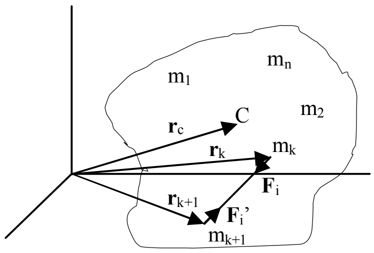
Лекция 1

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Материальная система. Центр масс и центр тяжести. Классификация сил. Дифференциальные уравнения движения системы.

Материальной системой назовем множество взаимодействующих материальных точек m_1, m_2, $\ldots m_k \ldots m_n$. Пример: солнечная система.



Система материальных точек, взаимодействием которых можно пренебречь по сравнению взаимодействия с внешней средой, не является материальной. Пример: группа самолетов.

Массой системы называется арифметическая величина, равная сумме масс точек системы

$$M=\sum m_k$$

Движение мат. точек рассматривается по отношению к инерциальной системе отсчета. Система отсчета – трехмерное пространство, с которым жестко связан наблюдатель. Границы системы определяются наблюдателем.

Центром масс системы называется геометрическая точка C, радиус-вектор которой равен

$$\mathbf{r_c}= \sum \mathbf{r}_k/M$$

Твердое тело – система бесконечного, но счетного числа мат. точек, расстояние между которыми неизменно во времени. Элементарная точка объема dV имеет массу $dm=\gamma(x)dV$, где $\gamma(x)$ – плотность тела, зависящая от точки. Тело называют однородным, если γ не зависит от x.

Объем тела есть интеграл по объему

$$V= {}_V\int dV$$

Масса тела

$$M = {}_V\int dm= {}_V\int \gamma(r)dV$$

Центр масс тела определяется вектором

$$\mathbf{r_c}=({}_V\int \mathbf{r}\,\gamma(r)dV)/M$$

У однородного тела

$$M= \gamma V \qquad \text{и} \qquad \mathbf{r_c}=({}_V\int \mathbf{r}\, dV)/V$$

Поле силы тяжести определяется вектором ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$ **(x)** . Силой тяжести элементарного объема называется вектор

$$d\mathbf{P}= \mathbf{g}\,(\mathbf{r})dm= \mathbf{g}\,(\mathbf{r})\,\gamma(r)\,dV$$

Тяжесть тела есть вектор

$$\mathbf{P}= {}_V\int d\mathbf{P}$$

Для однородного тела

$$d\mathbf{P}= \gamma\, \mathbf{g}\,(\mathbf{r})dV$$

Для небольших тел вблизи Земли ускорения сил тяжести можно считать со - направленными и зависящими от координаты z вертикали

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{r})= -g(z)\mathbf{k} \quad (\mathbf{k}\text{-орт вертикали})$$

Тогда для однородного тела

$$d\mathbf{P}= -\gamma g(z)dV\, \mathbf{k}=-dP\mathbf{k}$$

Центром тяжести тела называется точка с радиусом вектором

$$\mathbf{R_c}= [{}_V\int \mathbf{r}\, dP] / P$$

Поле однородно, если $\mathbf{g}$ одинаково для всех точек. Тогда тяжесть тела есть вектор

$$\mathbf{P}=M\mathbf{g}$$

и центр тяжести совпадает с центром масс тела

Поле Земли неоднородно, поэтому центр тяжести телевизионных башен не совпадает с их центром масс. Вопрос- что выше?

Классификация сил

Силы, действующие на точки мат. системы естественно разделить на два класса.

Внутренними назовем силы F^i_k взаимодействия между точками системы, внешними F^e_k - силы взаимодействия точек системы с точками вне системы. Как и границы системы, это деление условно. Так для мела лежащего на столе, сила взаимодействия со столом может быть внутренней, если в систему включить стол, и внешней, если системой считать только мел.

Свойства внутренних сил

По 3му закон Ньютона внутренние силы являются парными, значит их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю.

$$\mathbf{V}^i = \sum \mathbf{F}^i_k = 0 \qquad \mathbf{M}^i_o = 0$$

Здесь $\mathbf{F}^i_k$- равнодействующая (сумма) внутренних сил, приложенных к точке m_k

Внутренние силы уравновешены только для твердого тела. Так солнечная система движется под действием внутренних сил, поскольку не является твердым телом.

Дифференциальные уравнения движения системы

2й закон Ньютона для точек системы

$$m_k\mathbf{r}_k{}^{**} = \mathbf{F}^i_k(\mathbf{r}_1\ldots \mathbf{r}_n; \mathbf{r}_1{}^*\ldots \mathbf{r}_n{}^*;t) + \mathbf{F}^e_k(\mathbf{r}_1\ldots \mathbf{r}_n; \mathbf{r}_1{}^*\ldots \mathbf{r}_n{}^*;t) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

дает n обыкновенных векторных дифференциальных уравнений 2го порядка относительно законов движения точек

$$\mathbf{r}_k(t) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

В декартовой системе координат они эквивалентны 3n скалярных уравнений.

$$m_k x_k{}^{**} = F^i_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t) + F^e_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$
$$m_k y_k{}^{**} = F^i_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t) + F^e_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t)$$
$$m_k z_k{}^{**} = F^i_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t) + F^e_k(x_1\ldots z_n; x_1{}^*\ldots z_n{}^*;t)$$

В большинстве случаев проинтегрировать эти уравнения невозможно, потому что внутренние силы являются неизвестными функциями.

Даже когда они известны, например, в задаче о трех точках, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, аналитического решения нет.

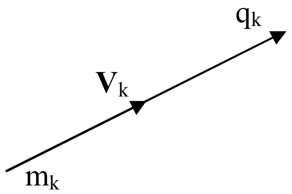
Иногда достаточно исследовать движение системы «в целом». Особенно это верно для твердого тела. Для него достаточно узнать, как движется центр масс системы и как тело вращается вокруг центра масс.

Изучить движение системы в целом позволяют 3 общие теоремы динамики системы:
- теорема об изменении количества движения,
- теорема об изменении кинетического момента,
- теорема об изменении кинетической энергии.

Теорема об изменении количества движения
Теорема о движении центра масс системы

Количество движений точки и системы.

Количеством движения точки m_k системы называется вектор $\mathbf{q_k}=m_k\mathbf{V_k}$



где $\mathbf{V_k}$– скорость точки в данный момент.

Рассмотрим систему $m_1 \ldots m_k \ldots m_n$

Количеством движения системы называется вектор

$$\mathbf{Q}=\sum \mathbf{q_k}=\sum m_k\mathbf{V_k}$$

В проекциях на декартовы оси

$$Q_x = \sum m_k x_k{}^* \quad Q_y = \sum m_k y_k{}^* \quad Q_z = \sum m_k z_k{}^*$$

Поскольку массы точек постоянны, Q можно выразить через скорость центра масс

$$\mathbf{Q}=(\sum m_k\mathbf{r_k})^*=M\mathbf{r_C}^*=M\mathbf{V_C}$$
$$Q_x = M\,x_C{}^* \quad Q_y = M\,y_C{}^* \quad Q_z = M\,z_C{}^*$$

Примеры.

а) Если центр масс вращающегося тела лежит на оси вращения, то $\mathbf{V_C}=0$, и количество движения тела равно нулю.

б) Количество движения колеса зависит только от скорости его центра $M\mathbf{V_C}$ и совершенно не зависит от скорости его вращения.

Теорема об изменении количества движения
(о движении центра масс системы).
Запишем 2й закон Ньютона для точки m_k системы в виде

$$\mathbf{q}_k^* = \mathbf{F}_k^{i} + \mathbf{F}_k^{e}$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{i}$- равнодействующая всех внутренних сил, а $\mathbf{F}_k^{e}$- внешних сил, приложенных к точке m_k.
Суммируя по k, получаем

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{V}^{i} + \mathbf{V}^{e}$$

Главный вектор внутренних сил $\mathbf{V}^{i}$ равен нулю, что приводит к теореме об изменении количества движения системы

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{V}^{e}$$

В проекциях на декартовы оси

$$Q_x^* = \sum F_{kx}^{e} \qquad Q_y^* = \sum F_{ky}^{e} \qquad Q_z^* = \sum F_{kz}^{e}$$

Поскольку

$$\mathbf{Q}^* = M\mathbf{V}_c^* = M\mathbf{W}_c^*$$

то эту теорему можно записать в виде

$$M\mathbf{W}_c^* = \mathbf{V}^{e},$$

который называется <u>теоремой о движении центра масс</u>. Она имеет вид второго закона Ньютона:
Центр масс системы движется как материальная точка с массой системы М, к которой приложены все внешние силы системы.
Так, после взрыва снаряда фейерверка, центр масс его частей продолжает двигаться по той же траектории, что и не взорвавшийся снаряд.
В проекциях на декартовы оси

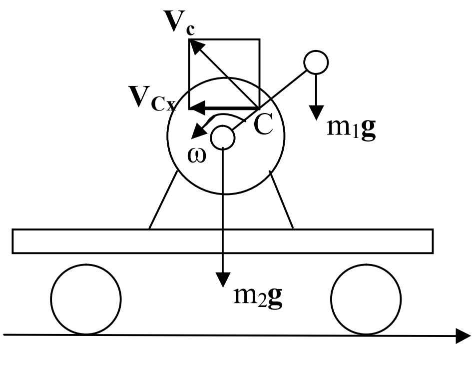
$$Mx_C^{**} = \sum F_{kx}^{e} \qquad My_C^{**} = \sum F_{ky}^{e} \qquad Mz_C^{**} = \sum F_{kz}^{e}$$

Следствия из теорем

1. Внутренние силы ***непосредственно*** не влияют на Q и на скорость центра масс. Однако они могут вызвать внешние силы, которые изменять количество движения.
   Так, внутренние силы в двигателе автомобиля вызывают силу трения между колесами и дорогой, которая и движет автомобиль, изменяя скорость его центра масс.
   Другой пример объясняет «чудо». В Южной Америке есть дерево, с которого осенью падают орехи. Через некоторое время твердые орехи начинают прыгать, вызывая ужас у непосвященных. Ведь твердое тело не может прыгать. Объяснение найдем, расколов орех. Там обнаружим жучка, появившегося из личинки, прогрызшей орех и съевшей его содержимое. В образовавшемся пространстве жучок начинает прыгать. С ним прыгает и орех. Так внутренние силы мышц жучка вызывают внешнюю реакцию Земли, которая приводит в движение центр масс системы жучек - орех. Абсолютно аналогично Вы можете встать на стул, накрыться коробкой и прыгать вместе с этой твердой оболочкой.

2. Если $\mathbf{V}^{e}=\mathbf{0}$, то $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{V}_c$ сохраняются. Так, центр масс солнечной системы движется равномерно и прямолинейно во вселенной.

3. Если $V_x^{e}=\mathbf{0}$, то Q_x и x_c^* сохраняются.
   Так, при движении автомобиля с реактивным двигателем, центр масс системы автомобиль-топливо остается на месте: автомобиль и выхлопные газы движутся при этом в разные стороны.
   Здесь можно привести, также, пример известной аферы. В 80х годах на научно популярных телепередачах демонстрировались «инерцоиды», доказывающие, якобы, существование, кроме общепризнанных опорного и реактивного способах движения, еще и «инерционного» способа.
   Демонстрировалась коробочка на тележке со свободно вращающимися колесами. Включался тумблер, и внутри коробочки начинал жужжать механизм. Тележку ставили на пол и отпускали без толчка.



Тележка начинала движение, что, якобы, доказывало наличие инерционного способа движения.

Ничего нового этот эксперимент не доказывает. Он просто иллюстрирует следствие 3. Если открыть коробочку, то под ней обнаружится моторчик с неуравновешенным грузиком. В момент отпускания тележки внешние силы вдоль оси x исчезают, и дальше центр масс сохраняет горизонтальную составляющую своей скорости $\mathbf{V_{Cx}}$. При этом сама тележка движется не равномерно, а рывками.