Лекция 10

Введение в теорию колебаний

Линейные колебания системы с одной степенью свободы

Устойчивость положения равновесия системы.

Все вокруг нас, даже с виду находящееся в покое, совершает периодическое движение, называемое колебаниями. Характерными условиями возникновения колебаний является наличие:

1. Равновесного положения (состояния или процесса), около которого совершаются колебания.
2. Сил, которые стремятся вернуть систему в положение равновесия и поэтому называются *восстанавливающими силами*.

Определение положения равновесия системы.

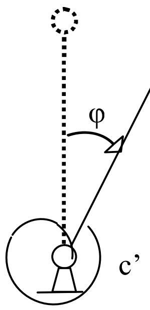
Рассматривается система с идеальными голономными стационарными связями. Пусть число степеней свободы системы $\boldsymbol{l} = 1$ и система консервативна с потенциалом $\Pi(q)$

Чтобы определить имеет ли система положения равновесия, воспользуемся принципом возможных перемещений, который гласит, что если такое положение есть, то в нем потенциальная энергия имеет экстремум.

$$\partial\Pi/\partial q = 0$$

Мы получили уравнение для нахождения положения равновесия. Если оно имеет решения, то система имеет положения равновесия.

Пример: Обращенный математический маятник.



Так называется математический маятник длины l и массы m, удерживаемый в вертикальном равновесном положении спиральной пружиной жесткости с’

Выберем положение равновесия за нулевой уровень потенциальной энергии: $\Pi(0) = 0$. Функцию $\Pi(\varphi)$ вычислим как работу силы тяжести и пружины при возвращении маятника в положение равновесия.

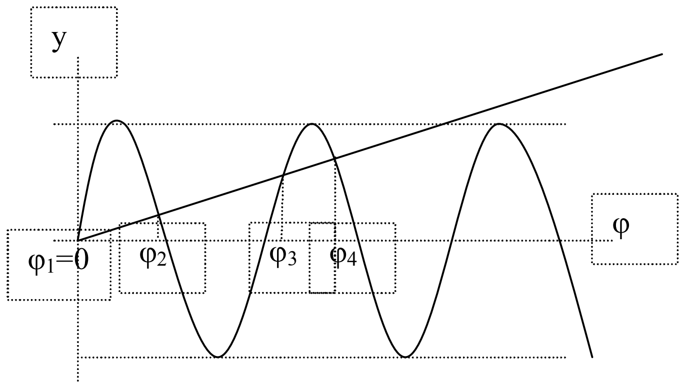
$$\Pi(\varphi) = -mgl(1-\text{Cos}\ \varphi) + 0.5c'\ \varphi^2$$

Статический принцип возможных перемещений дает условие равновесия:

$$\Pi' = 0 \quad \text{или} \quad c'\varphi = mgl\text{Sin}\varphi$$

Решения этого уравнения находятся в точках пересечения прямой $y = c'\varphi$ и синусоиды $y = mgl\text{Sin}\varphi$.

Чем меньше жесткость пружины, тем больше положений равновесия будет иметь система. График показывет, что система имеет 4 положения равновесия. Чем меньше жесткость с’ пружины, тем больше положений равновесия имеет маятник. При отсутствии пружины их бесчисленное количество, но физически это два вертикальных положения.

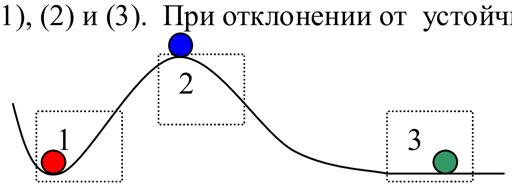


Если пружина жесткая

$$c' > mgl$$

то маятник имеет только одно положение равновесия

Различают три типа положения равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Для шарика это положения (1), (2) и (3). При отклонении от устойчивого положения шарик стремится в него вернуться.

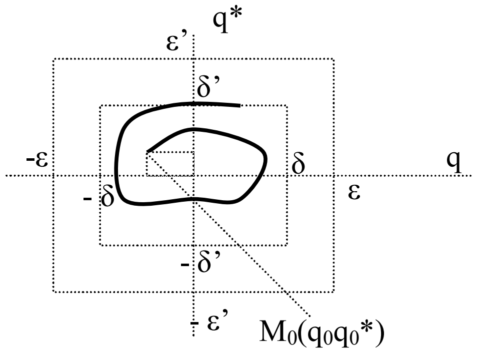


При малейшем отклонении от неустойчивого положения шарик туда не вернется. Положения безразличного равновесия составляют континуум - рядом с любым из них существует такое же.

Опыт показывает, что колебания возникают только около устойчивого положения равновесия.

Устойчивость положения равновесия по Ляпунову.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и положением равновесия, в котором выберем начало обобщенной координаты q. *Состояние системы* определим значениями ее координаты q(t) и скорости q*(t). Эти параметры примем за координаты *фазовой* *плоскости* qq*. Начало фазовых координат соответствует равновесному положению покоя системы.



Посмотрим как будет двигаться система, если ее вывести из состояния покоя. В момент t=0 дадим системе *возмущение*: $q_0q_0^*$. Далее система будет совершать *возмущенное движение* и изображающая точка опишет *фазовую траекторию*.

Рассматриваемое положение равновесия называется ***устойчивым по Ляпунову***, если по любым двум сколь угодно малым числам ε, ε' можно задать такие два с.у.м. числа δ, δ', что фазовая траектория с началом в области δ никогда не выйдет из области ε.

Линейные и нелинейные системы. Линеаризация.

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией П(q) и положением равновесия, в котором выберем начало q и нулевой уровень потенциальной энергии:

$$П(0)=0 \qquad П'(0)=0 \text{ – условие равновесия}$$

Разложим П(q) в ряд Маклорена, учтя условие равновесия:

$$П(q)=П(0)+П'(0)q+0.5П''(0)q^2+\ldots= 0.5П''(0)q^2+\ldots$$

Первое оставшееся слагаемое в ряду называется *квадратичной формой*, поскольку содержит квадрат q.

Система называется ***линейной по П***, если П является квадратичной формой q, т.е. все остальные члены разложения равны нулю.

Кинетическая энергия системы.

$$T=0.5\sum m_kV_k^2 \qquad \mathbf{V_k}=(\partial \mathbf{r}_k/\partial q)q^*$$

$$T=0.5[\sum(\partial \mathbf{r}_k/\partial q)^2]q^{*2}=0.5a(q)q^{*2}$$

Функцию a(q) разложим в ряд Маклорена.

$$a(q)=a(0)+a'(0)q+\ldots$$

Система называется ***линейной по Т***, если Т является квадратичной формой q* с постоянным коэффициентом, т.е. a(q)=Const. Система ***линейна***, если она линейна и по Т и по П.

Если система не линейна, то приходится её линеаризировать. ***Линеаризацией*** системы называется введение ограничений, позволяющих считать систему почти линейной. Если рассмотреть малые движения системы q, q*<<1, то в разложении функции П(q) останется только первый член-

$$П\approx 0.5cq^2 \qquad c=П''(0) \text{ – } \textit{жесткость системы}$$

После линеаризации в разложении a(q) в ряд Маклорена, остается только $a(0)\equiv a$ и

$$T=0.5aq^{*2}$$

Следствие: Получить квадратичную форму для нелинейной по Т системы можно, вычислив Т в положении равновесия системы.

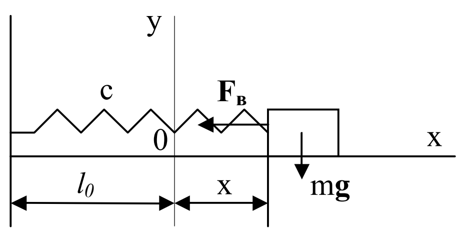
Примеры:

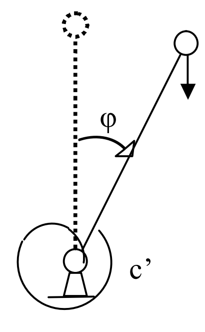
а) Линейная пружина:

$T=0.5mx^{*2}$; $П=0.5cx^2$ - линейна и по Т и по П: (30)

б) Обращенный маятник:

$T=ml^2\varphi^{*2}$; $П=-mgl(1-\cos\varphi)+0.5c'\varphi^2$ - нелинеен П, линеен по Т. линеаризации.





Теорема Лагранжа – Дирихле **(об устойчивом положении равновесия консервативной системы).**
Критерий Сильвестра.

Теорема: для того чтобы данное положение системы было устойчивым по Ляпунову необходимо (но не достаточно) чтобы функция П имела в этом положении минимум.
Выберем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия.
После линеаризации (если требуется), получим:
Для системы с ***одной степенью свободы***

$\Pi=0.5cq^2$ $\quad c=\Pi''(0)>0$ – условие минимума и устойчивости

Для системы с ***l*** степеней свободы:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_i(\partial\Pi/\partial q_i)_0 q_i+0.5\sum_{i,j}(\partial^2\Pi/\partial q_i\partial q_j)_0 q_i q_j=0.5\sum_{i,j}c_{ij}\, q_i q_j$$

Коэффициенты жесткости системы

$$c_{ij}=(\partial^2\Pi/\partial q_i\partial q_j)_0 \qquad i,j=1,2...l$$

образуют матрицу жесткости системы

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2l} \\ . & . & . & . \\ c_{l1} & c_{2l} & . & c_{ll} \end{pmatrix}$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле для устойчивости положения равновесия необходимо чтобы функция П в начале координат имела минимум. Поскольку П равна там нулю, то следует потребовать, чтобы в окрестности нуля функция П была положительно определенной.

Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы является ***критерий Сильвестра***:

положительность всех главных диагональных миноров матрицы жёсткости.

Если он выполняется, то данное положение равновесия является устойчивым по Ляпунову. Если критерий не выполняется, то требуются тонкие механизмы исследования устойчивости.

$$C_1 = c_{11}>0 \qquad C_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0 \quad \dots \qquad |C|>0$$