Лекция 14

Колебания системы с двумя степенями свободы.

Квадратичная форма потенциальной энергии. Условие устойчивости положения равновесия.

Рассматриваем систему с 2-мя степенями свободы и обобщенными координатами q_1, q_2. Все силы потенциальны, значит существует функция П (q_1, q_2). Система имеет положение равновесия, в котором выбираем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии П (0,0) = 0. По условию равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}(0,0)=0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}(0,0)=0$$

Разложим П в ряд Маклорена в нуле:

$$\Pi(q_1, q_2)=\Pi(0,0)+\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}(0,0)q_1+\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}(0,0)q_2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2{}_1}(0,0)q_2^2+2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}(0,0)q_1 q_2+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2{}_2}(0,0)q_2^2\right]+...$$

Ввиду нулевого уровня и условий равновесия первым ненулевым слагаемым окажется квадратичная форма

$$\Pi=\frac{1}{2}(c_{11}q_1^2+2c_{12}q_1 q_2+c_{22}q_2^2)+...$$

Здесь обозначены коэф-ты жесткости системы:

$$c_{11}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2{}_1}(0,0) \qquad c_{12}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}(0,0) \qquad c_{22}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2{}_2}(0,0)$$

Система называется ***линейной по П***, если дальнейшие члены разложения отсутствуют, иначе говоря П – есть квадратичная форма. Если система не линейна, то рассматривают малые движения около положения равновесия и дальнейшие слагаемые отбрасывают.

Коэф-ты жесткости образуют симметричную матрицу жесткости:

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{11} \end{bmatrix}$$

при этом $c_{12} = c_{21}$, т.к порядок взятия смешанной производной не имеет значения.

Колебания возникают только около положения устойчивого равновесия. Условием устойчивости по Ляпунову является наличие min П в нуле. Поскольку П (0,0) = 0, то это значит, что в окрестности нуля П должна быть положительной. Условием положительности квадратичной формы в окрестности нуля является критерий Сильвестра - положительность главных диагональных миноров матрицы жесткости:

$$c_{11}>0 \quad |C|=c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0$$

Квадратичная форма кинетической энергии.

$$T=\frac{1}{2}\sum(m_k v_k^2) \qquad v_k=\dot{\boldsymbol{r}}_k=\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 \qquad \frac{\partial r_k}{\partial q_1}(q_1, q_2) \qquad \frac{\partial r_k}{\partial q_2}(q_1, q_2)$$

Теперь

$$T=\frac{1}{2}\left(\left[\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)^2\right]\dot{q}_1^2+2\left[\sum m_k\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2+\left[\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right)^2\right]\dot{q}_2^2\right)$$

Видим, что Т – квадратичная форма обобщенных скоростей. Коэффициенты формы в общем случае являются функциями обобщенных координат

$$a_{11}(q_1, q_2)=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)^2 \qquad a_{12}(q_1, q_2)=\sum m_k\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\frac{\partial r_k}{\partial q_2} \qquad a_{22}(q_1, q_2)=\sum m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_2}\right)^2$$

Система называется ***линейной по T***, если эти коэффициенты постоянны.

Если система не линейна, то ее линеаризуют, рассматривая малые движения системы. Функции коэффициентов раскладывают в ряд Маклорена и оставляют только первый член разложения

$$a_{11}=a_{11}(0,0) \qquad a_{121}=a_{12}(0,0) \qquad a_{22}=a_{22}(0,0)$$

Это значит, что получить искомую форму T можно, вычислив T в нуле. Поскольку кинетическая энергия положительна, то для ее коэффициентов всегда выполняется критерий Сильвестра:

$$a_{11}>0 \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

Дифференциальные уравнения движения системы. Главные колебания.

Подставив в уравнения Лагранжа системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

формы T и П, получим ***дифференциальные уравнения колебаний системы***:

$$a_{11}\ddot q_1+a_{12}\ddot q_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0$$

$$a_{21}\ddot q_1+a_{22}\ddot q_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0$$

Решение уравнений ищем в виде периодических синфазных функций с разными амплитудами:

$$q_1=ASin(kt+\alpha) \qquad\qquad q_2=BSin(kt+\alpha)$$

Подставив искомые решения в дифф. ур-ния, после сокращения на $\sin(kt+\alpha)$, получим однородные алгебраические уравнения относительно амплитуд A и B, с неизвестным параметром k – собственной частотой.

$$(c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B=0$$

$$(c_{21}-a_{21}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B=0$$

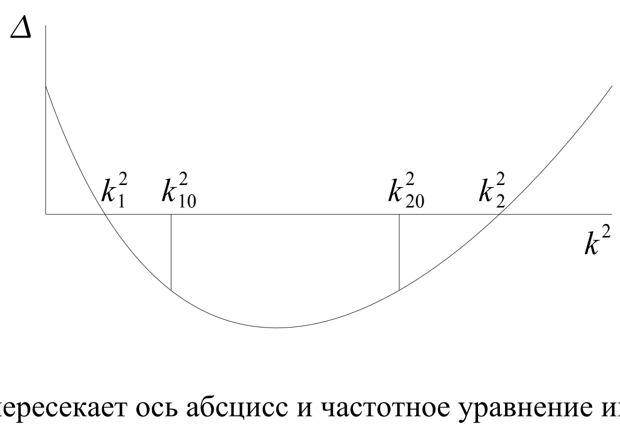
Как известно, нетривиальное (ненулевое) решение однородных уравнений существует, если определитель матрицы системы равен нулю:

$$\Delta(k^2)=(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0 \quad (*)$$

Раскрыв по степеням k, приходим к биквадратному уравнению относительно собственной частоты k

$$\Delta(k^2)=k^4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)+k^2(2c_{12}a_{12}-c_{11}a_{22}-c_{22}a_{11})+c_{11}c_{22}-c_{12}^2=0 \qquad (**)$$

Оно называется ***частотным уравнением*** поскольку два его решения определяют частоты колебаний системы. Колебания возможны только при положительных вещественных значениях k^2. Покажем, что они таковыми и являются. Для этого построим график функции $\Delta(k^2)$



$\Delta(0)=c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0$ по (*)

$\Delta(\infty)\to\infty$ по (**)

Согласно выражению(*) $\Delta(k_{10}^2)<0$

$\Delta(k_{20}^2)<0$

Величины

$$k_{10}^2=\frac{c_{11}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad k_{20}^2=\frac{c_{22}}{a_{22}}$$

называются **квадратами парциальных частот**.

Таким образом, кривая дважды пересекает ось абсцисс и частотное уравнение имеет 2 вещественных и положительных корня k_1^2 k_2^2 Значит, при устойчивости равновесия частоты будут вещественны и система будет совершать колебания.

Однородные уравнениям амплитуд имеют нетривиальное решение только для двух значений собственной частоты, при которых определитель матрицы системы обращается в ноль, а уравнения становятся зависимыми.

Из оставшегося одного из уравнений для каждой частоты можно найти только отношение амплитуд A и B – так называемый коэффициент формы $\mu = B/A$

Для частоты k_1 $\mu_1 = B_1/A_1 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2}$

Для частоты k_2 $\mu_2 = B_2/A_2 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2}$

Видим, что система одновременно совершает 2 ***главных колебания*** с частотами k_1 и k_2 .

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)$$
$$q_2 = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)$$

В полученном решении есть четыре произвольные постоянные инегрирования

$$A_{1,} A_{2,} \alpha_{1,} \alpha_2$$

которые могут быть найдены из четырех начальных условий

$$t = 0 : q_1 = q_{10} ; \quad q_2 = q_{20} ; \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10} ; \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}$$

Замечание о нормальных координатах:

Можно показать, что для любой системы существуют **нормальные** обобщенные координаты $\hat{q}_{1,} \hat{q}_2$ **,** в которых

$$a_{12} = 0 \quad c_{12} = 0$$

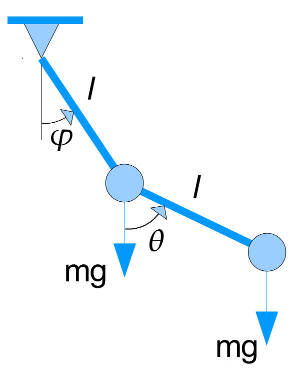
В этих координатах дифференциальные уравнения становятся независимыми:

$$a_{11} \ddot{\hat{q}}_1 + c_{11} \hat{q}_1 = 0$$
$$a_{22} \ddot{\hat{q}}_2 + c_{22} \hat{q}_2 = 0$$

Здесь парциальные частоты равны собственным частотам системы.

Следует, однако, иметь в виду, что труд по построению этих координат равноценен рассматрению движения системы в исходных координатах.

Колебания двойного математического маятника



Маятник представляет из себя два одинаковых математическихмаятника массы m и длины *l,* соединенных последовательно. Обобщенные координаты: $\varphi \quad \theta$

Положение устойчивого равновесия $\varphi = 0 \quad \theta = 0$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgl(1 - \cos\varphi) + mgl[(1 - \cos\varphi) + (1 - \cos\theta)]$$

Система не линейна, поэтому рассматриваем малые колебания

$$\Pi = \frac{mgl}{2}\varphi^2 + \frac{mgl}{2}(\varphi^2 + \theta^2) = \frac{1}{2}(c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\theta + c_{22}\theta^2)$$

Коэффициенты жесткости системы

$$c_{11} = 2mgl \quad c_{12} = 0 \quad c_{22} = mgl$$

Кинетическую энергию вычисляем в положении равновесия

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi} + l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\dot{\varphi}\dot{\theta} + a_{22}\dot{\theta}^2)$$

Отсюда коэффициенты инертности системы

$$a_{11} = 2ml^2 \quad a_{12} = ml^2 \quad a_{22} = ml^2$$

Частотное уравнение:

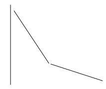
$$k^4 - 4\frac{g}{l}k^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0$$

дает собственные частоты

$$k_{1,2} = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

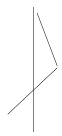
Им соответствуют коэффициенты формы:

$$\mu_{1,2} = \mp\sqrt{2}$$



Положительный коэффициент формы $\mu_1 = \sqrt{2}$ соответствует синфазным колебаниям системы, когда оба маятника в данный момент отклоняются в одну и ту же сторону. Если оба маятника отклонить в одну сторону, но нижний в больше, чем верхний, и отпустить без начальной скорости, то система будет совершать 1ое главное колебание с частотой

$$k_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}$$



Отрицательный коэффициент формы $\mu_2 = -\sqrt{2}$ соответствует противонфазным колебаниям системы, когда маятники в данный момент отклонены в противоположные стороны. Если маятники отклонить в разные стороны, нижний в $\sqrt{2}$ больше, чем верхний, и отпустить без начальной скорости, то система будет совершать 2ое главное колебание с частотой

$$k_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}$$