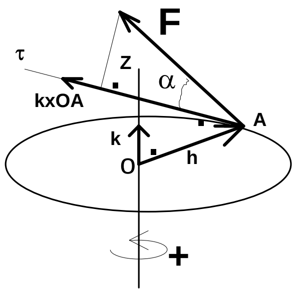
Лекция 2

Момент силы относительно оси

Лемма о проекциях позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику силы по отношению к оси. Определение. ***Моментом силы F относительно оси z*** называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

$$m_z(F)=\text{пр}_z\mathbf{m_A(F)} \qquad \text{(А принадлежит z)} \qquad (17)$$

Рассмотрим способ вычисления и свойства момента. Пользуясь произволом выбора центра моментов на оси, выберем в качестве такового т.О- проекцию точки А приложения силы на ось z. Обозначив через **к** орт оси z, и применив круговую перестановку в смешанном произведении, запишем



$$m_z(F)=\mathbf{k.(OAxF)=(kxOA).F}=hFCosa \qquad (18)$$

Здесь учтено, что ввиду взаимной перпендикулярности векторов **k** и **OA,** модуль произведения **kxOA** равен расстоянию ОА точки приложения сил до оси.

Формула показывает, что:

а) Момент относительно оси дает только составляющая силы, направленная по касательной t к окружности радиуса h.

б) Знак момента определяется знаком Cosα. Из Рис.8 вытекает следующее правило знаков: *Момент силы относительно оси положителен, если с конца оси видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.*

Рис.8

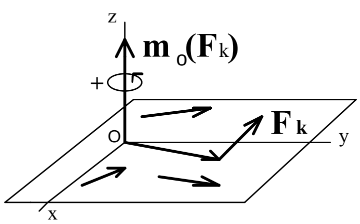
Нарисовать подшипники

Из формулы (12) вытекает, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если сила и ось лежат в одной плоскости (a=π/2). Это происходит, когда

1) сила параллельна оси
2) линия действия силы пересекает ось

Вы это ощущаете, поднимая воротом ведро из колодца, и поэтому стараетесь приложить силу руки так, чтобы создать большее плечо.

Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.



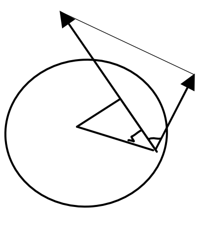
Система сил, расположенных в одной плоскости, называется ***плоской***. Расположим в плоскости действия сил оси ху с началом в произвольной точке О плоскости. В этом случае силы создают момент только относительно оси z, перпендикулярной плоскости действия сил.

Располагая силы на плоскости листа, читатель видит ось как точку О и называет момент относительно этой оси ***алгебраическим моментом силы относительно точки О***

Рис.1

$$m_o(F)=m_z(F) = \underline{+}F_\tau\,OA =FCos\beta OA= FSin\alpha OA= \underline{+}Fh \qquad (21)$$

Правило знаков: Момент положителен, если видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.



Главный момент системы сил. Зависимость главного момента от центра.

Определение: ***Главным моментом*** системы сил {F} относительно центра О называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно этого центра.

$$\mathbf{M_A=\Sigma m_A(F_k)} \qquad (2)$$

Практически, главный момент находят по его проекциям на декартовы оси. Эти проекции логично назвать главными моментами относительно осей x, y, z.

$$M_A{}^2=M_x{}^2+M_y{}^2+M_z{}^2; \qquad M_x=\Sigma m_x(F_k); \; M_y=\Sigma m_y(F_k); \; M_z=\Sigma m_z(F_k)$$

$$\text{Cos}(\mathbf{M_A}x)=M_x/M_A; \qquad \text{Cos}(\mathbf{M_A}y)=M_y/M_A; \qquad \text{Cos}(\mathbf{M_A}z)=M_z/M_A \qquad (3)$$

Найдем зависимость между главными моментами относительно двух центров А и В. Суммируя полученную ранее зависимость для одной силы по всем силам системы, получим:

$$\mathbf{\Sigma m_A(F_k)=\Sigma m_B(F_k)+ABx\Sigma F_k} \qquad \mathbf{M_A=M_B+ABxV} \qquad (4)$$

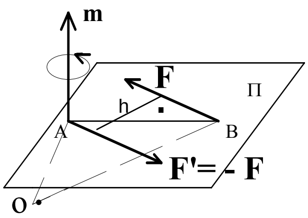
Здесь учтено определение главного вектора V.

Поступательная и Вращательная системы сил. Пара сил.

Назовем систему сил ***поступательной***, если ее главный момент относительно центра тяжести однородного тела равен нулю. Как мы увидим в динамике, такая система не влияет на вращение тела. Покоящееся тело она может переместить только поступательно (без поворота).

Одна сила может повернуть тело только при наличии момента относительно опоры (или центра тяжести тела). Однако системы сил с **V=0** способны вращать тело без всяких опор. Назовем такую систему сил ***вращательной системой.*** Действительно, формула (4) показывает, что главный момент вращательной системы не зависит от центра.

Простейшей вращательной системой является ***пара*** сил: система двух равных по модулю противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой.



Расстояние h между линиями действия сил пары называется плечом пары. Главный вектор сил пары очевидно равен нулю, поэтому ее главный момент не зависит от центра, называется ***моментом пары m*** и может быть найден как момент одной из сил пары относительно точки приложения второй силы.

Рис.2 $$\mathbf{M_O\{F,F'\}=m=m_A(F)=m_B(F')} \qquad (7)$$

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен в сторону, откуда видно, что пара стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Условия сохранения покоя дискретной механической системы.

Дискретная механическая система состоит из материальных точек. Покой системы подразумевает покой каждой из ее точек. Поэтому логично сначала изучить условия покоя материальной точки. Они вытекают из принципов механики.

Принципы (аксиомы) механики. Условия сохранения покоя точки.

Как все точные науки, механика базируется на недоказуемых постулатах, вытекающих из опыта и называемых аксиомами. Являющиеся плодом размышлений многих поколений исследователей, аксиомы были окончательно сформулированы Исааком Ньютоном в 17 веке и поэтому носят его имя.

1. ***Принцип инерции Галилея***

Существует система отсчета, называемая инерциальной, в которой изолированная точка сохраняет состояние покоя (или прямолинейного равномерного движения).

Система отсчета - это “жесткое” трехмерное ориентированное пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять в нем расстояния и время.

Изолированной называется точка, не взаимодействующая с другими точками.

Все законы механики формулируются и справедливы только в инерциальной системе отсчета. Следует заметить, что важная для нас система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной.

2. Основной принцип (второй закон Ньютона)

Ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе.

$m\mathbf{W}=\mathbf{F}$, если масса точки m постоянна (8)

Следствие 1: Действие силы **F** на точку проявляется в ускорении точки **W** . Силы, вызывающие одинаковые ускорения, назовем ***эквивалентными***.

Следствие 2*:* Основной принцип связывает ускорение (движение) и силу (действие). Это значит, что задать одновременно и то и другое невозможно. Если задано движение (ускорение), то сила является искомой. Если задана сила, то искомым является движение.

3. Принцип внешней аддитивности воздействий

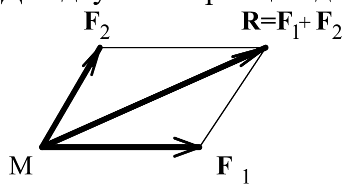
Воздействие среды на точку равно сумме воздействий частей среды.

Для простоты в качестве системы рассмотрим одну точку М, а внешний мир представим материальными точками числом n. Воздействие внешней точки $M_к$ на точку М обозначим $\mathbf{F_k}$. Принцип утверждает, что n воздействий $\mathbf{F_k}$ эквивалентны одному воздействию **F**, равному их сумме.

$$\mathbf{F}=\Sigma\, \mathbf{F_k}$$

Сила **F** называется ***равнодействующей*** силой системы сил $\mathbf{F_k}$

Для двух сил принцип дает правило параллелограмма



Следствия:

а) Второй закон Ньютона теперь можно записать для случая действия на точку нескольких сил.

$$m\mathbf{W}=\Sigma\mathbf{F_k}$$

б) В покое остается не только изолированная точка, но и точка под действием сил, сумма которых равна нулю. Таким образом, ***необходимым и достаточным условием равновесия сил, приложенных к точке***, является

$$\Sigma\mathbf{F_k}=\mathbf{0} \qquad (11)$$

4. Принцип внутренней аддитивности воздействий (третий закон Ньютона). Свойства внутренних сил.

Воздействие среды на материальную систему равно векторной сумме ее воздействий на части системы.

Для простоты рассмотрим материальную систему двух точек M_1 и M_2. Обозначим равнодействующие воздействия внешнего мира на M_1 через $\mathbf{F_1}$ а на M_2 через $\mathbf{F_2}$ **.** Кроме внешнего воздействия, точки взаимодействуют между собой. Обозначим воздействие точки M_1 на M_2 через $\mathbf{F_i}$ а M_2 на M_1 через $\mathbf{F_i'}$

Таким образом, согласно принципу, воздействие на систему равно $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$**.** Воздействие на точку M_1 равно $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_i'}$**.** Воздействие на точку M_2 равно $\mathbf{F_2} + \mathbf{F_i}$**.** Согласно принципу $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_i'}+ \mathbf{F_2} + \mathbf{F_i} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$

Отсюда вытекает $\mathbf{F_i'}+ \mathbf{F_i} = \mathbf{0}$ или известный из физики «принцип равенства действия и противодействия»: ***Силы взаимодействия двух точек равны по модулю, противоположны по направлению и лежат на прямой, проходящей через точки.***

$$\mathbf{F_i'}=-\mathbf{F_i}$$

Силы взаимодействия точек материальной системы называются внутренними (индекс **i**).

Свойство 1 По 3му закону все внутренние силы парны, значит их главный вектор и главный момент равны нулю.

$$\mathbf{V^i = 0, \quad M^i_O = 0}$$

Свойство 2 Согласно принципу 2 нельзя одновременно задать силу и перемещение. Поскольку в твердом теле расстояния между точками фиксированы, то внутренние силы в твердом теле принципиально неопределимы.

Предположение

Попытаемся представить какие наблюдения могли привести к формулеровке принципов.

Вот лодка после гребка гондольера легко и, кажется, бесконечно долго скользит по зеркальной поверхности озера в Италии. Возникает идея первого принципа- равномерное движение по инерции.

Вот рыбаки, побеседовав, отталкиватся друг от друга и их лодки скользят в противоположных направлениях, проходя разные расстояния за одно и то же время, большая меньше, меньшая- больше. Рыбаки ощущают одинаковые, но противоположно направленные усилия на руках (3й закон). Одинаковые по интенсивности усилия вызывают разные движения (ускорения), обратно пропорцианальные весу (размеру) лодок. Вот и второй принцип.

5.