт показывает, что такой силой повернуть покоящееся тело невозможно.

Момент является характеристикой способности силы повернуть тело вогруг центра О, если в нем поставить опору. Роль опоры может играть сопротивление центра тяжести тела изменению его скорости. Сила не может повернуть тело, если при отсутствии опоры, линия действия силы проходит через центр тяжести тела.

Теорема 1. О зависимости момента от центра.

Найдем связь между моментами силы F относительно центров А и В. Из Рис.6 ясно, что

$$\mathbf{r_A= AB+r_B} \qquad \mathbf{m_A(F)=r_AxF=(AB+r_B)xF= r_BxF +ABxF}$$

Таким образом

$$\mathbf{m_A(F)= m_B(F)+ABxF} \qquad (10)$$

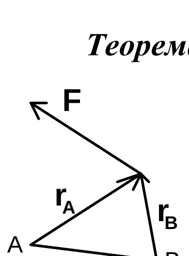


Рис.6

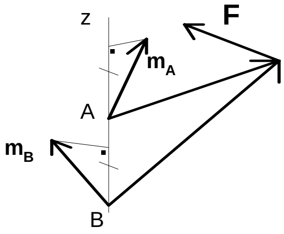
Формула (10) показывает, что:

а) в общем случае момент силы зависит от центра

б) перенос центра параллельно линии действия силы не изменяет момента

Теорема 2. О проекциях моментов.

Проектируя (10) на ось z, проходящую через A и B, находим



$$\text{пр}_{AB}\mathbf{m_A(F)}=\text{пр}_{AB}\mathbf{m_B(F)} \qquad (11)$$

поскольку произведение **AB** X **F** перпендикулярно AB и его проекция на z равна нулю. Таким образом приходим к лемме:

Проекции моментов силы относительно всех точек одной оси на эту ось равны между собой.

Таким образом проекция моментов на ось характеризует действие силы по отношению к этой оси, поэтому называется βмоментом сил относительно оси

Рис.7

Матричное вычисление векторного произведения.
Присоединенная матрица. Аналитическое выражение момента

Известно, что в координатах x,y,z с ортами **i, j, k** векторное произведение

$$\mathbf{c=a\ x\ b}$$

векторов $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$

можно представить в виде определителя матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$

$$\mathbf{c=a\ x\ b} = (a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k} \qquad (12)$$

или

$$c_x= a_yb_z-a_zb_y \quad c_y= a_zb_x-a_xb_z \quad c_z= a_xb_y-a_yb_x$$

Векторам **a, b** и **c** соответствуют столбцы их проекций.

$$a=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad c=\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Столбец *c* можно получить из столбца *b* только умножив последний на матрицу размерности 3x3. Очевидно, что элементами этой матрицы должны быть проекции вектора **a**, поэтому обозначим ее через *A*. Таким образом,

$$c=Ab, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

После подстановки в развернутом виде с учетом (12) получаем

$c_x=a_{11}b_x+a_{12}b_y+a_{13}b_z= a_xb_y-a_yb_x$ $\quad c_y=a_{21}b_z+a_{22}b_y+a_{23}b_z= a_zb_x-a_xb_z$ $\quad c_z=a_{31}b_z+a_{32}b_y+a_{33}b_z= a_xb_y-a_yb_x$

Таким образом, $a_{11}= a_{22}= a_{33}=0 \quad a_{21}=- a_{12}=a_z \quad a_{13}= -a_{31}=a_y \quad a_{32}= -a_{23}=a_x$

и *A* является кососимметричной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Матрицу *A* называют ***присоединенной матрицей вектора a***

Приходим к выводу, что векторной записи произведения **c=a** X **b** соответствует матричная формула

$$c=Ab \qquad (16)$$

Верно и обратное. Выражению вида (16), где *A*- кососимметричная матрица, соответствует векторное произведение.

Аналитическое выражение момента

Пусть вектора **r** и **F** заданы аналитически, т.е. своими проекциями на оси x, y, z
Векторной формуле момента $\mathbf{m_o(F)=r} \times \mathbf{F}$ соответствует матричная запись

$$m_0(F)=Rf$$

где R- присоединенная матрица радиуса вектора **r** (x, y, z)

$$R=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем аналитические выражения проекций момента силы на оси

$$m_x(F)=yF_z-zF_y \qquad m_y(F)=zF_x-xF_z \qquad m_z(F)=xF_y-yF_x$$

которые позволяют найти модуль и направление вектора $\mathbf{m_o(F)}$