

Лекция 4

Эквивалентные преобразования сил, приложенных к твердому телу.

Теорема о статической эквивалентности двух систем сил.

Статически эквивалентными назовем нагрузки, вызывающие одинаковые реакции статически определимых связей. Поскольку для таких связей уравнения равновесия имеют единственное решение, определяемое правой частью, в которой находятся проекции главного вектора и момента нагрузки, то отсюда вытекает справедливость **теоремы об эквивалентности**

Необходимым и достаточным условием статической эквивалентности двух систем сил $\{F\}$ и $\{Q\}$ является равенство их главных векторов и главных моментов.

$$\{F\} \sim \{Q\} \text{ если } V\{F\} = V\{Q\}; M_O\{F\} = M_O\{Q\} \quad (12)$$

Если существует одна сила, эквивалентная всей системе сил, то она называется **равнодействующей**. Например, как следует из аксиом механики, система сил, действующих на точку, эквивалентна равнодействующей, равной векторной сумме сил. Для твердого тела класс эквивалентных сил значительно шире.

Было показано, что **уравновешенные** нагрузки не вызывают реакций. Значит, все уравновешенные системы эквивалентны друг другу и пустой системе (нулю). Например, система сил, приложенных к мосту (сила тяжести автомобиля и две реакции опор) является уравновешенной при любом положении автомобиля на мосту, т. к. мост остается в покое.

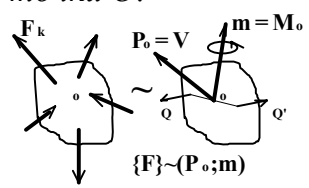
Замена системы сил на эквивалентную систему называется **эквивалентным преобразованием** системы сил. Для произвольной механической системы существует единственное эквивалентное преобразование систем сил: сложение и разложение сил, действующих на любую точку системы.

Модель твердого тела допускает более существенные эквивалентные преобразования, значительно упрощающие исходную систему сил. В примере с автомобилем, движущимся по мосту, система трех сил претерпевает эквивалентное преобразование: реакции изменяются так, чтобы компенсировать изменение положения силы тяжести автомобиля и оставить мост в покое.

Теорема Пуансо.

Пусть к телу приложена произвольная система сил $\{F\}$. Следующая теорема отвечает на вопрос какая простейшая система ей эквивалентна.

Произвольная система сил $\{F\}$ эквивалентна **торсору** $\{P_O; m\}$, состоящему из одной силы P_O , равной главному вектору системы $V\{F\}$, и приложенной в произвольной точке O , - и пары $\{Q, Q'\}$ с моментом m , равным главному моменту системы $M_O\{F\}$ относительно точки O .



$$\{F\} \sim (P_O; m): \quad P_O = V\{F\}; \quad m = M_O\{F\} \quad (1)$$

Для доказательства теоремы вычислим главный вектор и главный момент торсора:

$$V\{P_O; Q, Q'\} = P_O + Q + Q' = P_O = V\{F\} \quad (Q + Q' = 0) \quad (2)$$

$$M_O\{P_O; Q, Q'\} = m_O(P_O) + m = m = M_O\{F\} \quad (m_O(P_O) = 0)$$

Рис.1

Видим, что они соответственно равны главному вектору и главному моменту исходной системы $\{F\}$, значит теорема верна.

Операция эквивалентного преобразования системы к силе и паре называется **приведением системы к точке**.

Поступательная и Вращательная системы сил

Особый интерес представляет приведение системы к центру масс (тяжести) твердого тела.

Главный вектор (и сила приведения) не зависит от центра, и характеризует способность системы сил перемещать тело без поворота. Если он равен нулю, то система является чисто *вращательной*. После приложения такой системы к покоящемуся телу, его центр тяжести останется неподвижным.

Главный момент относительно центра масс характеризует вращательные способности системы сил. Если он равен нулю, то система является чисто *поступательной*, она приводит покоящееся тело в движение без поворота (поступательное). Поступательной системой является, очевидно, система сил тяжести, причем, независимо от ориентации тела.

Замечание о реакциях связей.

Контактное взаимодействие со связью распределено по некоторой малой площадке. Найти это распределение из бти уравнений статики невозможно ввиду бесконечного числа неизвестных. Сделать число неизвестных конечным позволяет теорема Пуансо, позволяющая заменить распределенные силы одной силой и одним моментом реакции.

Условия существования и реализуемости равнодействующей. Теорема Вариньона

Как известно, равнодействующей системы сил $\{F\}$ называется одна сила R , эквивалентная системе. Предположим, что система имеет равнодействующую R . Тогда по теореме об эквивалентности она должна быть равна главному вектору системы

$$R = V\{F\}. \quad (3)$$

Поэтому первым условием существования равнодействующей будет существование главного вектора:

$$V \neq 0. \quad (4)$$

Кроме того, по той же теореме:

Момент равнодействующей относительно произвольной точки равен главному моменту системы сил относительно той же точки.

Это свойство равнодействующей называется *теоремой Вариньона*.

Найдем условие существования равнодействующей. Поскольку момент равнодействующей (а значит и главный момент системы) перпендикулярен самой равнодействующей (главному вектору) то условием существования равнодействующей будет существование главного вектора и его перпендикулярность главному вектору системы.

$$V \neq 0; \quad M_0 \bullet V = 0 \quad (M_x V_x + M_y V_y + M_z V_z = 0) \quad (5)$$

Отметим, что равнодействующая имеет практический смысл, когда она реализуема, то есть ее можно приложить к телу. Это так, если линия ее действия как минимум пересекает тело. Равнодействующую сил тяжести бублика, расположенного в горизонтальной плоскости, легко нарисовать, но трудно реализовать.

Как было показано, главный момент плоской системы сил или системы параллельных сил всегда перпендикулярен главному вектору. Значит, такие системы имеют равнодействующую, если $V \neq 0$. Заметим, что эту равнодействующую не всегда можно реализовать. Например, минимальное изменение одной из сил пары моментально приведет к равнодействующей, которая, правда, будет бесконечно удалена от тела, что делает невозможным ее приложить к телу.

Очевидной и реализуемой равнодействующей системы реакций связей (даже избыточных) для тела, нагруженного одной силой F , является сила $-F$ на той же линии.

Эквивалентные преобразования силы и пары сил в твердом теле.

Сила.

По теореме об эквивалентности две эквивалентные силы должны быть векторно равны и давать одинаковый момент относительно произвольного центра. Очевидно, что для этого они должны иметь общую линию действия. **Таким образом, силу в теле можно переносить только вдоль ее линии действия.**

Сила тяжести, перемещаясь вместе с автомобилем по мосту (Рис.6) изменяет реакции опор, значит, параллельный перенос силы не является ее эквивалентным преобразованием.

Важно заметить, что перенос силы вдоль резинки изменит состояние резинки, значит, такой перенос не является эквивалентным в деформируемом теле.

Пара сил

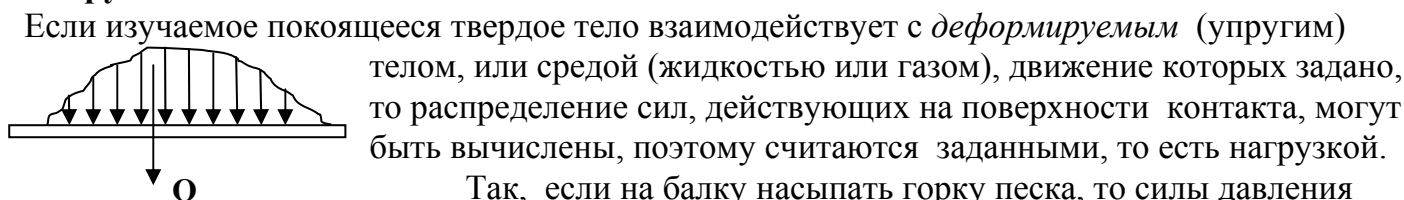
Главный вектор пары равен нулю, а ее главный момент не зависит от центра. Таким образом, эквивалентны все пары с векторно-одинаковыми моментами. Значит, **в твердом теле с парой можно делать все, что не изменяет вектора ее момента**, в том числе: изменять силу и плечо, не изменяя их произведение; поворачивать пару в ее плоскости и переносить пару в параллельную плоскость.

Такие преобразования пары в *деформируемом теле* приведут к изменению его состояния (деформации), а значит, не будут эквивалентными. Так перенос пары вдоль закручиваемой резинки изменит угол ее закручивания.

Контактное взаимодействие тел. Приведенные контактные силы.

Все полученные результаты приложимы к сплошному твердому телу. При контакте сплошных тел особое место занимает теорема Пуансо. Она позволяет заменять силы, распределенные по поверхности контакта, одной силой и моментом.

Нагрузка.



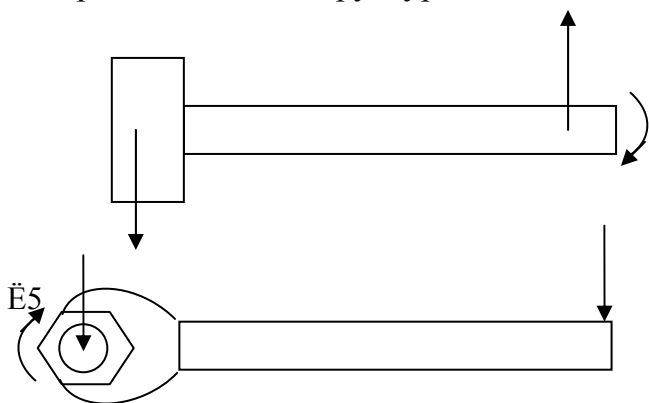
Если изучаемое покоящееся твердое тело взаимодействует с *деформируемым* (упругим) телом, или средой (жидкостью или газом), движение которых задано, то распределение сил, действующих на поверхности контакта, могут быть вычислены, поэтому считаются заданными, то есть нагрузкой. Так, если на балку насыпать горку песка, то силы давления песка на балку будут сонаправлены, и их интенсивность будет повторять форму горки в первом приближении. Такое действие, силы которого имеют одинаковое направление, называется **односторонним**.

Примечательно, что при одностороннем действии, на выпуклой площадке контакта всегда найдется точка, относительно которой главный момент сил действия равен нулю. Значит, такие силы можно заменить равнодействующей Q , приложенной в этой точке.

Когда сплошное твердое тело контактирует с другим твердым телом, найти распределение усилий на поверхности контакта нельзя принципиально, поскольку неопределима даже структура контакта. Однако, как мы теперь знаем, на покой тела влияет

не конкретное распределение сил, а их главный вектор и главный момент относительно одной из точек контакта. Назовем их **контактными силой и моментом**.

Так распределение усилий между ключом и гайкой задать невозможно и не



нужно. Достаточно задать силу и момент в этом контакте.

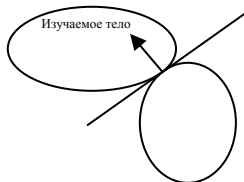
А они заданы, поскольку эквивалентны силе давления руки на ключ. Здесь ключ выступает в роли преобразователя усилий руки в силу и момент на гайке. Обратное преобразование совершает ручка молотка. Здесь уместно заметить, что любое тело без массы (массой ключа можно пренебречь) выполняет именно такую роль, даже в динамике.

Реакции связей.

Если контактирующее тело неподвижно, то оно ограничивает перемещения изучаемого тела и является связью. Реакции связей являются искомыми силами. Из шести уравнений равновесия можно найти только 6 неизвестных.

Например, в жесткой заделке, которая, конечно, является достаточной связью, контактная сила и момент могут быть направлены произвольно и создают 6 неизвестных.

При менее «жесткой» связи тел в контакте, сила и момент контакта могут иметь более определенное направление (плоскость или линию действия). Их направление определяется простым **правилом**: Составляющая контактной силы или момента в направлении, вдоль (вокруг) которого относительное перемещение (поворот) контактирующих тел не стеснено- отсутствует.



Так при свободном скольжении одного тела по другому нет препятствия повороту, а, значит, нет момента. Также нет препятствий взаимному перемещению тел в касательной плоскости в точке контакта. Значит, нет соответствующих составляющих силы. Таким образом, в контакте гладких тел возникает одна сила, нормальная к

касательной плоскости.