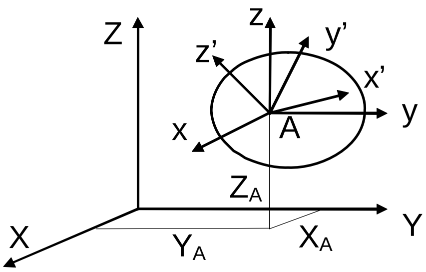
Лекция 8

Свободное движение тела.

Рассмотрим свободное тело, движущееся относительно системы отсчета с осями $X\ Y\ Z$ (Рис.1). Выберем в теле произвольную точку А (полюс) и поместим в ней начало осей $x\ y\ z$, параллельных $X\ Y\ Z$ и движущихся поступательно. В том же полюсе А выберем начало осей $x'\ y'\ z'$, связанных с телом .



Ðèñ.4

Движение тела задано, если указан способ определения положения осей $x'\ y'\ z'$, в произвольный момент времени. Для этого достаточно определить положение начала А координатами $X_A(t)$, $Y_A(t)$, $Z_A(t)$. и поворот осей $x'\ y'\ z'$ относительно $x\ y\ z$.. Как будет показано ниже (см. сферическое движение тела), такой поворот можно задать тремя углами Эйлера. Таким образом шесть функций

$$X_A(t),\ Y_A(t),\ Z_A(t).$$
$$\psi(t)\ \theta(t)\ \varphi(t)$$

являются законом свободного движения твердого тела. Это значит, что свободное тело имеет 6 степеней свободы. Вспомним, что при поступательном движении тело имеет три степени свободы, при вращательном- одну и при плоском- три.

Заметим, что из первых трех функций по формулам кинематики точки можно найти скорость $\mathbf{V_A}$ и ускорение $\mathbf{W_A}$ полюса А, а по углам Эйлера- угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ тела.

Скорость произвольной точки тела найдем по теореме о распределении скоростей

$$\mathbf{V=V_A+\omega X\rho}$$

Ускорение произвольной точки тела найдем, дифференцируя эту теорему

$$d\mathbf{V}/dt=d\mathbf{V_A}/dt+d\omega/dt\ X\ \rho + \omega\ X\ d\rho/dt$$

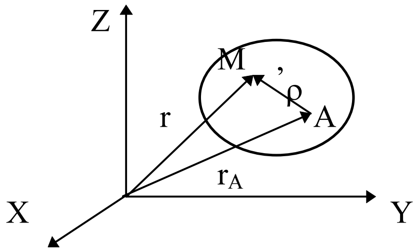


Рис.5

Учитывая, что

$$d\mathbf{V}/dt=\mathbf{W}, \qquad d\mathbf{V_A}/dt=\mathbf{W_A}$$

$$d\omega/\mathbf{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \text{ - угловое ускорение тела}$$

$$\mathbf{d}\rho/dt=\omega X\rho$$

как для “вектора в теле”.

Таким образом ускорение произвольной точки равно

$$\mathbf{W=W_A}+\varepsilon X\rho + \omega X(\omega X\rho\}$$

Последние два слагаемых уже встречались нам в сферическом движении. Как и там, назовем их вращательным и осестремительным ускорениями точки М при ее вращении вокруг полюса А.

Таким образом формулы скорости и ускорения показывают, что свободное движение тела можно представить как результат сложения двух движений: поступательного движения с полюсом А и сферического движения вокруг полюса.

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Теорема о связи производных.

До сих пор мы изучали движение по отношению к одной системе отсчета, в которой находится единственный наблюдатель. Однако иногда движение удобнее описывать в двух системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Особенно это актуально, когда точка движется по движущемуся телу. Например, когда пассажир пробирается к выходу в трамвае, легко различается его движение, обусловленное движением трамвая и движение по отношению трамваю, результатом “сложения” которых является движение пассажира по отношению к Земле.

Пусть точка М движется по ***несущему телу***, движущемуся в условно неподвижной системе отсчета S осями x, y, z (Рис.1). Снабдим систему отсчета S’, связанную с телом, осями x’ y’ z’ и введем следующие определения.

Движение точки М по отношению к неподвижной системе S называется ***абсолютным***. Его характеристики будем отмечать индексом “a”

Движение точки по отношению к системе S’ называется ***относительным***. Его характеристики будем отмечать индексом “r”

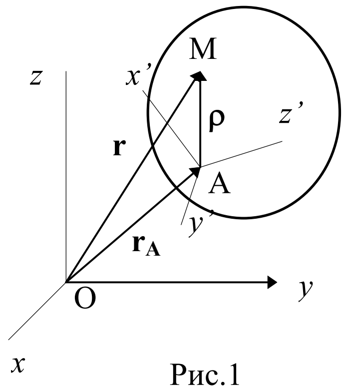


Рис.1

Движение точки тела, с которой в данный момент совпадает точка М, называется ***переносным*** движением точки М. Его характеристики отметим индексом “e”.

Из рисунка следует

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+\boldsymbol{\rho} \qquad (1)$$

Картинка совпадает с тем, что мы рисовали, изучая свободное движение тела с одним принципиальным различием. Здесь вектор $\boldsymbol{\rho}$ не является вектором в теле и его модуль изменяется, поскольку точка М движется по телу. Этот вектор определяет относительное движение точки М и его естественно задать в подвижной системе отсчета S’.

$$\boldsymbol{\rho} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \qquad (2)$$

Здесь **i’, j’, k’**- орты подвижной системы, вращающиеся вместе с телом. Столбец проекций x’ y’ z’ обозначим через ρ'. Столбец проекций того же вектора на оси неподвижной системы обозначим через ρ. Как известно эти векторы-столбцы связаны матрицей перехода T от подвижной системы к неподвижной.

$$\rho=T\rho' \qquad (3)$$

Как помним, матрица T является также матрицей поворота тела из положения, в котором системы координат совпадали, в текущее положение.

Продифференцируем (2) по времени. Учтем, что орты в (2) тоже являются функциями времени, но их производная находится по формуле Эйлера, как для векторов в теле:

$$d\boldsymbol{\rho}/dt = x'^*\mathbf{i}' + y'^*\mathbf{j}' + z'^*\mathbf{k}' + x'\mathbf{i}'^* + y'\mathbf{j}'^* + z'\mathbf{k}'^* = d_r\boldsymbol{\rho}/dt + \boldsymbol{\omega}\mathrm{X}\boldsymbol{\rho} \qquad (4)$$

Здесь через $d_r\boldsymbol{\rho}/dt = x'^*\mathbf{i}' + y'^*\mathbf{j}' + z'^*\mathbf{k}'$ обозначена так называемая ***относительная производная*** вектора $\boldsymbol{\rho}$. Она характеризует изменение вектора $\boldsymbol{\rho}$ для наблюдателя, связанного с несущим телом, поэтому должна называться в данном случае *относительной скоростью* точки М.

Таким образом мы пришли к ***теореме о связи производных*** для вектора, заданного в подвижной системе отсчета

$$d\boldsymbol{\rho}/dt= d_r\boldsymbol{\rho}/dt+ \boldsymbol{\omega}\mathrm{X}\boldsymbol{\rho} \qquad (5)$$

Замечаем, что различие между абсолютной производной вектора $d\boldsymbol{\rho}/dt$ и его относительной производной $d_r\boldsymbol{\rho}/dt$ исчезает при $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$, т.е. при поступательном движении несущего тела.

Теорема о сложении скоростей.

Дифференцируя (1) по времени, мы должны применить теорему о связи производных к вектору ρ. В результате получим:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_A^* + \omega \mathrm{X} \rho + d_r\rho/dt \qquad (6)$$

Здесь: $\mathbf{r}^*=\mathbf{V}$- ***абсолютная скорость*** точки по определению, $\mathbf{r_A}^*=\mathbf{V_A}$- скорость начала А,

$$d_r\rho/dt=\mathbf{V_r}\text{-} \qquad (7)$$

относительная скорость точки.

$$\mathbf{Va}=\mathbf{V_A}+\omega \mathrm{X}\rho+\mathbf{Vr} \qquad (8)$$

Чтобы найти переносную скорость точки, необходимо, согласно определению переносного движения, зафиксировать точку на несущем теле. Тогда относительная скорость обратится в ноль, а абсолютная скорость станет равной переносной скорости

$$\mathbf{V}a=\mathbf{Ve}=\mathbf{V_A}+\omega \mathrm{X}\rho \qquad (9)$$

Видим, что формула совпадает с формулой скорости точки тела, как и должно быть по определению переносного движения. Таким образом приходим к ***теореме о сложении скоростей***

$$\mathbf{Va}=\mathbf{Ve}+\mathbf{Vr} \qquad (10)$$

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей.

Матричная форма теоремы

Запишем теорему (8) в матричной форме в подвижной системе координат, в которой обычно решают задачи. Учитывая правила перехода от векторной к матричной записи векторного произведения через присоединенную матрицу находим

$$Va=V_A+\Omega\rho+\rho^* \qquad (11)$$

Пример По радиусу диска, равномерно вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью ω=2с,$^{-}$, по закону $y=3t^2-2t$ (м) движется точка М. Найти абсолютную скорость точки в момент времени t_1=1сек.

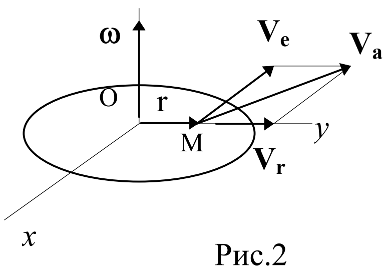


Рис.2

Сначала решим задачу общепринятым ***методом остановки***. Метод заключается в том, что при изучении относительного движения мысленно останавливается переносное движение и наоборот.

Мысленно остановим вращение диска и найдем проекцию относительной скорости на подвижную ось y, продифференцировав закон относительного движения:

$$V_{ry}=y^*=6t-2|_{t=1}=4 \text{ м/сек.} \qquad (12)$$

Фиксируя точку М на расстоянии ОМ=$y|_{t=1}$=1м , найдем ее переносную скорость во вращении

$$V_e=\omega OM=2\text{м/сек} \qquad (13)$$

Таким образом

$$V_x=-2,\ V_y=4,\ V_z=0 \qquad (14)$$

Теперь найдем абсолютную скорость матричным методом в подвижных осях.

$$V_A=0 \qquad \Omega=\omega\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (15)$$

Таким образом находим проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

$$\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}=\Omega r+r^*=2\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3t^2-2t\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6t-2\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{t=1}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} \qquad (16)$$