Лекция 13

Вынужденные колебания при вязком сопротивлении. Закон движения.

Рассматривается все та же система с одной степенью свободы, имеющая положение устойчивого равновесия в начале координаты . На систему действуют потенциальные силы с энергией $\Pi=\frac{1}{2}cq^2$ (c>0), вынуждающая обобщенная сила $Q=HSin(pt+\delta)$ и, теперь еще силы вязкого сопротивления с функцмей Релея $\Phi=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$ (b>0). Кинетическая энергия по-прежнему $T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$ (a>0)

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}+Q(t)$$

получим неоднородное ***дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с сопротивлением***

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=hSin(kt+\delta) \qquad 2n=\frac{b}{a} \quad k^2=\frac{c}{a}$$

Решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения

$$q=q_{oo}+q_{ч}$$

Решение однородного уравнения q_{oo} даже при для n<k

$$q=e^{-nt}(C_1Cos\tilde{k}t+C_2Sin\tilde{k}t) \qquad \tilde{k}=\sqrt{k^2-n^2}$$

исчезает со временем. Со временем останется только частное решение, которое будем искать в виде

$$q_ч=ASin(pt+\delta-\varepsilon)$$

где ε - сдвиг фазы решения по отношению к вынуждающей силы.
Подставив в уравнение искомое решение и его производные

$$\dot{q}=ApCos(pt+\delta-\varepsilon) \qquad \ddot{q}=-Ap^2\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

представив правую част в виде

$$hSin(pt+\delta)=h\sin(pt+\delta-\varepsilon+\varepsilon)=hSin\,\delta\cos(pt+\delta-\varepsilon)+hCos\,\delta\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

собираем коэффициенты при

$$\sin(kt+\delta-\varepsilon)\ : \qquad A(k^2-p^2)=hCos\,\delta$$

$$\cos(kt+\delta-\varepsilon)\ : \qquad 2np\,A=hSin\,\delta$$

Возведя в квадрат, сложив и извлечив корень квадратный, находим Амплитуду колебаний

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$$

Поделив второе на первое, получим тангенс сдвига фаз

$$tg\,\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2}$$

Окончательно частное решение приобретает вид

$$q_ч=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4n^2p^2}}\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

Зависимости $\lambda(z)$ *и* $\varepsilon(z)$
Коэффициент динамичности

$$\lambda=\frac{A}{A_{ct}} \qquad A_{ct}=\frac{h}{k^2}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}} \qquad z=\frac{p}{k}$$

Исследуем эту зависимость.
Очевидно, что $\lambda(0)=1 \quad \lambda(\infty)\to 0$
Чтобы найти экстремумы, исследуем подкоренную функцию

$$y=(1-z^2)^2+4\nu^2 z^2$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум

$$y'=2(1-z^2)(-2z)+8\nu^2 z=4z(z^2-1+2\nu^2)=0$$

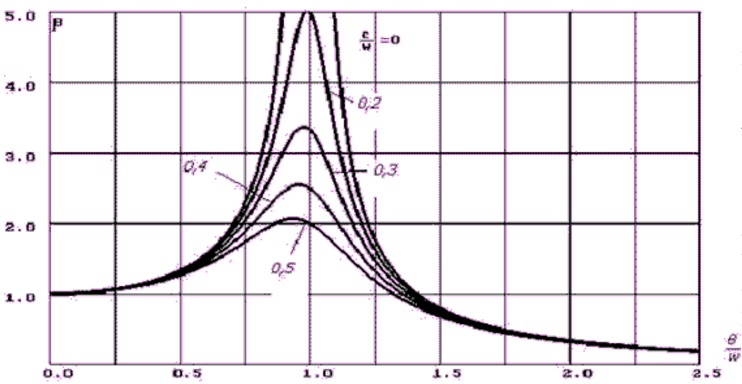
Корни

$$z_1=0 \quad z_2=\sqrt{1-2\nu^2}$$

z_2 существует только для

$$\nu<\nu^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

.



Чтобы решить min или max при z=0, найдем y”(0)

$$y''(0)=4(-1+2\nu^2)$$

y(z) имеет максимум, а λ минимум, если

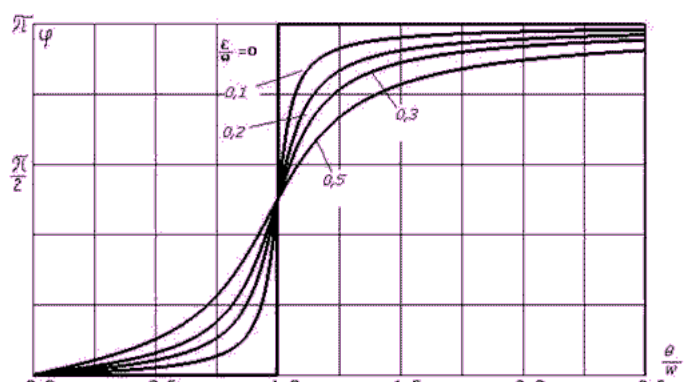
$$\nu<\nu^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Итак, при малом сопротивлении существует 2 экстремума. В нуле λ имеет минимум, а при $z_2=\sqrt{1-2\nu^2}$ - максимум, т.е. наступает резонанс. С увеличением сопротивления ν резонанс наступает при все меньших значениях вынуждающей частоты (меньшем z) и его амплитуда становится меньше. Наконец при

$$\nu>\nu^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

явление резонанса исчезает.
При отсутствии сопротивления резонанс с бесконечной амплитудой наступает при z=1.

Все вышесказанное отражено на рисунке, где отображены графики $\lambda(z)$ для разных значенияй сопротивления ν .



Исследуем зависимость сдвига фаз $\varepsilon(z)$

Для всех сопротивлений $\varepsilon(1)=\dfrac{\pi}{2}$, значит все графики проходят через эту точку.

Выводы:

1. Консервативная система (все силы потенциальны) совершает незатухающие колебания около положения устойчивого равновесия (c >0).
2. Среда (сила вязкого сопротивления) отнимает у системы полную механическую энергию, поэтому даже при малом сопротивлении колебания будут затухающими, а при большом сопротивлении вообще отсутствуют.
3. Если в систему без сопротивления поступает энергия в виде периодической вынуждающей силы, то появляются вынужденные колебания с частотой вынуждеающей силы. Их амплитуда достигает бесконечного значения при p = k (явление резонанса).
4. С увеличением сопротивления резонансная амплитуда уменьшается и он наступает все при меньших значениях вынуждающей частоты.
5. Явление резонанса исчезает при $\nu>\nu^o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$