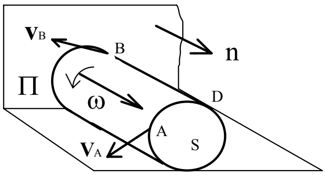
# *Лекция 7*

## ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

**Закон движения. Плоская фигура.**

Движение тела называется плоским, если скорости всех его точек остаются параллельными некоторой неподвижной плоскости. Примером такого движения может служить качение цилиндра по плоскости (Рис.1). Скорости всех точек цилиндра параллельны плоскости П с ортом нормали **n.**




Умножая скалярно формулу $\mathbf{V_B}=\mathbf{V_A}+\omega\mathrm{X}\mathbf{AB}$ на орт нормали **n**, получим:

$$0=\mathbf{n}\cdot(\omega\mathrm{X}\mathbf{AB})=(\mathbf{n}\mathrm{X}\omega)\cdot\mathbf{AB}. \qquad (1)$$

Отсюда $\mathbf{n}\mathrm{X}\omega=0$ и $\omega$ параллелен **n.** Таким образом, при плоском движении вектор угловой скорости все время перпендикулярен плоскости движения П.

Рис.1

По следствию из теоремы о распределении скоростей,. скорости точек любой прямой, параллельной **ω,** остаются все время одинаковыми. Значит одинаковы и их ускорения. Поэтому нет смысла изучать распределение скоростей и ускорений во всем теле. Достаточно понять как они распределены в каком-нибудь его сечении S, параллельном плоскости движения П. Такое сечение называется плоской фигурой. Во всех параллельных сечениях распределения скоростей и ускорений будет аналогичным.

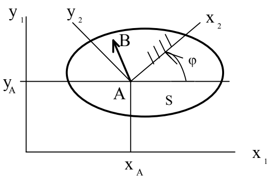



Рис.2

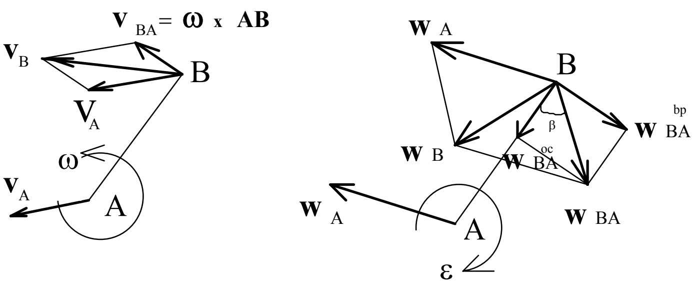
Обычно плоскую фигуру располагают в плоскости чертежа xy (Рис. 2). Положение фигуры на плоскости определяется тремя координатами - функциями времени:

$$x_A(t),\ y_A(t),\ \varphi\ (t) \qquad (2)$$

Они и задают закон плоского движения тела, которое, таким образом, имеет три степени свободы.

**Скорость и ускорение точки плоской фигуры**

Скорость произвольной точки плоской фигуры (Рис 3). находится по теореме о распределении скоростей с учетом того, что угловая скорость перпендикулярна плоской фигуре




$$\mathbf{V_B}=\mathbf{V_A}+\mathbf{V_{BA}}\ ; \qquad \mathbf{V_{BA}}=\omega\mathrm{X}\mathbf{AB};\quad (3)$$

$$\mathbf{W_B}=\mathbf{W_A}+\mathbf{W_{AB}}\ ; \qquad \mathbf{W_{AB}}=\mathbf{W_{AB}}^{\mathbf{вр}}+\mathbf{W_{AB}}^{\mathbf{oc}};$$

$$\mathbf{W_{AB}}^{\mathbf{вр}}=\varepsilon\ \mathrm{X}\ \mathbf{AB}; \qquad W_{AB}^{oc}=\omega^2 AB \qquad (3)$$

Учитывая, что векторы **ω** и **ε** направлены перпендикулярно плоской фигуре, найдем, что все составляющие лежат в плоскости фигуры и имеют модули:

$$V_{BA}=\omega\ AB \qquad (4)$$

Рис.3

$$W_{AB}^2=W_{AB}^{вр2}+W_{AB}^{oc2} \qquad W_{AB}^{\ вр}=\varepsilon\ AB \qquad W_{AB}^{oc}=\omega^2 AB \qquad (5)$$

Заметим, что угол β не зависит от точки

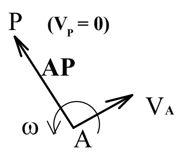
$$\mathrm{tg}\beta=W_{AB}^{вр}/\ W_{AB}^{oc}=\varepsilon/\ \omega^2 \qquad (6)$$

Матричные аналоги формул в любой системе координат имеют вид:

$$V_B=V_A+\Omega\,(AB), \qquad W_B=W_A+(E+\Omega^2)(AB) \qquad (7)$$

**Мгновенный центр скоростей. Распределение скоростей в плоской фигуре.**

Картина распределения скоростей прояснится, если ввести понятие *мгновенного центра скоростей* -- точки P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю. Покажем, что, если угловая скорость в данный момент не равна нулю, то P существует. Построим его. Для этого умножим слева векторно на **ω** формулу скорости для P:



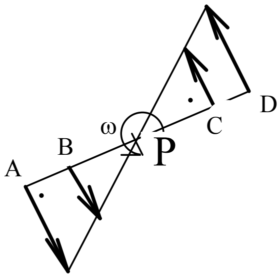

$$\omega\ \mathrm{X}\quad \mathbf{0}=\mathbf{V_A}+\omega\ \mathrm{x}\ \mathbf{AP}; \qquad \mathbf{0}=\omega\ \mathrm{X}\,\mathbf{V_A}+\omega\ \mathrm{x}\ (\omega\ \mathrm{x}\ \mathbf{AP})=\omega\ \mathrm{x}\ \mathbf{V_A}-\omega^2\mathbf{AP}$$

Рис. 4 Отсюда: $\mathbf{AP} = (\omega \times \mathbf{V_A}) / \omega^2$; $AP = V_A / \omega$ (8)

Если теперь за полюс принять м.ц.с. P, то формула скорости приобретет вид, знакомый нам по вращательному движению:

$$\mathbf{V_B}=\mathbf{V_P}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{PB}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{PB} \qquad (9)$$

Таким образом *в плоской фигуре скорости распределены так, как если бы она вращалась вокруг м.ц.с. P*.




Это значит, что скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна направлению на точку P и соблюдаются следующие соотношения:

$V_A = \omega\ AP$; $\qquad \omega = V_A/AP$; $\qquad V_A/V_B = AP/BP \qquad (10)$

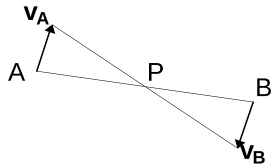



Рисунок подсказывает и способы построения P в различных случаях:

а) Известны параллельные скорости двух точек на одном перпендикуляре к этим скоростям

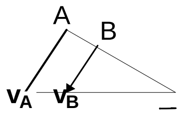



Рис.5

б) Случай мгновенно-поступательного движения, когда скорости двух точек параллельны, но точки не лежат на одном перпендикуляре. Примером может служить шатун AB в указанном на рисунке положении механизма. В этом случае перпендикуляры к скоростям пересекаются в бесконечности и $w = v_A/AP = 0$

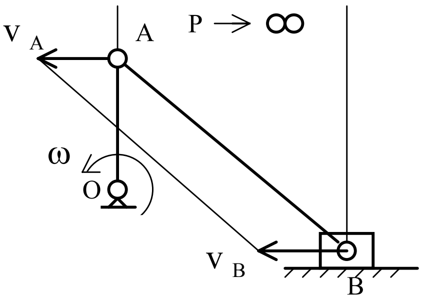



Рис.6

в) Известны направления скоростей двух точек: Например, скорости точек A и B линейки, скользящей вдоль прямых, известны по направлению.

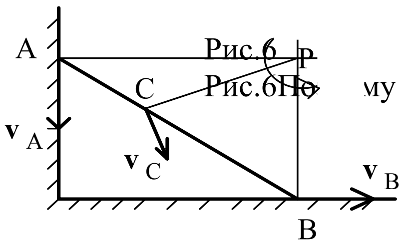



Рис.6 Рис.6По му МЦС наход

Рис.7

г) Качение без проскальзывания плоской фигуры по кривой. В качестве примера рассмотрим колесо, которое катится по буграм. Точка контакта P является мгновенным центром скоростей. Часто окружность колеса ошибочно принимают за траекторию точки A и ее скорость ошибочно направляют по касательной к ободу колеса, в то время как она перпендикулярна AP.

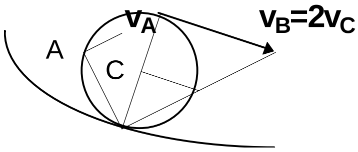



Рис.8

Как видим, ни одна точка колеса не имеет скорости, направленной против движения колеса. Поэтому камень, отделившись от колеса всегда летит вперед.

**Мгновенный центр ускорений. Распределение ускорений в плоской фигуре**

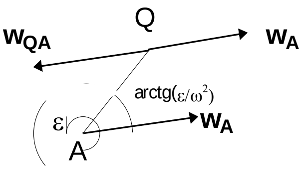



Рис.9

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется точка Q, ускорение которой равно нулю в данный момент. Покажем, что МЦУ существует, если ω, ε не равны нулю одновременно.

От вектора $\mathbf{W_A}$ в сторону ε отложим угол $\mathrm{arctg}(\varepsilon / \omega^2)$ и проведем отрезок $AQ = W_A\,(\varepsilon^2+\omega^4)^{-0.5}$. Найдем ускорение точки Q

$$\mathbf{W_Q}=\mathbf{W_A}+\mathbf{W_{QA}} \qquad (11)$$

Очевидно, что $\mathbf{W_{QA}}$ направлен противоположно $\mathbf{W_A}$. По модулю они равны:

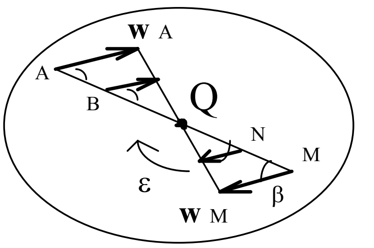



Рис.10

$$W_{QA}=QA(\varepsilon^2+\omega^4)^{-0.5}=W_A$$

Значит $\mathbf{W_A}=-\mathbf{W_{QA}}$ и $\mathbf{W_Q}=\mathbf{0}$, т.е. Q -мгновенный центр ускорений.

Если теперь за полюс выбрать Q, то формула ускорения произвольной точки приобретет такой же вид, как при вращательном движении:

$$\mathbf{W_B}=\mathbf{W_{BQ}}=\mathbf{W_{BQ}}^{\text{вр}}+\mathbf{W_{BQ}}^{\text{ос}} \qquad (11)$$

Это значит, что ускорения в плоской фигуре распределены так, как если бы она вращалась вокруг МЦУ Q.   Следует подчеркнуть, что в общем случае МЦС и МЦУ не совпадают.

Например, при равномерном качении колеса по прямой

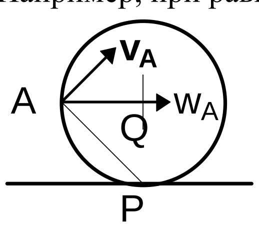
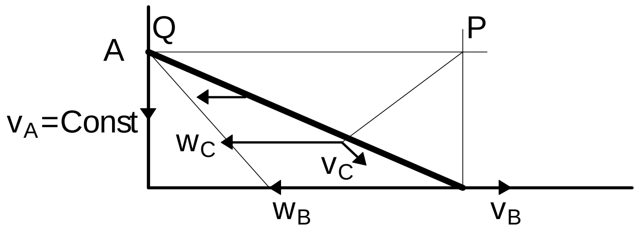



Рис.11

МЦС есть точка контакта P, а МЦУ находится в центре колеса. При этом ε=0 и β=0, значит ускорения всех точек направлены к центру колеса..




Другим примером может быть стержень, конец A которого равномерно скользит по стене, Рис.12 а конец B по полу. Очевидно, что Q находится в точке A, а ускорения всех точек горизонтальны (как $\mathbf{W}_B$) и линейно зависят от расстояния до Q.