Лекция 6

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Теорема о распределении скоростей в твердом теле

Матрица поворота твердого тела.

Рассмотрим два положения твердого тела: в начальный момент времени t=0, и в текущий момент t (Рис. 1). ***Вектором в теле*** назовем любой вектор **a**, соединяющий две точки тела. Все векторы в теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вмесите с телом.

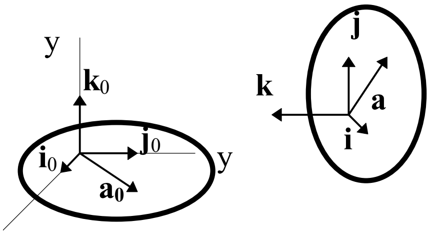


Рис.1

Свяжем с телом ***триедр*** единичных векторов **i, j, k.** Положение триедра в начальный момент обозначим через $\mathbf{i}_0$ $\mathbf{j}_o$ $\mathbf{k}_0$ Поскольку начальное положение неизменно, то с ним можно связать неподвижные оси координат x, y, z, совместив их с ортами. Вектор в теле в этот момент имеет положение $\mathbf{a}_0$.

$$t=0: \quad \mathbf{a}(0)=\mathbf{a}_0=x_0\mathbf{i}_0+y_0\mathbf{j}_0+z_0\mathbf{k}_0=\mathbf{Const} \qquad (1)$$

В момент времени t вектор **a** можно записать как в проекциях на неподвижные оси x, y, z,

$$\mathbf{a}(t)=x(t)\mathbf{i}_0+y(t)\mathbf{j}_0+z(t)\mathbf{k}_0 \qquad (2)$$

так и на подвижные оси с ортами **i, j, k**

$$\mathbf{a}(t) = x_0\mathbf{i}(t)+y_0\mathbf{j}(t)+z_0\mathbf{k}(t) \qquad (3)$$

В (3) учтено, что проекции вектора на подвижные оси неизменны и равны его начальным проекциям на неподвижные оси (1). Поэтому соотношение

$$x\mathbf{i}_0+y\mathbf{j}_0+z\mathbf{k}_0= x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k} \qquad (4)$$

вытекающее из (2) и (3), связывает

1) с одной стороны координаты двух положений вектора **a** в неподвижных осях x, y, z после (слева) и до (справа) поворота,

2) в текущий момент времени t проекции вектора **a** на неподвижные и подвижные оси.

Умножая последовательно обе части равенства на орты неподвижной системы координат, находим

$$x = \mathbf{i}_0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{i}_0\,(x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}) = \alpha_{11}x_0+ \alpha_{12}y_0+ \alpha_{13}z_0$$
$$y = \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{j}_0\,(x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}) = \alpha_{21}x_0+ \alpha_{22}y_0+ \alpha_{23}z_0 \qquad (5)$$
$$z = \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{k}_0\,(x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}) = \alpha_{31}x_0+ \alpha_{32}y_0+ \alpha_{33}z_0$$

Таким образом, получаем выражение текущих координат вектора движущегося тела через его начальные координаты в системе x, y, z

$$a(t)=T(t)\,a_0 \qquad a(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} \qquad T(t)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t)\\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t)\\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t)\end{pmatrix} \qquad a_0=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}=Const \qquad (6)$$

Здесь через α_{mn} обозначены ***направляющие косинусы*** углов между ортами обеих систем координат, изменяющихся при движении тела. Индексы являются номерами ортов (**1** соответствует ортам **i** , **2– j, 3– k**), и первым стоит номер орта неподвижной системы координат, а вторым– подвижной. Например

$\alpha_{23}(t)=\mathbf{j}_0\circ\mathbf{k}(t)$. Направляющие косинусы являются, по сути, проекциями ортов одной системы на направления ортов второй системы.

Поскольку формула (6) характеризует поворот всех векторов в теле вместе с телом, то *T* называется ***матрицей поворота*** тела.

Пример: При повороте тела на угол φ вокруг оси z (Рис.2) матрицу поворота легко вычислить в соответствии с (6)

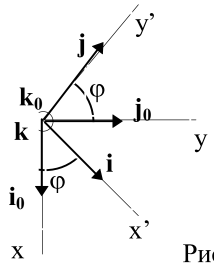


Рис.2

$$T_z = \begin{pmatrix} Cos\varphi & -Sin\varphi & 0 \\ Sin\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Матрицы поворота вокруг осей x и y будут иметь такую же структуру, только единица в них будет занимать место 11 и 22.

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\varphi & -Sin\varphi \\ 0 & Sin\varphi & Cos\varphi \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} Cos\varphi & 0 & -Sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ Sin\varphi & 0 & Cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Рассматривая a и a_0 как столбцы проекций вектора **a** в текущий момент t на неподвижные и подвижные оси соответственно, и соотношение

$$a(t)=T(t)\, a_0 \qquad (9)$$

определяет переход от подвижной к неподвижной системе координат. Поэтому матрица T является одновременно и ***матрицей перехода*** от подвижной системы координат к неподвижной. Следует подчеркнуть что направления поворота и перехода противоположны.

Исследуем свойства матрицы T. Поскольку длина вектора в теле не изменяется, то его скалярное произведение на самого себя и до и после поворота тела остается неизменным

$$a^2 = a^T a = a_0^T a_0 = a_0^T\, T^T T\, a_0 \qquad (10)$$

Значит

$$T^T T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

где E- единичная матрица. Как известно, произведение матрицы на ее обратную матрицу тоже равно единичной матрице. Значит матрица, обратная матрице поворота, равна ее транспонированной матрице.

$$T^{-1} = T^T \qquad (12)$$

Такие матрицы называются ***ортогональными***. Теперь можно записать соотношение обратное (9)

$$T^T a = T^T T a_0 \qquad a_0 = T^T a \qquad (13)$$

Угловая скорость тела. Формула Эйлера.

Продифференцируем по времени соотношение (9) с учетом (13) и имея ввиду, что $a_0=Const$, получим

$$a^* = T^* a_0 = T^* T^T a = \Omega\, a \qquad \Omega = T^* T^T \qquad (14)$$

Покажем, что матрица Ω является кососимметричной. Действительно:

$$\Omega^T = (T^T)^T (T^*)^T = T(T^*)^T = (TT^T)^* - T^* T^T = -T^* T^T = -\Omega$$

Обозначив три компоненты матрицы Ω через $\omega_x\ \omega_y\ \omega_z$, запишем ее следующим образом:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Теперь составим вектор-столбец, называемый ***присоединенным вектором кососимметричной матрицы*** Ω

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

Этому столбцу соответствует вектор **ω,** называемый вектором ***угловой скорости.***

Было показано (см. Момент силы относительно точки), что, если матрица Ω кососимметрична, то формуле (14) соответствует векторное произведение:

$$a^* = \Omega a \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^* = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}\,, \qquad (19)$$

Эта формула называется ***формулой Эйлера*** в матричной и векторной записи. Она является центральной формула кинематики твердого тела и показывает, что производные всех векторов в данном теле связаны между собой вектором угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$. Именно поэтому, как мы увидим дальше, картина распределения скоростей и ускорений в твердом теле носит простой и строго упорядоченный характер.

Умножив (14) на T справа, получим

$$T^* = \Omega T \qquad (20)$$

Таким образом матричная формула Эйлера справедлива и для самой матрицы поворота T.

Теорема о распределении скоростей в теле. Метод полюса.

Формула Эйлера связывает характеристики движения всех точек тела между собой. Это делает возможным выразить их через характеристики движения одной, специально выбранной точки тела, называемой ***полюсом***. Такой прием называется ***методом полюса***.

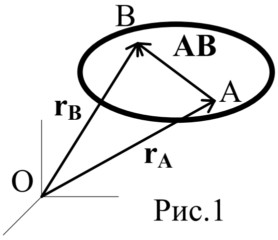


Рис.1

Пусть движение тела задано в осях *x,y,z.* функциями трех координат полюса А и трех углов Эйлера (Рис1). Как известно, по этим функциям можно вычислить скорость полюса $\mathbf{V_A}$ и угловую скорость тела $\boldsymbol{\omega}$.

Рассмотрим произвольную точку тела B. Исходным выражением метода полюса является выражение радиуса-вектора произвольной точки тела через радиус-вектор полюса А:

$$\mathbf{r_B} = \mathbf{r_A} + \mathbf{AB} \qquad (1)$$

Дифференцируя (1) по времени, находим

$$\mathbf{dr_B/dt = dr_A/dt + dAB/dt} \qquad \mathbf{V_B = V_A + dAB/dt}$$

Для вектора в теле **AB** справедлива формула Эйлера.

$$\mathbf{dAB/dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB}$$

Таким образом, приходим к ***теореме о распределении скоростей*** в твердом теле

$$\mathbf{V_B} = \mathbf{V_A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB} \qquad (2)$$

Матричная запись этой теоремы в произвольной системе координат имеет вид:

$$V_B = V_A + \Omega(AB) \qquad (3)$$

Следствия из теоремы о распределении скоростей

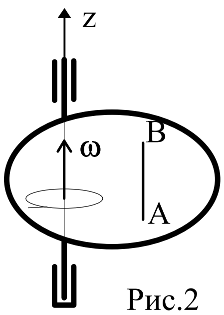


Рис.2

а) Если скорости двух точек тела А и В одинаковы, то угловая скорость параллельна АВ. Например при вращении тела вокруг неподвижной оси скорости точек этой оси равны нулю. Поэтому вектор угловой скорости параллелен оси вращения Z. Обычно его изображают на оси (Рис.2).

б) Справедливо и обратное. Скорости точек прямой, параллельной угловой скорости, одинаковы в данный момент

$$\mathbf{AB} \parallel \boldsymbol{\omega}: \qquad \mathbf{V_B = V_A} \qquad (4)$$

в) *Теорема о проекциях скоростей* Проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны. Для доказательства спроектируем теорему на ось z, проходящую через обе точки, с учетом взаимной перпендикулярности **AB** и векторного произведения $\boldsymbol{\omega}\times$ **AB:**

$$\text{пр}_{AB}\,\mathbf{V_A} = \text{пр}_{AB}\,\mathbf{V_B} \qquad (5)$$

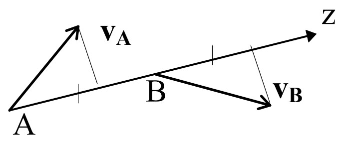


Рис.3

Эта теорема отражает понятное требование неизменности расстояния между точками твердого тела.

Пример: Найдем отношение скоростей точек А и В шатуна АВ кривошипно-шатунного механизма.

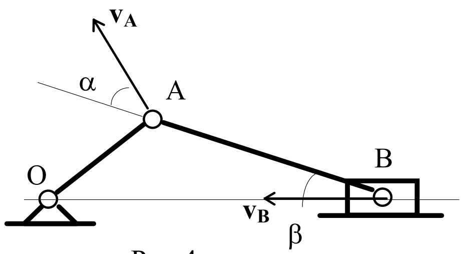


Рис.4

Точка А принадлежит кривошипу ОА, вращающемуся вокруг оси О. Она движется по окружности, значит ее скорость касательна к этой окружности. Точка В скользит вдоль прямой ОВ и ее скорость направлена вдоль этой прямой. По теореме о проекциях скоростей имеем

$$V_A \, Cos\alpha = V_B \, Cos\beta \qquad (6)$$

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение.

Мгновенно-поступательным назовем движение тела в момент, когда угловая скорость тела обратилась в ноль

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0} \qquad (7)$$

В этом случае

$$\mathbf{V_B} = \mathbf{V_A}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB} = \mathbf{V_A}=\mathbf{V} \qquad (8)$$

То есть скорости всех точек при мгновенно-поступательном движении оказываются равными.

Например, в момент, когда кривошип ОА на Рис. 5 окажется перпендикулярным линии ОВ, скорости точек А и В станут параллельными ОВ. Значит в этот момент $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ и скорости всех точек шатуна равны..

Скорость **V** можно назвать скоростью поступательного движения тела. Поступательное движение является единственным типом движения тела, при котором можно говорить о скорости тела. В общем случае все точки тела имеют разные скорости и движение тела характеризуется только вектором угловой скорости.

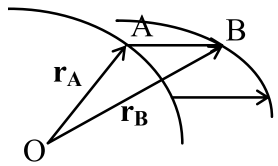


Рис.5

Если угловая скорость остается равной нулю в течение некоторого промежутка времени, то движение в это время называется ***поступательным*** Например ползун В на Рис.4 все время движется поступательно

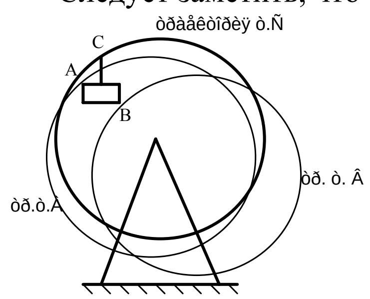
$$d\mathbf{AB}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB}=\mathbf{0} \quad \text{значит} \quad \mathbf{AB = Const} \qquad (9)$$

Значит при поступательном движении тела произвольный вектор в теле остается параллельным самому себе. При этом траектории любых двух точек А и В (годографы векторов $\mathbf{r_A}$ и $\mathbf{r_B}$) одинаковы и сдвинуты на постоянный вектор **АВ.**

Дифференцируя (8), найдем что в каждый момент времени равны и ускорения всех точек

$$\mathbf{W_B} = \mathbf{W_A} = \mathbf{W} \qquad (10)$$

Следует заметить, что траектория поступательного движения тела может быть произвольной кривой, например окружностью, как для кабины колеса обозрения.



Поступательное движение тела описывается формулами кинематики точки поскольку для описания поступательного движения тела достаточно задать движение одной его точки. Как известно, движение точки в пространстве задается тремя скалярными функциями ее координат. Значит в поступательном движении тело имеет 3 степени свободы.

Рис. 6

Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z Положение тела можно задать углом поворота тела (Рис.7)

$$\varphi = \varphi\,(t) \qquad (11)$$

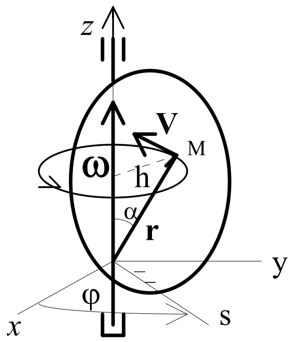


Рис.7

Эта функция времени и представляет собой закон вращения. Таким образом, во вращательном движении тело имеет одну степень свободы.

Как было показано, угловая скорость **ω** вращающегося тела направлена вдоль оси вращения. Найдем ее связь с законом вращения. Столбец координат радиуса вектора **r** при повороте тела на угол j изменится следующим образом

$$r = Tr_0 \qquad (12)$$

Здесь r_0- начальное, а r- конечное значение столбца, а T- матрица поворота

$$T = \begin{pmatrix} Cos\varphi & -Sin\varphi & 0 \\ Sin\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу угловой скорости

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = T^{*}T^{T} = \varphi^{*}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Видим, что в вектор угловой скорости **ω** действительно направлен вдоль оси вращения и его проекция на эту ось равна производной от закона движения по времени:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z\,\mathbf{k}. \qquad \omega_z = \varphi^{*} \qquad (14)$$

Как видим, во вращательном движении угловая скорость есть скорость изменения угла поворота тела. Отсюда название угловой скорости. Как мы видели, в общем случае угловая скорость выражается значительно более сложным образом и не через один, а через три угла Эйлера. Вектор **ω** всегда снабжается дуговой стрелкой, указывающей направление вращения тела. Дуговая стрелка указывает направление вращения тела

В правой системе действует следующее правило правого винта: ***вектор угловой скорости тела направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда видно, что тело вращается против часовой стрелки.***

Угловым ускорением тела называется вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt \qquad (15)$$

Поскольку годографом угловой скорости является сама ось вращения, то угловое ускорение тоже будет направлена тоже вдоль оси вращения. Дифференцируя (12) по времени, находим:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varphi^{**}\mathbf{k} = \varepsilon_z\,\mathbf{k}; \qquad \varepsilon_z = \varphi^{**} \qquad (16)$$

Таким образом проекция углового ускорения на ось z равна второй производной от закона вращения.

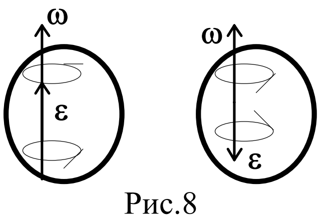


Рис.8

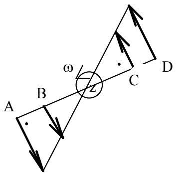
Поскольку угловое ускорение также как и угловая скорость является аксиальным вектором, то его тоже будем снабжать дуговой стрелкой по правилу правого винта.

Ускоренным следует назвать вращение тела с возрастающей по модулю угловой скоростью. Очевидно, что оно будет иметь место при со направленных векторах угловой скорости и углового ускорения. Значит вращение будет ускоренным при $\varphi^{*}\varphi^{**}>0$ и замедленным при $\varphi^{*}\varphi^{**}< 0$

Скорость и ускорение точки вращающегося тела

Так как радиус-вектор точки М является вектором в теле, то скорость точки вращающегося тела находится по формуле Эйлера

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (17)$$



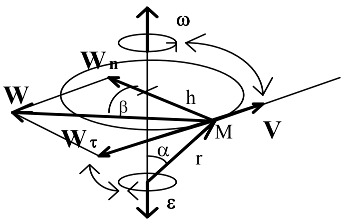
Матричная запись этой формулы в любой из систем координат

$$V = \Omega\, r \qquad (18)$$

В соответствии с Рис.7 модуль скорости точки V равен :

$$V = \omega\ r\ Sin\ a = \omega\ h \qquad (19)$$

Рис.9. Видим, что скорость точки линейно зависит от расстояния h до оси вращения. Картина распределения скоростей на прямой, перпендикулярной оси представлена на Рис.9
Найдем ускорение точки вращающегося тела. Дифференцируя (17) по времени, найдем



$$\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt = d/dt(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) =$$
$$= d\boldsymbol{\omega}/dt \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} \qquad (20)$$

Таким образом ускорение точки вращающегося тела имеет две составляющие. Из Рис.10 видно, что составляющая $\varepsilon X \mathbf{r}$ касательна к траектории точки. Однако здесь она называется ***вращательным ускорением*** точки. Его направление соответствует направлению дуговой стрелки вектора углового ускорения **ε.**

Рис.10

Вторая составляющая $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}$ устремлена к оси вращения, независимо от направления вращения (вектора ω) и поэтому называется ***осестремительным ускорением*** точки. Действительно, векторы **ω** и **V** изменяют направление одновременно, поэтому их векторное произведение не меняет своего направления к оси вращения. Окончательно имеем:

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}^{вр}+\mathbf{W}^{ос}; \qquad \mathbf{W}^{вр}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W}^{сс}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}; \qquad (21)$$

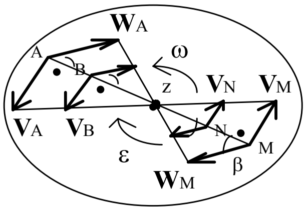
Модули составляющих ускорения

$$\boxed{W^{вр}=\varepsilon\, r\, \mathrm{Sin}a=\varepsilon h} \qquad \boxed{W^{ос}=\omega V=\omega^2 h} \qquad (22)$$

Вычислим модуль полного ускорения **W** и угол β с направлением на ось:

$$W=\sqrt{W^{вр2}+W^{ос2}} = h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,; \qquad \mathrm{tg}\beta=W^{вр}/W^{ос}=\varepsilon/\omega^2 \qquad (23)$$

Видим, что модуль ускорения точки тоже линейно зависит от расстояния h до оси вращения, а угол β одинаков для всех точек тела.



Теперь нетрудно изобразить картину распределения скоростей и ускорений во вращающемся теле Поскольку на прямых, параллельных оси вращения скорости все время одинаковы, то одинаковы и ускорения. Значит во всех плоскостях, перпендикулярных оси вращения, картины распределения одинаковы. Одна из них изображена на Рис.11:

Вычислим проекции ускорения точки М (Рис.10) на подвижные оси

Рис.11

матричным способом. Дифференцируя (18) по времени получим:

$$W=V^*= \overset{*}{\Omega} r+ \Omega r^*= \overset{*}{\Omega} r+ \Omega\Omega r = (E+\Omega^2)\, r \qquad (24)$$

Здесь - кососимметричная матрица углового ускорения

$$E=\Omega^*=\varphi^{**}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (25)$$

Формула (24) справедлива как в неподвижной системе координат, так и координатах, связанных с телом, где она чаще всего и применяется.