Лекция 9

Теорема о сложении ускорений

Дифференцируя теорему о сложении скоростей

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_A+\omega X\rho+\mathbf{V}_r \qquad (1)$$

по времени, находим

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_A+\varepsilon X\rho+\omega X(d\rho/dt)+d\mathbf{V}_r/dt \qquad (2)$$

Поскольку векторы ρ и $\mathbf{V}_r$ заданы в подвижной системе, то, дифференцируя их, нужно применить теорему о связи производных

$$d\rho/dt=d_r\rho/dt+\omega X\rho=\mathbf{V}_r+\omega X\rho \qquad d\mathbf{V}_r/dt=d_r\mathbf{V}_r/dt+\omega X\,\mathbf{V}_r=\mathbf{W}_r+\omega X\,\mathbf{V}_r \qquad (3)$$

Таким образом получаем

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_A+\varepsilon X\rho+\omega X(\omega X\rho)+\mathbf{W}_r+2\omega X\,\mathbf{V}_r \qquad (4)$$

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем точку на несущем теле. Тогда $\mathbf{V}_r, \mathbf{W}_r = \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_e=\mathbf{W}_A+\varepsilon X\rho+\omega X(\omega X\rho) \qquad (5)$$

как и должно быть, поскольку мы получили формулу ускорения точки твердого тела, чем и должно быть переносное ускорение.

Последнее слагаемое в (4) называется ***Кориолисовым (добавочным)*** ускорением $\mathbf{W}_c$.

Окончательно ***теорема Кориолиса*** приобретает вид

$$\mathbf{W}_a=\mathbf{W}_e+\mathbf{W}_r+\mathbf{W}_c \qquad (6)$$

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна абсолютному ускорению в общем случае. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют ***добавочным***. Рассмотрим его подробнее.

$$\mathbf{W}_C=2\omega X\mathbf{V}_r \qquad (7)$$

Кориолисово ускорение направлено как векторное произведение по правилу правого винта и обращается в ноль в трех случаях:

1. Несущее тело движется поступательно (ω=**0**)
2. Относительная скорость точки $\mathbf{V}_r$ параллельна угловой скорости тела **ω**
3. Точка остановилась на несущем теле ($\mathbf{V}_r = \mathbf{0}$)

На простом примере покажем необходимость Кориолисова ускорения.

Пусть точка движется по периметру вращающейся круглой платформы с такой относительной скоростью, что остается неподвижной. Очевидно, что она должна двигаться противоположно направлению вращения платформы и Vr=ωR. При этом абсолютное ускорение точки будет равно нулю, поскольку точка неподвижна. Относительное ускорение является нормальным ускорением при равномерном движении точки по окружности со скоростью **Vr**.

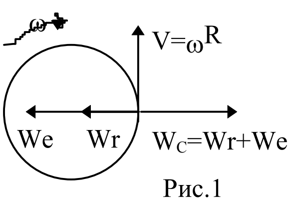


Рис.1

$$Wr=Vr^2/R=\omega^2R \qquad (8)$$

Переносное ускорение точки является осестремительным ускорением точки обода и оказывается равным относительному ускорению

$$We=\omega^2R \qquad (9)$$

Оба эти ускорения направлены к центру колеса и в сумме не могут дать ноль.

$$We+Wr=2\omega^2R \qquad (10)$$

Значит только Кориолисово ускорение может “уравновесить” их. Действительно, вектор угловой скорости направлен за чертеж, значит **Wc** направлено направо и по модулю равно

$$Wc=2\omega Vr=2\omega^2R \qquad (11)$$

Вот теперь абсолютное ускорение обращается в ноль:

$$Wa=We+Wr-Wc=0 \qquad (12)$$

С помощью другого примера выясним какие изменения абсолютной скорости отражает Кориолисово ускорение. Пусть точка, равномерно движущаяся по диаметру равномерно вращающейся платформы проходит в данный момент через центр платформы (Рис.2).

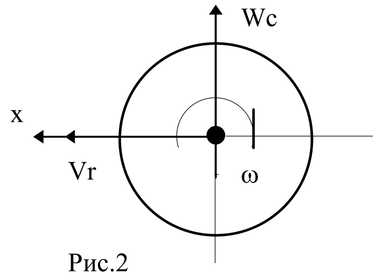


Рис.2

Очевидно, что относительное ускорение точки равно нулю, поскольку она движется равномерно по прямой. В момент прохождения точки через центр платформы в ноль обращается и переносное ускорение.

Значит в этот момент абсолютное ускорение равно Кориолисовому ускорению с модулем

$$Wc=2\omega Vr$$

Абсолютное (в данный момент Кориолисово) ускорение есть скорость изменения вектора абсолютной скорости, состоящей из переносной и относительной скоростей. Относительная скорость поворачивается вместе с диском со скоростью ω. Скорость конца вектора **Vr** оказывается равной половине Кориолисова ускорения ωVr

Вторая половина **Wc** характеризует изменения модуля переносной скорости. Переносная скорость в данном положении равна нулю, однако ее модуль изменяется и скорость этого изменения равна ωVr. Действительно, при равномерном движении точки по диаметру ее расстояние до оси вращение линейно зависит от времени: h=tVr. Модуль переносной скорости равен

$$Ve=\omega h=\omega Vr\, t \qquad (13)$$

Значит скорость изменения модуля переносной скорости равна

$$dVe/dt=\omega Vr \qquad (14)$$

На основании сказанного делаем вывод, что Кориолисово ускорение характеризует:

1. Скорость вращения вектора относительной скорости при переносном вращении $\boldsymbol{\omega}\mathbf{X}\mathbf{V_r}$
2. Изменение переносной вращательной скорости $\boldsymbol{\omega}$Х$\boldsymbol{\rho}$- из-за изменения вектора относительного положения $\boldsymbol{\rho}$. Производная от $\boldsymbol{\omega}$Х$\boldsymbol{\rho}$ при фиксированном $\boldsymbol{\omega}$ дает еще одну составляющую Кориолисова ускорения $\boldsymbol{\omega}\mathbf{X}\mathbf{V_r}$

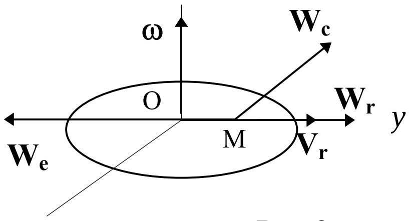
Матричная форма теоремы

Запишем теорему (4) в матричной форме в подвижной системе координат, в которой обычно решают задачи. Учитывая правила перехода от векторной к матричной записи векторного произведения через присоединенную матрицу, находим

$$Wa=W_A+(\in+W^2)\rho+\rho^{**}+2\Omega\rho \qquad (15)$$

Пример

Рассмотрим тот же пример, что и в теореме о сложении скоростей. Сначала применим метод остановки.



x Рис.3

$$W_{ry}=y^{**}=6 \qquad (16)$$

$$W_e=W_e^{oc}=\omega^2 OM=4м/сек^2 \qquad (17)$$

$$W_c=2\omega V_r=16м/сек^2 \qquad (18)$$

В проекциях на подвижные оси

$$W_x=-W_c=-16, \qquad W_y=W_r-W_e=2, \qquad W_z=0 \qquad (19)$$

Тот же ответ получим матричным методом.

В подвижных осях имеем: $W_A=W_o=0; \quad \in=\Omega^*=0;$ (20)

$$\Omega^2=-\omega^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (21)$$

$$W_a=\Omega^2\rho+2\Omega\rho^*+\rho^{**} \qquad (22)$$

$$\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}=\left\{-\varpi^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3t^2-2t\\0\end{pmatrix}+2\varpi\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6t-2\\0\end{pmatrix}\right\}\Bigg|_{t=1}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\2\\0\end{pmatrix} \qquad (23)$$

Как видим, результаты совпадают.

Сложение вращений тв тела

Теорема о сложении угловых скоростей

Системы отсчета- Т-ма Элера- Т-ма о связи производных

Сложение вращений тела вокруг пар осей. Пара вращений

Сонаправлено- Противоположно

Дифференциальный механизм. Метод Виллиса.