Лекция 11

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

Динамика является основным разделом механики. Она изучает законы движения тел под действием приложенных сил. Уравнения статики вытекают из уравнений динамики как частный случай покоя тела. Кинематика же является просто языком описания движения тела (точки).

Простейшим объектом динамики является материальная точка, т. е. тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной траектории. Например даже Земля может быть принята за материальную точку, если рассматривать её движение вокруг Солнца.

Еще раз о принципах механики.

В статике мы уже сформулировали Принципы механики. Сейчас рассмотрим их трактовку и следствия для динамики

А-1. Принцип инерции Галилея (первый закон Ньютона).

Существует такая система отсчёта, в которой изолированная материальная точка сохраняет покой, либо равномерное прямолинейное движение (по инерции).

Изолированная точка- это точка, не взаимодействующая с другими точками. Очевидно, что понятие изолированной точки является абстракцией, найти такую точку невозможно. Однако это принципиальное понятие позволило Галилею понять, что для движения по инерции не требуется действия сил. Ведь до него люди считали, что для движения нужно прикладывать силу (ведь тележку нужно толкать), забывая о силах сопротивления.

Нет доказательств существования чисто инерциальных систем отсчета, очевидно это тоже является абстракцией. Однако экспериментально найдены системы, очень близкие к инерциальным. “Наиболее инерциальной” системой отсчёта может считаться гелиоцентрическая система отсчёта. Её центр в Солнце, а оси направлены на удалённые звёзды. Будет показано, что система отсчета, связанная с Землёй, не являются инерциальной. Однако погрешность выполнения законов Ньютона на Земле невелика.

А-2. Основной принцип.

Ускорение точки пропорционально действующей силе.

$$m*\mathbf{W}=F \quad \text{или} \quad \mathbf{W}=(1/m)*\mathbf{F} \qquad (1)$$

Здесь m- масса точки, скалярная постоянная величена. Это единственный количественный закон механики. Он связывает три величины m, **W,** и **F**, значит выражает одну из этих величин через две другие, независимые. Ускорение **W** с размерностью [W] всегда принимают за независимую величину, поскольку оно связывает базовые величины длины и времени.

В зависимости от того, что принимается за вторую независимую величину (m или F), возможны ***два типа размерности механических величин***:

1) Системы первого типа, в которых за вторую независимую величину принята масса m с размерности [m]. Примером такой системы может служить система СИ. В ней [W]=м/сек^2, [m]=кг, а производная единица силы называется Ньютоном:

   $$[F]=[m][w]=\text{Н}=\text{кг м/сек}^2$$

1) 2) Системы второго типа, в которых за вторую независимую величину принята сила. Примером такой системы может служить Техническая система. В ней [W]=м/сек^2, [F]=кГс, а производная единица силы называется Технической единицей массы:

   $$[m]=[F]/[w]=\text{ТЕМ}=\text{кГс сек}^2/\text{м}$$

Важно при решении задач все вычисления проводить в одной системе единиц. Напомним соотношение между единицами сил в двух системах.

$$1\text{кГс}=9{,}8\text{Н}$$

А-3. Принцип равенства действия и противодействия.

Две точки взаимодействуют с равными по модулю, противоположно направленными силами.

Нельзя говорить об уравновешенности этих двух сил, так как мы не знаем принадлежат ли эти точки одному телу или нет (Рис.1).

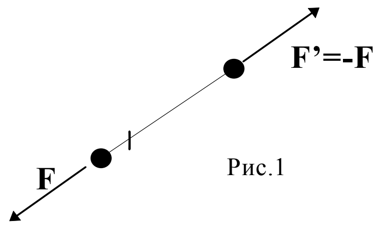

Рис.1

А-4. Принцип независимости действия сил.

Ускорение точки под действием системы сил {F} равно векторной сумме ее ускорений под действием каждой из сил системы

Если на точку действует система сил $\mathbf{\{F\}=\{F_1,F_2,...,F_n\}}$, то, согласно аксиоме, точка получает ускорение

$$\mathbf{W\{F\}}=\Sigma\mathbf{W(F_k)} \qquad (2)$$

Аксиома позволяет окончательно признать силу вектором, поскольку вводит правило сложения сил, приложенных к одной точке. Она утверждает, что действие системы сил эквивалентно действию одной силы **R**, равной сумме сил системы. Действительно, согласно второй аксиоме

$$\mathbf{W(F_k)}=(1/m)\,\mathbf{F_k}$$

$$\mathbf{W}=(1/m)*\Sigma\mathbf{F_k}=(1/m)*\mathbf{R}$$

$\mathbf{R}=\Sigma\mathbf{F_k}$ и называется равнодействующей системы **{F}**.

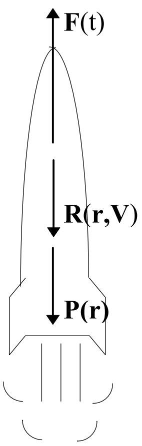

Рис.2

Силы в динамике могут быть, в отличие от статики, функциями положения точки (ее радиуса-вектора **r**), скорости **V** и независимой переменной- времени t.

$$\mathbf{F=F(r,V;}\ t) \qquad (3)$$

Рассмотрим, например, силы, действующие на ракету (Рис.2): сила тяжести зависит от расстояния до Земли **P(r)**, сила тяги двигателя есть функция времени **F**(t), сила сопротивления воздуха зависит от скорости ракеты и плотности атмосферы (расстояния до Земли) **R(r,V)**

Дифференциальные уравнения движения точки. Прямая и обратная задачи динамики точки.

Запишем второй закон Ньютона с учетом того, что ускорение точки есть вторая производная от радиуса-вектора по времени

$$m\mathbf{r}^{**}=\Sigma\mathbf{F}_k\,(\mathbf{r},\mathbf{r}^*;t) \qquad (4)$$

Выражение, связывающее обыкновенные производные искомой функции **r**(t) независимой переменной t называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Порядок высшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Уравнение ( ) является векторным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для решения задач уравнение (4) нужно записать в скалярном виде, то есть в проекциях на оси координат. Проектируя (4) на декартовы оси, находим дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} mx^{**} &= \Sigma\, F_{kx}(x,y,z;x^*,y^*,z^*;t) \\ my^{**} &= \Sigma\, F_{ky}(x,y,z;x^*,y^*,z^*;t) \qquad (5) \\ mx^{**} &= \Sigma\, F_{kx}(x,y,z;x^*,y^*,z^*;t) \end{aligned}$$

Эта система дифференциальных уравнений имеет шестой порядок.

Запишем еще уравнение (4) в проекциях на естественные оси τ n, b

$$m\sigma**=\sum F_{k\tau}$$
$$m\sigma*^2/\rho=\sum F_{kn} \quad (6)$$
$$0=\Sigma F_{kb}$$

Здесь учтено, что проекция ускорения на бинормаль b равна нулю.

Прямая и обратная задачи динамики точки.

Дифференциальные уравнения, например в виде (5) допускают постановку двух типов задач динамики точки:

1) ***Прямая задача динамики точки***

Определение равнодействующей сил, приложенных к точке по заданному закону ее движения. Пуст закон задан в декартовых координатах.

$$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \qquad R(t)\ -?$$

Решение этой задачи связано с дифференцированием закона движения. Проекции и модуль равнодействующей сил находим по формулам:

$$\begin{cases} Rx=mx** \\ Ry=my** \\ Rz=mz** \end{cases} \qquad (7)$$
$$R^2= R_x{}^2+R_y{}^2+R_z,$$

Пример прямой задачи:

Найти давление автомобиля весом P на мост радиуса R в верхней его точке, если скорость автомобиля V (Рис.3). Заметим, что давление тела на опору называется весом тела. Вес покоящегося автомобиля равен P. Требуется найти его вес в движении. По третьему закону Ньютона этот вес будет равен нормальной реакции моста N.

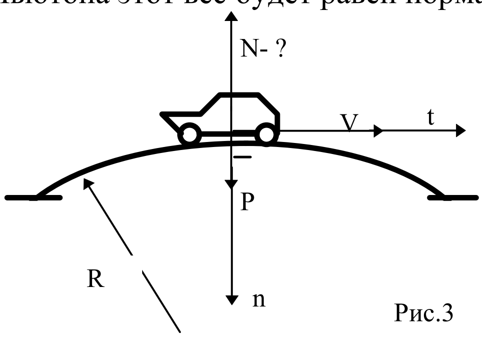

Рис.3

Поскольку траектория движения известна, нужно воспользоваться уравнениями в естественных осях:

В проекции на нормаль

$$(P/g)*(V^2/R)=P-N$$

Значит

$$N=(P/g)*(g-(V^2/R) \qquad (8)$$

Чаще встречается

2) ***Обратная задача динамики точки,***

когда по заданным функциям сил нужно найти закон движения точки.

В этом случае, уравнения в декартовых осях

$$mx**= \Sigma Fkx(x,y,z;x*,y*,z*;t)$$
$$my**= \Sigma Fky(x,y,z;x*,y*,z*;t) \qquad (9)$$
$$mz**= \Sigma Fkz(x,y,z;x*,y*,z*;t)$$

являются системой дифференциальных уравнениями для нахождения трех неизвестных функций времени t

$$x(t),\ y(t),\ z(t)$$

Решение этой задачи связано с интегрированием этой системы. Система имеет шестой порядок. Значит при интегрирование возникнут шесть постоянные интегрирования и решение (второй интеграл уравнений) будет иметь вид:

$$x=x\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6)$$
$$y=y\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6) \qquad (10)$$
$$z=z\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6)$$

Наличие постоянных интегрирования указывает на то, что у системы (9)есть множество решений, Иначе говоря силы не определяют однозначно движение точки.   Одним и тем же силам могут соответствовать разные траектории движения.

Например движение камня под действием одной и той же траектории может происходить по разным траекториям в зависимости от того как его бросить (Рис.4).   Произвольные постоянные интегрирования определяются из начальных условий движения.

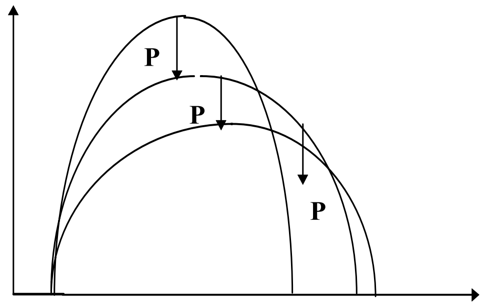

Рис.4

$$t=0:\quad \begin{array}{ll} x=x_0 & x^*=x_0^* \\ y=y_0 & y^*=y_0^* \\ z=z_0 & z^*=z_0^* \end{array} \qquad (11)$$

Что бы определить постоянные интегрирования нужно подставить эти условия в решение (10) и его производную (первый интеграл уравнений)

$$\begin{array}{l} x^*=x^*\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6) \\ y^*=y^*\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6) \\ z^*=z^*\ (t;C_1\ C_2\ \ C_3\ C_4\ C_5\ C_6) \end{array} \qquad (12)$$

Получим алгебраическую систему относительно постоянных C_1,...C_6 которая всегда имеет единственное решение.

Таким образом движение точки полностью определяется силами и начальными условиями.