Лекция 3

Условия покоя произвольной дискретной механической системы
Необходимые условия равновесия внешних сил системы.

Рассмотрим дискретную систему **n** материальных точек. Система находится в покое, если все ее точки находятся в покое. При этом силы, действующие на каждую точку, находятся в равновесии.

Обозначим через $\mathbf{F_k}^e$ равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с номером **к**, а через $\mathbf{F_k}^i$- равнодействующую внутренних сил этой точки. Из аксиом вытекает, что условия

$$\mathbf{F_k}^e + \mathbf{F_k}^i = \mathbf{0} \qquad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (12)$$

обеспечивают покой системы и являются ***неоходимыми и достаточными условиями*** равновесия сил, приложенных к произвольной дискретной механической системе.

Если система находится в покое, то любая комбинация или часть условий (12) выполняется, и, значит, является необходимым, но недостаточным условием равновесия.
Внутренние силы системы обычно являются неизвестными, поэтому особый интерес представляют комбинации условий (12), исключающие эти силы. Свойства парности внутренних сил позволяют составить такие комбинации.

Суммируюя (12) по k, и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

$$\mathbf{V}^e = \mathbf{0}$$

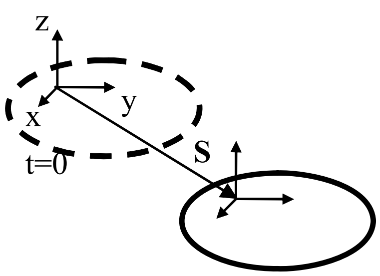
Векторно умножив слева (12) на радиус-вектор точки $\mathbf{r_k}$, после суммирования получим второе условие

$$\mathbf{M_o}^e = \mathbf{0}$$

Оба условия касаются только внешних сил системы и являются ***необходимыми, но не достаточными*** условиями покоя ***произвольной механической системы***. Это значит, что если система находится в покое, то условия выполняется. Обратное не верно. Далее покажем, что эти условия являются также **и достаточными** условиями покоя для твердого тела.

Условия сохранения покоя твердого тела

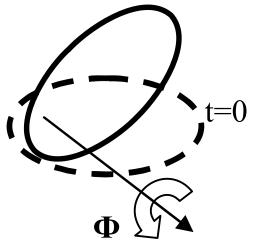
Два типа перемещений – два векторных условия покоя твердого тела.
Нагрузка и реакции связи. Прямая задача статики



Свободное твердое тело может совершить 2 типа перемещений, принципиально разной природы: перенос и поворот.

Перенос- это перемещение, при котором оси координат, связанных с телом, не изменяют своего направления. При этом все точки перемещаются на одно и то же расстояние S и в одном направлении. Такое перемещение можно описать вектором переноса **S**.

Второй тип перемещения - это поворот тела вокруг некоторой оси, который можно изобразить дуговой стрелкой вокруг оси поворота, длина которой соответствует углу поворота. Направление дуговой стрелки показывает направление поворота. Повороту можно сопоставить аксиальный вектор **Ф** по правилу правого винта. Покоем тела по отношению к данной системе отсчета является отсутствие двух векторных перемещений переноса и поворота тела. Значит, число векторных условий покоя тела должно быть равно двум, в чем мы вскоре убедимся.



Изучаемое тело взаимодействует с телами среды, окружающей тело. Тела среды могут действовать, не ограничивая перемещений тела (дальнодействие), либо ограничивая их (контактное взаимодействие).

Дальнодействие создается гравитационным или электромагнитным полем среды. Оно определяется законами физики, поэтому его силы считаются заданными. Все заданные силы назовем ***нагрузкой***.

Контактное взаимодействие может задавать нагрузку либо перемещения точек тела. Так с помощью нити можно создать контактную силу нагрузки.

Неподвижные тела среды, контактирующие с изучаемым телом, называются ***связями***. Силы, с которыми связи действуют на тело, называются ***реакциями связи.*** По второму принципу, поскольку связи задают перемещения, то силы реакций являются искомыми.

Прямой задачей статики является определение реакций связей по нагрузке из 6ти условий покоя тела.

Статически определимые связи.

Рассмотрим тело, покой которого обеспечен связями при произвольной нагрузке. Такие связи называются **достаточными**.

Снимем нагрузку. Тело осталось в покое под действием реакций связей. Поскольку покой сохраняется, то с необходимостью выполняются условия равновесия реакций:

$$\mathbf{V^R=0,\ M_o{}^R=0}.$$

В осях x,y,z два векторных условия эквивалентны однородной системе шести алгебраических уравнений в проекциях.

$$Ax=0$$

Здесь A- матрица системы, x- столбец искомых сил связей

В статике ***твердого тела*** рассматривают только такие достаточные связи, реакции которых исчезают при снятии нагрузки. Такие связи называются **статически определимыми**. Остальные связи называются **избыточными**.

Таким образом, чтобы связи были статически определимыми, необходимо, чтобы система имела только тривиальное (нулевое) решение. Известно, что для этого алгебраическая система должна иметь 6 неизвестных и ее определитель должен быть отличен от нуля. Заметим, что это условие является также и условием единственности решения неоднородной системы при наличии нагрузки.

$$Ax=b$$

Это значит, что в квадратной матрице *A* не должно быть линейно зависимых столбцов. Такие столбцы появятся, только если две силы реакции смогут оказаться на одной прямой

Избыточность связей имеет простое **физическое объяснение.** Она возникает, когда внешние связи дублируют внутренние связи тела, обеспечивающие неизменность расстояния между точками тела и углов между двумя направлениями в теле.

Наличие избыточных связей можно выявить двумя мысленными экспериментами: нагревая тело или немного смещая опоры. Если при этом реакции изменяются, то связи избыточны.

Векторные условия сохранения покоя твердого тела.

Рассмотрим покоящееся свободное твердое тело без связей. Приложим к телу нагрузку в виде системы внешних сил **{F}.** Систему **{F}** назовем ***уравновешенной,*** если тело останется в покое.

Теорема Необходимым и достаточным условием уравновешенности системы сил, приложенной к твердому телу, является равенство нулю ее главного вектора и главного момента.

$$\mathbf{V=0;\ \ M_O=0} \quad (2)$$

Необходимость условий (2) для любой механической системы была доказана выше. Но для деформируемого тела они недостаточны. Так нить остается в покое под действием двух растягивающих сил, но она сминается, если поменять направление этих сил, хотя условия (2) останутся выполненными.

Достаточность условий для твердого тела.

Приложим к покоящемуся свободному телу систему сил **{F},** удовлетворяющую условиям (2). Покажем, что тело останется в покое, т.е. система **{F}** уравновешена.

Предположим противное, т.е. что тело все-таки начнет двигаться. Чтобы остановить движение, наложим на тело статически определимые связи. Они достаточны, поэтому покой тела под действием произвольной нагрузки и реакций связей будет обеспечен. Значит объединенная система заданных сил **{F}** и реакций связей **{R}** является уравновешенной и с необходимостью:

$$\mathbf{V+V^R=0,}$$
$$\mathbf{Mo+Mo^R=0}.$$

Тогда ввиду (2) главный вектор и момент реакций должен быть равен нулю

$$\mathbf{V^R=0 \quad Mo^R=0}$$

Поскольку связи статически определимы, то это условие означает, что все реакции равны нулю. Таким образом, связи не нужны, а тело и так остается в покое после приложения системы **{F}**. Значит условия (2) являются достаточными для равновесия системы сил **{F}**. Теорема доказана.

Скалярные условия равновесия частных систем сил. Две задачи статики

а) Произвольная пространственная система сил

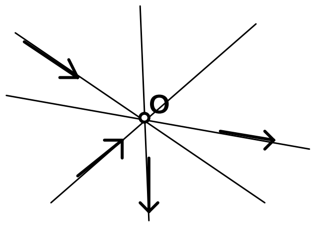
Хотя соотношения механики имеют векторный характер, все вычисления должны вестись в скалярной форме. Переход к скалярной форме осуществляется проектированием векторных соотношений на оси координат. Векторные условия равновесия **V=0, M$_\mathbf{O}$=0** в проекциях на декартовы оси координат дают шесть скалярных условий:

$$V_x=\Sigma F_{kx}=0; \qquad M_x=\Sigma m_x(F_k)=0;$$
$$V_y=\Sigma F_{ky}=0; \quad M_y=\Sigma m_y(F_k)=0; \qquad (1)$$

$$V_Z=\Sigma F_{kZ}=0;\ M_Z=\Sigma m_Z(F_k)=0;$$

б) Пространственная система сходящихся сил.

Сходящейся называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Главный момент такой системы относительно точки пересечения сил О равен нулю



Mo=0. Поэтому уравнения моментов в (1) тождественно удовлетворяются и остается три условия в проекциях:

$$V_X=0;\ V_Y=0;\ V_Z=0 \qquad (2)$$

б") Плоская система сходящихся сил.

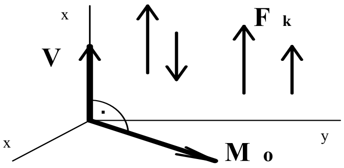
Рис.1

Совместим плоскость xy с плоскостью действия сил. Тогда последнее уравнение в (2) тождественно удовлетворяется и остается два скалярных условия

$$V_X=0;\ V_Y=0; \qquad (3)$$

в) Пространственная система параллельных сил

Направим ось z параллельно силам. Тогда главный вектор **V** будет параллелен z, а главный момент $\mathbf{M_o}$, будет принадлежать плоскости x y и, значит, перпендикулярен **V**. Для



равновесия достаточно потребовать:

$$V_Z=\Sigma F_{kZ}=0 \quad M_X=\Sigma m_X(F_k)=0 \quad M_Y=\Sigma m_Y(F_k)=0 \qquad (4)$$

в") Плоская система параллельных сил

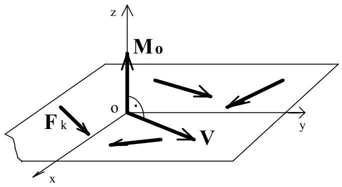
Совместим плоскость zy с плоскостью действия сил. Тогда

Рис.2

последнее уравнение в (4) тождественно удовлетворяется и остается два скалярных условия, причем момент относительно оси z для плоской системы называется алгебраическим моментом относительно точки О.

$$V_Z=\Sigma F_{kZ}=0 \quad M_o=\Sigma m_o(F_k)=0 \qquad (5)$$

г) Плоская система сил.



В произвольной точке О плоскости сил (Рис.3) построим систему координат xOy. Главный вектор системы лежит в плоскости xOy, а главный момент ей перпендикулярен. Следовательно для равновесия системы достаточно потребовать

$$V_X=0 \quad V_Y=0 \quad M_Z\equiv M_O=\Sigma m_O(F_k)=0 \qquad (6)$$

Легко показать, что справедливы еще две формы уравнений

Рис.3

равновесия для плоской системы сил:

$$2)\ V_X=0;\ \ M_A=0;\ M_B=0\ \ (AB \# x) \qquad (7)$$

$$3)\ M_A=0;\ M_B=0;\ M_C=0\ \ (ABC\text{- не на одной прямой}) \qquad (8)$$

Прямая задача. Рассматривается тело, зафиксированное статически определимыми связями, и находящееся под действием заданной нагрузки. Требуется найти реакции связей.

В этом случае выражения (9) являются полной системой уравнений для определения реакций. Перенеся заданные силы направо, запишем уравнения равновесия в виде неоднородной алгебраической системы:

$$\begin{aligned}
&\Sigma R_{kx}=-\Sigma F_{kx}=-V_x^a && \Sigma m_x(R_k)=-\Sigma m_x(F_k)=-M_x^a \\
&\Sigma R_{ky}=-V_y^a && \Sigma m_y(R_k)=-M_y^a \qquad (10)\\
&\Sigma R_{kz}=-V_z^a && \Sigma m_z(R_k)=-M_z^a
\end{aligned}$$

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$Ax=b \qquad (11)$$

Поскольку связи статически определимые, то определитель матрицы А отличен от нуля, и система имеет единственное решение. Такая задача называется ***статически определимой***.

Обратная задача. Свободное покоящееся тело нагружают системой сил. Требуется выяснить, останется ли тело в покое. Ответ положительный, если система сил удовлетворяет условиям равновесия.