Лекция 10

Сферическое движение тела.

Закон движения. Углы Эйлера

Сферическим называется движение тела, при котором одна точка тела остается неподвижной. Название отражает тот факт, что при таком движении точки тела движутся по сферам. Более полно это движение называется ***вращением вокруг точки***. Поворот тела можно задать тремя угловыми координатами. Существует несколько способов выбора таких углов.

Мы рассмотрим углы Эйлера: ***ψ -угол прецессии***, ***ϑ -угол нутации***, ***φ-угол собственного вращения*** (Рис.1). Покажем, что, зная углы Эйлера, можно построить положение тела (осей *x' y' z'*) относительно осей *x y z*. Пусть в текущий момент времени t произвольный вектор в теле **a** имеет координаты *x(t) y(t) z(t)*, образующие столбец *a (t)* в неподвижных осях. Очевидно, что его координаты в осях *x' y' z'* неизменны и равны x_0, y_0, z_0. Они образуют постоянный столбец a_0.

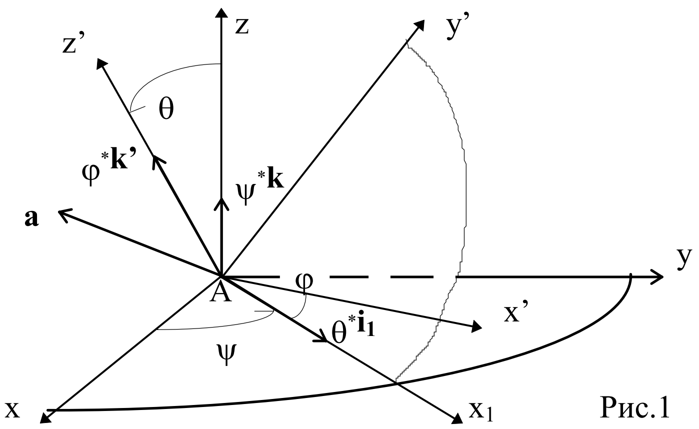

Рис.1

$$a(0)=a_0$$

Покажем, как тремя последовательными поворотами можно совместить оси (*x y z*) с осями (*x' y' z'*). Проследим при этом за изменением координат вектора **a**(t) от *a* в неподвижной системе к a_0 в подвижной и таким образом найдем зависимость *a(t)* от углов Эйлера.

Сначала поворотом вокруг оси *z* на угол ψ перейдем к осям (x_1 y_1z) (y_1 не изображена на Рис.1). Ось x_1 называется ***линией узлов***. Столбцы координат *a* и a_ψ связаны матрицей перехода T_Ψ от второй к первой системе координат. Как известно эта же матрица является матрицей поворота тела из первого положения во второе:

$$a=T_\Psi a_\Psi \qquad T_\Psi=\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Теперь поворотом вокруг x_1 на угол ϑ перейдем к осям (x_1 y_2 z') (y_2 не изображена). . Аналогично предыдущему, координаты a_Ψ и a_Θ окажутся связанными матрицей поворота T_Q от первой ко второй системе координат (8)

$$a_\Psi=T_\Theta a_\Theta, \qquad T_\Theta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Последним осуществим поворот вокруг *z'* на угол φ. При этом оси (x_1 y_2 z') совместятся с осями (*x' y' z'*): и координаты вектора **a** образуют столбец a_0.

$$a_\Theta= T_\varphi a_0, \qquad (17)$$

Здесь T_φ имеет вид матрицы T_Ψ, но для угла φ:

$$T_\varphi=T_\Psi(\varphi) \qquad (18)$$

Мы показали, что координаты полюса А и углы Эйлера определяют положение тела. Таким образом шесть функций: $x_A(t), y_A(t), z_A(t);$ ψ(t), ϑ(t), φ(t) являются ***законом движения свободного тела***. Поэтому говорят, что свободное тело имеет 6 степеней свободы.

Попутно мы нашли выражение матрицы поворота *T* через углы Эйлера:

$$a(t)= T(t)\, a_0; \qquad T(t)=T_\Psi T_\Theta T_\varphi \qquad a_0=Const \qquad (19)$$

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Если матрица поворота тела задана через углы Эйлера, то угловую скорость тела **ω** в принципе можно найти из матрицы (19) по формуле (20). В результате громоздких вычислений найдем проекции угловой скорости на неподвижные оси:

$$\omega_x = \vartheta^* \cos\psi + \varphi^* \sin\psi \sin\vartheta; \quad \omega_y = \vartheta^* \sin\psi - \varphi^* \cos\psi \sin\vartheta; \quad \omega_z = \psi^* + \varphi^* \cos\vartheta \qquad (27)$$

Гораздо проще найти эти проекции, воспользовавшись теоремой о сложении угловых скоростей. Ее можно применить, поскольку каждый последующий поворот задан по оьношению к предыдущей системе координат. Тело совершает три вращения с угловыми скоростями $\psi^*\mathbf{k}$ вокруг оси z, $\vartheta^*\mathbf{i_1}$ вокруг оси x_1 и $\varphi^*\mathbf{k'}$ вокруг оси z'. По теореме:

$$\boldsymbol{\omega} = \psi^*\mathbf{k} + \vartheta^*\mathbf{i_1} + \varphi^*\mathbf{k'}$$

Проектируя это выражение на неподвижные оси, приходим к результату (27)

В отличие от вращательного движения тела, где **ω** направлен все время вдоль фиксированной оси вращения, здесь такой оси нет и вектор **ω** может изменять и модуль и направление.

Угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\omega/dt$$

направлено, как векторная производная, по касательной к годографу вектора **ω.** Поэтому, в отличие от вращательного движения **e** здесь не совпадает по направлению с **ω**.

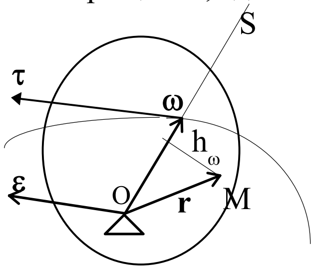

Рис.2

Скорость и ускорение точки тела

Выберем за полюс неподвижную точку О. Тогда скорость произвольной точки тела можно найти по формуле

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Отсюда следует, что на ***мгновенной оси*** S скорости в данный момент равны нулю, и линейно возрастают с удалением от S.

$$v = \omega h_w$$

Ускорение произвольной точки М

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{\mathbf{bp}} + \mathbf{w}^{\mathbf{oc}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

состоит из вращательной и осестремительной составляющих, которые при сферическом движении не ортогональны. Осестремительное ускорение по-прежнему направлено к мгновенной оси S, а вращательное по перпендикулярно плоскости (**ε r**).

Векторным формулам соответствуют матричные выражения скорости и ускорения, удобные для их вычисления в произвольный момент времени.

$$V = \Omega r$$

$$W = (\mathcal{E} + \Omega^2) r$$

Пример

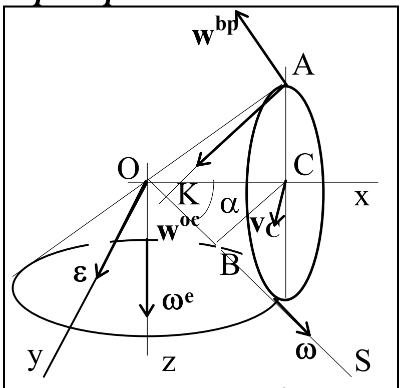

Рис.3

Подвижный конус обкатывается без проскальзывания по неподвижному. Определить скорость и ускорение верхней точки А конуса по заданным a, OA и скорости v_C центра основания подвижного конуса.

Ввиду отсутствия проскальзывания скорости точек образующей контакта в данный момент равны нулю и мгновенная ось (и угловая скорость) направлена вдоль этой образующей.

$$v_C = wh_w = wCB = wOASinaCosa$$

Отсюда

$$w = 2v_C/OASin2a \qquad v_B = wAK = 2v_C$$

Осесимметричное ускорение точки А направлено по АК и равно

$$w^{oc} = w^2AK = 4v_C^2/OASin2a$$

Угловое ускорение, как производная от постоянной по модулю угловой скорости, найдем по формул Эйлера

$$\boldsymbol{\varepsilon = \omega_e \times \omega}$$

где $\boldsymbol{\omega_e}$**-** угловая скорость вращения вектора $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси z

$$\omega_e = v_C/OC = v_C/OACosa$$

Таким образом

$$\varepsilon = \omega_e \omega Cosa = 2v_C^2/(OA^2\ Sin2a)$$

Вращательное ускорение $\mathbf{w^{bp}}$ направлено как **e×OA** перпендикулярно OA в плоскости xz.

$$w^{bp} = \varepsilon OA = 2v_C^2/(OA\ Sin2a)$$

Окончательно

$$w^2 = w^{bp2} + w^{oc2} - 2w^{bp}w^{oc}Cos2a$$

Движение свободного тела.

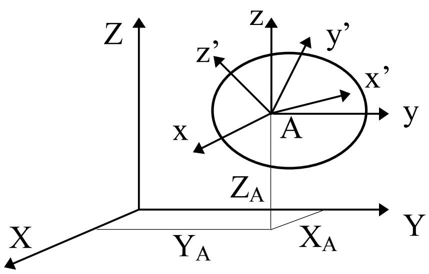

Рис.4

Рассмотрим свободное тело, движущееся относительно системы отсчета с осями *X Y Z* (Рис.1). Выберем в теле произвольную точку А (полюс) и поместим в ней начало осей *x y z* , параллельных *X Y Z* и движущихся поступательно. В том же полюсе А выберем начало осей *x' y' z',* связанных с телом .

Движение тела задано, если указан способ определения положения осей *x' y' z'*, в произвольный момент времени. Для этого достаточно определить положение начала А координатами $X_A(t)$, $Y_A(t)$, $Z_A(t)$. и поворот осей *x' y' z'* относительно *x y z*...Как известно, такой поворот можно задать тремя углами Эйлера. Таким образом шесть функций

$$X_A(t),\ Y_A(t),\ Z_A(t).$$
$$\psi(t)\ \theta(t)\ \varphi(t)$$

являются законом свободного движения твердого тела. Это значит, что свободное тело имеет 6 степеней свободы. Вспомним, что при поступательном движении тело имеет три степени свободы, при вращательном- одну и при плоском- три.

Заметим, что из первых трех функций по формулам кинематики точки можно найти скорость $\mathbf{V_A}$ и ускорение $\mathbf{W_A}$ полюса А, а по углам Эйлера- угловую скорость ω, и угловое ускорение ε тела.

Скорость произвольной точки тела найдем по теореме о распределении скоростей

$$\mathbf{V=V_A+\omega X\rho}$$

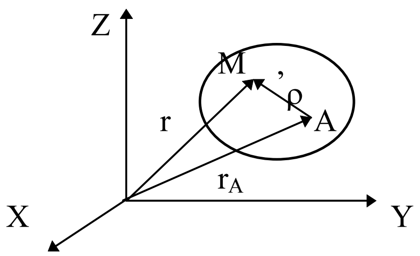

Рис.5

Ускорение произвольной точки тела найдем, дифференцируя эту теорему

$$d\mathbf{V}/dt=d\mathbf{V_A}/dt+d\omega/dt \; X \; \rho + \omega \; X \; d\rho/dt$$

Учитывая, что

$$d\mathbf{V}/dt=\mathbf{W}, \qquad d\mathbf{V_A}/dt=\mathbf{W_A}$$

$d\omega/\mathbf{dt} = \varepsilon$ - угловое ускорение тела

$$\mathbf{d}\rho/dt=\omega X\rho$$

как для “вектора в теле”.

Таким образом ускорение произвольной точки равно

$$\mathbf{W=W_A}+\varepsilon X\rho + \omega X(\omega X\rho\}$$

Последние два слагаемых уже встречались нам в сферическом движении. Как и там, назовем их вращательным и осестремительным ускорениями точки М при ее вращении вокруг полюса А.

Таким образом формулы скорости и ускорения показывают, что свободное движение тела можно представить как результат сложения двух движений: поступательного движения с полюсом А и сферического движения вокруг полюса.