Лекция 11

Свободные колебания с одной степенью свободы без сопротивления.

Рассматривается движение консервативной системы с одной степенью свободы около устойчивого положения равновесия, где выбрано начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии. После линеаризации (если система не линейна), кинетическая и потенциальная энергии системы приобретут вид квадратичных форм с постоянными коэффициентами.

$$T=0.5a\dot{q}^2 \qquad \Pi=0.5cq^2$$

a>0 ввиду положительности кинетической энергии, c>0 ввиду устойчивости положения равновесия

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

приводит к **дифференциальному уравнению свободных колебаний без сопротивления**

$$a\ddot{q}=-cq \qquad \text{или} \qquad \ddot{q}+k^2q=0 \qquad (k^2=c/a \ \text{сек}^{-1})$$

Попробуем найти решение уравнения в виде экспоненты. Подставив

$$q=e^{\lambda t}$$

в уравнение, после сокращения на $e^{\lambda t}$ получим *характеристическое уравнение* для определения неизвестного параметра λ

$$\lambda^2+k^2=0$$

Уравнение имеет два мнимых корня

$$\lambda=\pm ki$$

Значит, уравнение имеет два независимых решения. Общее решение (второй интеграл) уравнения

$$q=C_1\text{Cos}kt+C_2\text{Sin}kt$$

содержит две произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 , которые могут быть найдены из начальных условий:

$$t=0: \quad q=q_0\,; \quad \dot{q}=\dot{q}_0$$

Чтобы их использовать, находим закон скорости (первый интеграл уравнения)

$$\dot{q}=-C_1k\text{Sin}kt+C_2k\text{Cos}kt$$

Подставляя начальные условия, находим при t=0

$$q_0=C_1 \quad \dot{q}_0=C_2k, \qquad \text{откуда } C_1=q_0 \qquad C_2=\dot{q}_0/k$$

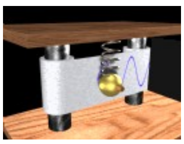
Окончательно

$$q=q_0\text{Cos}kt+(\dot{q}_0/k)\text{Sin}kt$$

Убеждаемся, что при устойчивом положении равновесия

$$c>0$$

система совершает периодическое движение с круговой собственной частотой $k=\sqrt{c/a}$ сек$^{-1}$



Удобнее представить закон движения в виде одной функции синуса. Для этого перейдем к новым постоянным A и α так, чтобы получить синус суммы

$$C_1=A\text{Sin}\,\alpha \qquad C_2=A\text{Cos}\,\alpha$$

Получим

$$q=A\sin(kt+\alpha)$$

Здесь A – амплитуда, (kt+α) – фаза, α- начальная фаза колебаний. Через период колебаний T фаза синуса изменится на 2π радиан

$$k(t+T)+\alpha=kt+\alpha+2\pi$$

следовательно, период колебаний

$$T=2\pi/k \text{ сек}$$

Диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления.
Её связь с полной механической энергией.

Практически любая система совершает колебания в некоторой среде. При движении системы возникают силы сопротивления среды. Например, силы вязкого сопротивления, пропорциональные первой степени скорости движения точек системы:

$$\mathbf{F}_k=-\beta_k \mathbf{v}_k \qquad (k=1,2,...,n)$$

Найдем обобщенную силу сопротивления, учтя тождество Лагранжа:

$$Q_{сопр}=\sum_{\kappa=1}^{n} F_k \bullet (\partial r_k/\partial q)=-\sum_{\kappa=1}^{n} \beta_k v_k \bullet (\partial v_k/\partial \dot q) = -\partial \Phi/\partial \dot q$$

Здесь введена диссипативная функция Релея Ф сил вязкого сопротивления:

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k^2$$

Видим, что выражение Ф совпадает с выражением кинетической энергии Т, если в последнем массы точек заменить коэффициентами сопротивления в них. Чтобы найти $Q_{сопр}$ надо записать функцию Релея в обобщенных координатах:

$$\mathbf{V_k}=(\partial \mathbf{r}_k/\partial q)\,\dot q$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\left[\sum \left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2\right]\dot q^2 = \frac{1}{2}b(q)\dot q^2$$

Система линейна по функции Релея Ф, если b(q)=Const (аналогия с Т). Если нет, тогда рассматриваются малые движения: q<<1 – система линеаризуется: b(q)≈a(0). Значит, как и Т, функцию Релея следует вычислять в положении равновесия системы q=0, что всегда упрощает вычисления.

Связь функции Релея с полной механической энергией.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и вязким сопротивлением. Потенциальная и кинетическая энергии, функция Релея для нелинейной системы

$$\Pi(q) \quad T=0.5a(q)\dot q^2 \quad \Phi=0.5b(q)\dot q^2$$

Имеют свойства

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q}\dot q=2T \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot q}\dot q=2\Phi \qquad \dot\Pi=\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot q \qquad \dot T=\frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q+\frac{\partial T}{\partial q}\dot q$$

Умножим уравнение Лагранжа для этой системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

на $\dot q$

$$\dot q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}\dot q=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot q$$

По формуле производной от произведения получаем

$$\dot q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\dot q\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q=2\dot T-\frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q$$

С учетом свойств функций Т, П, Ф получаем

$$2\dot T-\frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q-\frac{\partial T}{\partial q}\dot q=-\dot\Pi-2\Phi \qquad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi)=-2\Phi \qquad \dot E=-2\Phi$$

Этот результат можно сформулировать так:

Полная механическая энергия рассматриваемой системы убывает со скоростью 2Φ

Влияние сил вязкого сопротивления на движение системы.

Дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением Получим из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

После линеаризации (если требуется) получаем квадратичные формы

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2(q) \quad T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 \qquad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2$$

После подстановки в уравнение Лагранжа получаем **дифференциальное уравнение колебаний с сопротивлением**

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q} \qquad \text{или}$$

$$\ddot{q} + 2n + k^2 = 0 \qquad (*)$$

если ввести обозначения

коэффициент сопротивления $2n = b/a$ и квадрат собственной частоты $k^2 = c/a$

Найдем решение уравнения (*) в виде экспоненты:

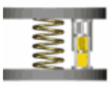
$$q = e^{\lambda t} \qquad (**)$$

Подставив решение в уравнение (*), после сокращения на $e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение рассматриваемого дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

Если характеристическое уравнение имеет корни, то уравнение (*) имеет решение вида (**)

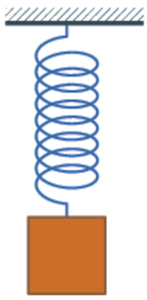
Это уравнение имеет 2 корня



$$\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

которым соответствуют 2 независимых решения, сколько и должно быть у уравнения второго порядка.

Вид решений зависит от знака подкоренного выражения



1. **Случай малого сопротивления** $n < k$

В этом случае корни комплексные и решение имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 Cos\tilde{k}t + C_2 Sin\tilde{k}t) \qquad \tilde{k} = \sqrt{k^2 - n^2} < k$$

Как всегда, постоянные C_1 C_2 находятся из начальных условий:

$$t=0: \quad q = q_0; \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

Исследуем это решение, перейдя к новым постоянным интегрирования

$$C_1 = ASin\alpha \qquad C_2 = ACos\alpha$$

Теперь

$$q = Ae^{-nt}\sin(\tilde{k}t + \alpha) \qquad \tilde{k} = \sqrt{(k^2 - n^2)} < k$$

Амплитуда колебаний Ae^{-nt} экспоненциально убывает с течением времени.

Система совершает затухающие колебания. Они являются квазипериодическими, т.к только положение равновесия система проходит через равные промежутки времени - квазипериод

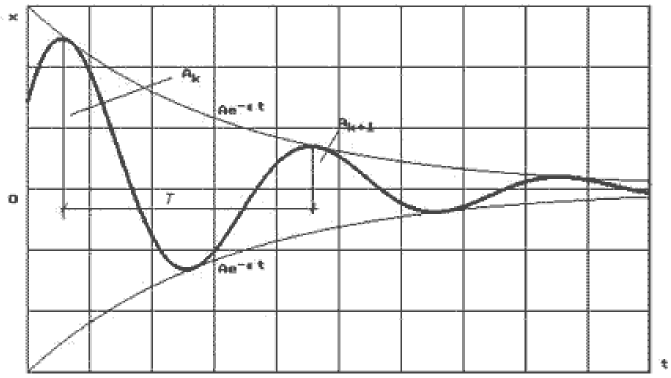
$$T_1 = 2\frac{\pi}{\sqrt{(k^2 - n^2)}} > T = 2\frac{\pi}{k}$$

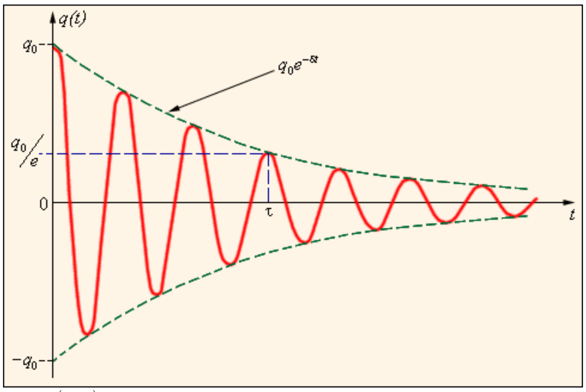
С увеличением сопротивления n квазипериод T_1 увеличивается и стремится к бесконечности при

$$n \to k$$

когда колебания вообще прекращаются.

Быстрота затуханий колебаний характеризуется ***декрементом***, равным отношению соседних размахов





$$\eta = A_k / A_{(k+1)} = e^{(nT_1)}$$

Иногда используют ***логарифмический декремент***

$$\ln \eta = nT_1$$

Измерив два соседних размаха и время T_1 можно, вычислить коэффициент сопротивления n.

2. **Случай большого сопротивления** $n > k$

В этом случае собственные числа уравнения – вещественные числа

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{(n^2 - k^2)}$$

и общее решение приобретает вид

$$q = C_1 e^{(\lambda_1 t)} + C_2 e^{(\lambda_2 t)}$$

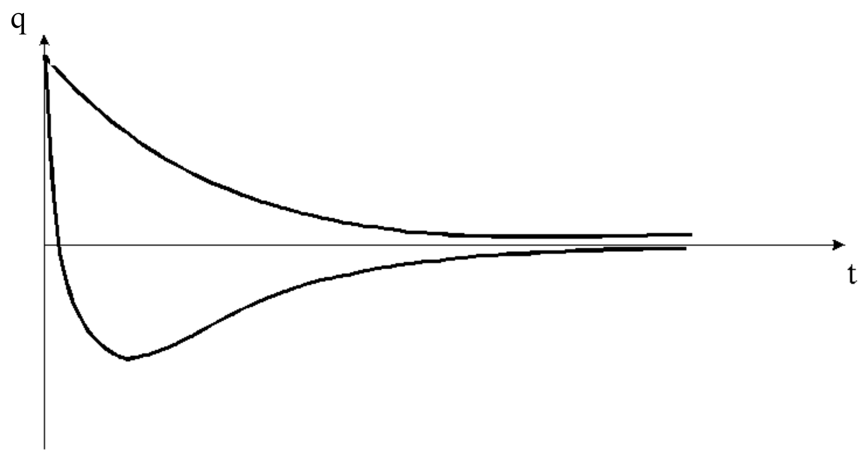
Таким образом, движение системы является *апериодическим,* т.е. не колебательным.

3. Пограничный случай $n = k$

В этом случае собственные числа кратны и решение примет вид

$$q = e^{(-nt)}(C_1 t + C_2)$$

Движение системы также является *апериодическим.* Графики движения в случаях 2 и 3 аналогичны



и зависят от начальной скорости $\dot{q}_0$. Если она напрвлена к положению равновесия, то при $|\dot{q}_0| > q_0(n + \sqrt{(n^2 - k^2)})$ система один раз пройдет положение равновесия $q = 0$ и постепенно вернется в него с другой стороны.

Как всегда, постоянные интегрирования $C_1 u C_2$ находятся из начальных условий:

$$t = 0: q = q_{0,} \dot{q} = \dot{q}_0$$