Лекция 12

Вынужденные колебания без сопротивления.

Было показано, что свободная консервативная система совершает не затухающие колебания. Сопротивление среды рассеивает энергию системы и делает ее колебания затухающими.

Энергия может не только рассеиваться, но и поступать из среды в систему. Пусть взаимодействие со средой выражается обобщенной силой - периодической функцией времени $Q(t)$. Как известно, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$Q(t)=\sum_{i=1}^{\infty} H_i \sin(p_i t+\delta_i)$$

Здесь H_i – амплитуда, p_i - частота, δ_i - начальная фаза i-ой гармоники.

Подставив квадратичные формы потенциальной и кинетической энергий

$$\Pi=\frac{1}{2}cq^2, \quad c>0 \qquad\qquad T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2, \quad a>0$$

в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}+Q(t)$$

получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q}+cq=\sum_{i=1}^{\infty} H_i \sin(p_i t+\delta_i)$$

Его решение складывается из решения однородного уравнения и частного решения. Частное решение будет иметь вид правой част, т.е суммы одинаковых по виду решений (гармоник). Поэтому ограничемся одной гармоникой, отбросив ее индекс i. Поделив уравнение на коэффициент инертности *a*, придем к **дифференциальному уравнению вынужденных колебаний без сопротивления**,

$$\ddot{q}+k^2 q=h\sin(pt+\delta) \qquad\qquad k^2=c/a \qquad\qquad h=H/a$$

Решение имеет вид

$$q=q_{oo}+q_ч$$

где q_{oo} – общее решение однородного уравнения $\ddot{q}+k^2 q=0$

$$q_{oo}=C_1 Sinkt+C_2 Coskt$$

Частное решение найдем в виде правой части

$$q_ч=A\sin(kt+\delta)$$

Подставив решение в уравнение, после сокащения на Sin находим амплитуду A

$$A=\frac{h}{k^2-p^2}$$ (имеет смысл только при $p\neq k$)

Общее решение приобретает вид

$$q=C_1 Coskt+C_2 Sinkt+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta)$$

Обобщенная скорость

$$\dot{q}=-C_1 kSinkt+C_2 kCoskt+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos(pt+\delta)$$

Найдем постоянные $C_1 и C_2$ из начальных условий:

$$t=0: \quad q = q_0; \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

$$q_0=C_1+\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta \qquad\qquad \dot{q}_0=C_2 k+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos\delta$$

Отсюда

$$C_1=q_0-\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta \qquad\qquad C_2=\frac{\dot{q}_0}{k}-\frac{p}{k}\frac{h}{k^2-p^2}\cos\delta$$

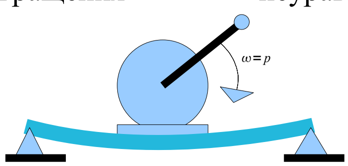
Теперь закон движения системы приобретает вид

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt$$
$$-\frac{h}{k^2 - p^2}(\sin\delta\, Coskt + \frac{p}{k}\cos\delta\, Sinkt)$$
$$+\frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta)$$

- Видим, что движение системы состоит из трех одновременных колебаний. Колебание с собственной частотой k и амплитудой, зависящей от начальных условий (первая строчка), колебание с собственной частотой k и амплитудой, не зависящей от начальных условий (вторая строчка) и собственно вынужденные колебания, с частотой вынуждающей силы p и амплитудой, не зависящей от начальных условий (третья строчка).

Биения и резонанс при отсутствии сопротивления.

Из закона движения видно, что амплитуда собственно вынужденных колебаний стремится к бесконечности при $p \to k$. Этот процесс можно наблюдать, если постепенно увеличивать скорость вращения $\omega = p$ неуравновешенного электормотора на гибкой балке приближаясь к собственной частоте колебаний мотора на балке k при отсутствии вращения.



Выясним, как ведет себя система при угловой скорости вращения электормотора, близкой к собственной частоте k.

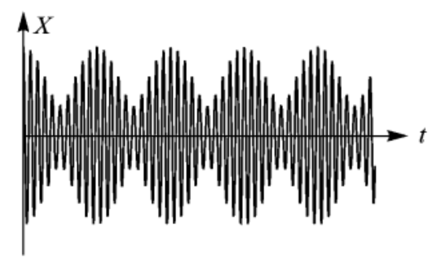
Для простоты положим начальные условия нулевыми:

t=0: $q_0 = 0 \quad \dot{q}_0 = 0$

Тогда, по формуле разности синусов получим

$$q = \frac{h}{k^2 - p^2}(\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)) = \frac{2h}{k^2 - p^2}\sin(\frac{p-k}{2}t)\cos((pt + \delta)t)$$

Видим, что при $p \to k$ амплитуда вынужденных колебаний увеличивается и становится периодической функцией малой частоты $\frac{p-k}{2}$. Такое движение называется **биениями**. Биения легко заметить в звуковом диапазоне частот, например, в самолете, когда сила звука вибраций становится перидической. Это значит, что какая-то деталь (будем надеется, что не принципиальная) близка к резонансу.



Рензонансом называется явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний при определенных частотах вынуждающей силы. Очевидно, что при отсутствии сопротивления резонанс наступает при $p = k$. Посмотрим, как изменяется амплитуда во времени, если запустить электормотор на балке сразу со скоростью $\omega = p = k$

При этом полученное частное решение теряет смысл. Будем искать его в виде

$$q_ч = BtCos(pt + \delta)$$

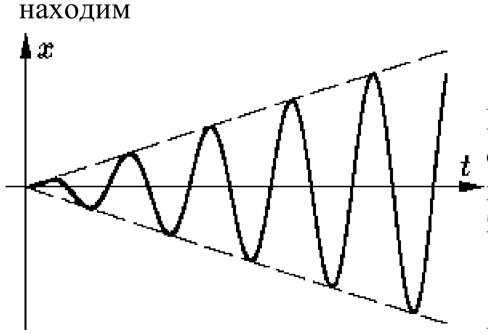
Отсюда

$$\dot{q}_ч = BCos(pt + \delta) - BptSin(pt + \delta) \qquad \ddot{q}_ч = -Btp^2\cos(pt + \delta) - 2\mathrm{BpSin}(pt + \delta)$$

Подставив $q \;\; и \;\; \ddot{q}$ в уравнение

$$\ddot{q} + p^2 q = h\sin(pt + \delta)$$

находим

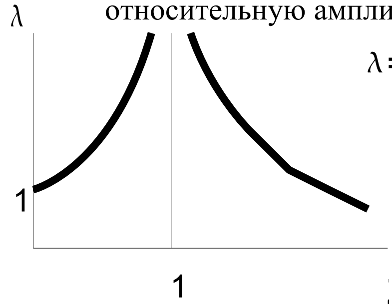


$$B = -\frac{h}{2\mathrm{p}} \qquad q = -\frac{h}{2\mathrm{p}}t\cos(pt + \delta)$$

Видим, что амплитуда нарастает линейно по времени со скоростью B, обратно пропорциональной вынуждающей частоте p. При достижении некторого предельного значения амплитуды B* устройство сломается. Этим опасен резонанс.

Построим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от вынуждающей частоты p.

При исследовании качественных зависимостей удобно переходить к безразмерным величинам. Вместо A рассматрим безразмерную



относительную амплитуду, называемую ***коэффициентом динамичности***

$$\lambda = \frac{A}{A_{ct}} \qquad A = \frac{h}{k^2 - p^2} \qquad A_{ct} = \frac{H}{c} = \frac{ah}{c} = \frac{h}{k^2}$$

$$\lambda = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - z^2} \qquad z = \frac{p}{k}$$

A_{ct} – ***статическое отклонение*** системы под действием амплитуды вынуждающей силы, z –***коэфициент настройки*** (вынуждающей частоты на собственную). Зависимость $\lambda(z)$ показывает, что резонанс наступает при z=1 и его амплитуда неограничена.

При $p \to \infty$ амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю.

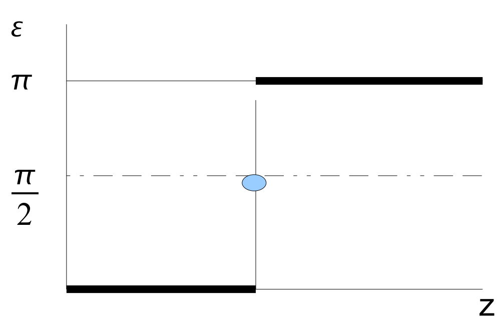
Очевидно, что есть предльная амплитуда колебаний, при которой конструкция разрушается. Чтобы избежать опасностей резонанса, надо работать либо при p<<k, либо p>>k.

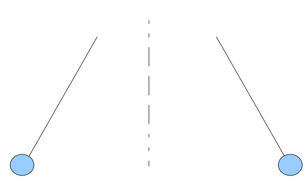
Зависимость сдвига фазы $\varepsilon(z)$

Фаза колебаний отличается от фазы вынуждающей силы на сдиг ε Запишем частное решение в виде $q_ч = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ и найдем как ε зависит от z

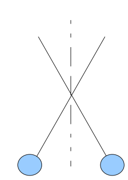
z	Q(t)	q	ε
0< z <1 (p<k)	$HSin(pt+\delta)$	$\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta-0)$	0
z =1 (p=k)	$HSin(pt+\delta)$	$-\frac{h}{2p} t\cos(pt+\delta) = \frac{h}{2p} t\sin(pt+\delta-\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$
z > 1 (p>k)	$HSin(pt+\delta)$	$-\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta) = \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta-\pi)$	π

При p < k вынужденные колебания синфазны (т.е происходят в одной фазе) с вынуждающей силой . Направления отклонения руки и шарика совпадают. При p > k они происходят в противофазе. Это наблюдается при горизональном колебании конца резинки раскидая.





p < k



p > k