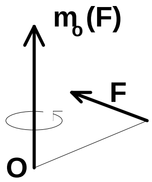
Лекция 5

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Системы отсчета

Кинематика- раздел механики, в котором изучаются способы описания движения точек и твердых тел. Движение изучается по отношению к определенной системе отсчета- “жесткое” трехмерное ориентированное пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий различать все точки и направления в этом пространстве и измерять в нем расстояния и время. *Жесткое*- значит, что расстояния между точками (а значит и углы между направлениями) не изменяются с течением времени.



Ориентированное пространство- значит наблюдатель принял одно из двух возможных правил соответствия прямой и дуговой стрелок: правого или левого винта.

Например в право ориентированной системе отсчета направление вектора момента силы относительно точки (Рис.1) определяется по правилу правого винта: с конца $\mathbf{m_o}$ видно , что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Рис.1

Для численного описания явления наблюдатель связывает со своей системойкоординатные оси. Произвольная точка системы может быть обозначена именем (например M) или координатами. Изменение системы координат не изменяет точки системы, и не влияет на результат физических опытов наблюдателя.

Время t считается скаляром, монотонно возрастающим с момента t=0, называемого ***начальным моментом***. В классической механике время считается одинаковым во всех системах отсчета.

Способы задания движения точки

Задать движение значит указать способ определения положения точки в пространстве. Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ.

Этот способ является основным, поскольку большинство характеристик движения являются векторными величинами. Обозначим через O точку системы отсчета, где находится наблюдатель. Тогда положение изучаемой точки M по отношению к наблюдателю O в данный момент времени t можно задать ее радиусом вектором $\mathbf{r}(t)$.

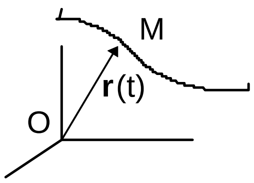


Рис.2

Вектор- функция $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента t называется векторным законом движения точки M. С течением времени направление и модуль радиуса -вектора $\mathbf{r}(t)$ изменяются и точка M описывает кривую, называемую ***траекторией точки.***

Годографом вектор-функции называется кривая, которую описывает конец вектора при изменении скалярного аргумента. если начало вектора зафиксировано. Очевидно, что годографом радиуса- вектора точки является ее траектория.

Координатный способ

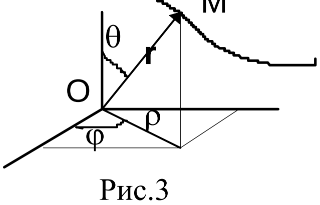


Рис.3

Практически задать радиус- вектор удобнее всего с помощью его координат на некоторую систему координат, в начале которой находится наблюдатель O (Рис.3).

Например в *декартовой системе* следует задать три скалярные функции *x(t), y(t), z(t)* которые следует назвать законом движения точки M в декартовых координатах. Закон движения задает в параметрическом (параметр- время t) виде и траекторию движения точки. Если из закона исключить время, то получим уравнение кривой, по которой движется точка

$$f_1(x,y,z)=0 \qquad f_2(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

Траекторией будет та часть кривой, которая соответствует t > 0

В *цилиндрических координатах* закон движения точки имеет вид

$$r(t),\quad \varphi(t),\quad z(t0 \qquad (2)$$

В *сферических* координатах

$$r(t),\quad \varphi(t),\quad \theta(t) \qquad (3)$$

Естественный способ

Этот способ применяется, когда заранее известна траектория Например рельсы определяют траекторию трамвая, поэтому для него хорош естественный способ.

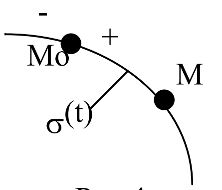


Рис.4

Чтобы в произвольный момент времени указать положение точки на траектории, достаточно выбрать на траектории некоторое начало M_o, направление положительного отсчета (+) и указать ***криволинейную координату*** $\sigma(t)$- длину дуги M_oM с соответствующим знаком. В качестве начала M_o удобно выбирать начальное положение точки при t=0, а за положительное- направление движения точки в этот момент.

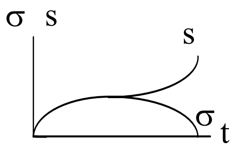


Рис.5

Функция $\sigma(t)$ называется естественным законом движения точки. Ее не следует путать с функцией пройденного пути $\sigma(t)$, которая является монотонно возрастающей. Координата же $\sigma(t)$ во время движения точки может менять знак и обращаться в ноль. Так для трамвая, вернувшегося в депо, координата обращается в ноль, в то время как пройденный путь достигает максимального значения (Рис.5).

Производная вектор-функции по скалярному аргументу

Рассмотрим вектор-функцию **a**(u) скалярного аргумента u. При изменении параметра u конец вектора **a** описывает годограф (Рис.6). Приращение аргумента на Du вызывает приращение функции на Δ**a.** Пусть аргумент уменьшился (Du<0). Тогда вектор Δ**a**/Δu направлен противоположно приращению D**a**.

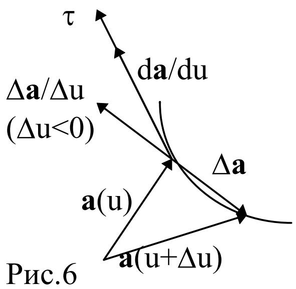


Рис.6

Производной вектор-функции **a**(u) ***по скалярному аргументу*** называется вектор

$$d\mathbf{a}/du=\lim \Delta\mathbf{a}/\Delta u \qquad \text{при } \Delta u\to 0 \qquad (4)$$

При стремлении приращения аргумента Δu к нулю секущая D**a** займет положение касательной t. Таким образом векторная производная ***всегда направлена по касательной к годографу ектор-функции***.

Рассмотрим основные свойства векторной производной.

1. Если функция векторно постоянна, то ее производная очевидно равна нулю:

$$\mathbf{a=Const} \;\to\; d\mathbf{a}/du=\mathbf{0} \qquad (5)$$

2. Если же функция сохраняет только модуль a, но изменяет напрвление, то ее производная не равна нулю. В этом случае годограф функции лежит на сфере радиуса a, потому производная, касательная к годографу, будет перпендикулярна самому вектору **a**.

$$a=Const \to d\mathbf{a}/du \perp \mathbf{a} \qquad (6)$$

Далее идут свойства, вытекающие из линейности оператора дифференцирования

3. $d(\mathbf{a}+\mathbf{b})/du=d\mathbf{a}/du+d\mathbf{b}/du$
4. $d(l\mathbf{a})/du=ld\mathbf{a}/du$
5. $d(\mathbf{a.b})/du=\mathbf{b.}d\mathbf{a}/du+\mathbf{a.}d\mathbf{b}/du$
6. $d(\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b})=d\mathbf{a}/du\ \mathbf{x}\ \mathbf{b} + \mathbf{a}\ \mathbf{x}\ d\mathbf{b}/du$ (порядок сомножителей менять нельзя !)

Последнее, практически важное свойство докажем:

7. ***Проекция производной равна производной от соответствующей проекции*** $(d\mathbf{a}/du)_x=d\mathbf{a_x}/du$ (7)

Запишем вектор **a** в в разложении по осям x, y, z с ортами **i, j, k**

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

Возьмем производную по времени, учитывая, что орты постоянны:

$$d\mathbf{a}/du=da_x/du\ \mathbf{i} + da_y/du\ \mathbf{j} + da_z/du\ \mathbf{k}$$

С другой стороны производную тоже можно разложить по осям

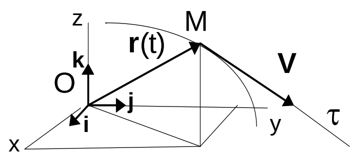
$$d\mathbf{a}/du=(d\mathbf{a}/du)_x\mathbf{i} + (d\mathbf{a}/du)_y\mathbf{j} + (d\mathbf{a}/du)_z\mathbf{k}$$

Сравнивая два разложения, приходим к выводу, что свойство 7 справедливо.

Скорость точки.

Векторный способ задания движения

Определение: Скоростью точки называется вектор



$$\mathbf{V}=d\mathbf{r}/dt \qquad (8)$$

Из определения следует, что скорость направлена по касательной к годографу радиуса-вектора **r**, т.е. к траектории. Скорость направлена в сторону движения точки M по траектории.

Рис.7

Координатный способ задания движения

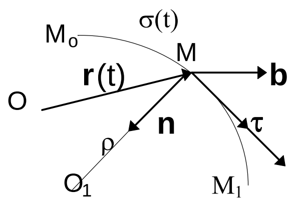
Дифференцируя $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ по времени получим

$$\mathbf{V}=V_x\mathbf{i}+V_y\mathbf{j}+V_z\mathbf{k}= x^*\mathbf{i}+y^*\mathbf{j}+z^*\mathbf{k} \qquad (9)$$

Таким образом, по закону движения $x(t),y(t),z(t)$ можно найти вектор **V:**

$V_x=x^*$, $V_y=y^*$, $V_z=z^*$; $V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2$; $\quad$ $Cos(x,V)=V_x/V$; $Cos(y,V)=V_y/V$; $Cos(z,V)=V_z/V$

Скорость точки при естественном способе



Пусть задан закон движения точки по траектории σ(t). Очевидно, что радиус-вектор точки является функцией координаты σ: **r**(σ). Формулы Френе задают три ортогональных орта **t, n, b,** называемых естественным базисом. Это**:**

- ***орт касательной*** **t =** d**r**/dσ. Он касателен к траектории, как к годографу радиуса-вектора, и направлен в сторону возрастания σ

Рис.8

независимо от направления движения точки (знака dσ). Действительно, если d**r** направлено по касательной к началу M_o, то dσ отрицательно и производная **t** все равно направлена в сторону возрастания s.

- ***орт главной нормали*** **n:** k **n = (**d**t**/dσ) где k- скаляр. Производная d**t**/ds нормальна к самому орту касательной **t** как производная от вектора постоянного модуля. Она направлена всегда в сторону вогнутости траектории. Действительно, даже если точка движется к началу M_o (dσ<0), и dt направлено в сторону выпуклости траектории, однако производная d**t**/dσ будет противоположна по направлению ввиду отрицательности dσ.

Модуль этой производной равен k размерности 1/м, и характеризует скорость конца вектора **t** при движении точки. Скаляр k называется кривизной траектории в точке M.
r=1/k-называется радиусом кривизны траектории в точке M. Точка O на главной нормали на расстоянии r от точки M называется центром кривизны траектории для точки M.

- ***орт бинормали*** **b**=**t** x **n** образует с **t, n** правую тройку.

Плоскость **(t, n)** называется соприкасающейся плоскостью к траектории в точке M. Соприкасающуюся плоскость легко себе представить как предельное положение плоскости окружности, проведенной через три точки M_0 M и M_1 на траектории при стремлении M_0 и M_1 к M. Предельное значение радиуса такой окружности равно радиусу кривизны r, а ее центр устремится к центру кривизны O.

Найдем скорость точки:

$$\mathbf{V}=d\mathbf{r}/dt=d\mathbf{r}/d\sigma\ ds/dt=\sigma^*\mathbf{t} \qquad (10)$$

Иначе

$$\mathbf{V}=V_t\mathbf{t},\ \ V_t=\sigma^* \qquad (11)$$

Ускорение точки

Векторный способ

Определение: Ускорением точки называется вектор

$$\mathbf{W}=d\mathbf{V}/dt=d_2\mathbf{r}/dt^2 \qquad (12)$$

Замечание: Если скорость точки постоянна по модулю (равномерное движение), то по свойствам векторной производной ускорение нормально к скорости.

Координатный способ

По свойствам векторной производной

$$W_x=V_x{*}=x{**},\ \ W_y=y{**},\ \ W_z=z{**} \qquad (13)$$

Теперь можно найти вектор ускорения:

$$W^2=W_x^{\ 2}+W_y^{\ 2}+W_z^{\ 2}, \qquad Cos(x,W)=W_x/W,\ \ Cos(y,W)=W_y/W,\ \ Cos(z,W)=W_z/W \qquad (14)$$

Естественный способ

$$\mathbf{W}=d\mathbf{V}/dt=\mathbf{t}\ d\sigma^*/dt+\sigma^* d\mathbf{t}/dt =$$
$$=\sigma^{**}\mathbf{t}+\sigma^* d\mathbf{t}/d\sigma\ d\sigma/dt=\sigma^{**}\mathbf{t}+\sigma^{*2}k\mathbf{n} \qquad (15)$$

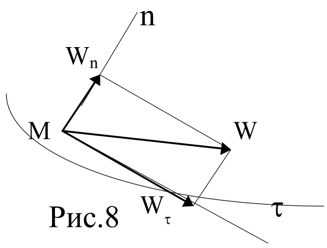


Рис.8

Таким образом ускорение имеет две составляющие-
касательную и нормальную:

$$\mathbf{W}=\mathbf{W_t}+\mathbf{W_n}; \qquad \mathbf{W_t}=\sigma^{**}\mathbf{t}; \qquad \mathbf{W_n}=\sigma^{*2}k\mathbf{n} \qquad (16)$$
$$W^2=W_t^{\ 2}+W_n^{\ 2}$$

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью:

$$V=Const\ (s^*=Const).$$

При равномерном движении ускорение точки равно нормальному ускорению. Оно существует, если кривизна траектории конечна.
При равномерном движении ускорение точки обращается в ноль только на прямых участках и в точках перегиба траектории.

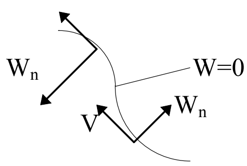


Рис.9

Равнопеременным называется движение точки с постоянным касательным ускорением: $\sigma^{**}=Const=W_t$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma^*=W_t t+C_1, \qquad (17)$$

где C_1- постоянная интегрирования, которую следует найти из начальных условий:

$$t=0:\ \ \sigma=\sigma_0,\ \sigma^*=V_0 \qquad (18)$$

Находим: $C_1=V_0$. Повторное интегрирование дает закон равнопеременного движения точки по кривой:

$$\sigma=W_t\, t^2/2+V_0 t+\sigma_0 \qquad (19)$$