Лекция 2

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси

Рассмотрим систему материальных точек с массами $m_1 m_2 .... m_n$, имеющих в данный момент скорости $\mathbf{v_1 v_2 ..... v_n}$ относительно инерциальной системы отсчета. Выберем произвольный центр O (Рис.1). ***Кинетическим моментом*** точки m_j относительно центра O называется вектор момента ее количества движения относительно этого центра.

$$\mathbf{K_{oj}}=\mathbf{m_o(q_j)}=\mathbf{r_j}\times m_j\mathbf{v_j} \qquad (j=1,2...n) \qquad (1)$$

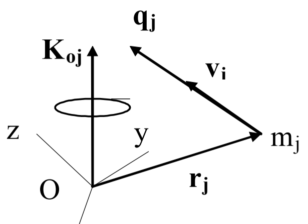


Рис.1

Известно, что векторное умножение можно записать через присоединенную матрицу первого сомножителя– радиуса вектора **r.** Опуская индекс j, запишем матричное выражение в осях xyz с началом в O:

$$K_o=mRv \qquad (2)$$

где R- кососимметричная присоединенная матрица столбца r

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} yz^*-zy^* \\ zx^*-xz^* \\ xy^*-yx^* \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Проекция кинетического момента на ось называются ***кинетическим моментом точки относительно оси***. Он вычисляется либо аналитически по формулам (3), либо как момент силы относительно оси. Момент дает только касательная составляющая вектора **q** (Рис.2).

$$K_Z=\pm q_\tau h \qquad (4)$$

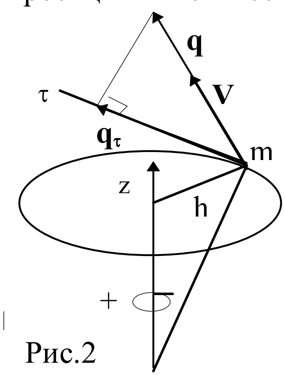


Рис.2

Момент обращается в ноль, если вектор количества движения (скорость точки) лежит в одной плоскости с осью (параллелен или пересекает ось)

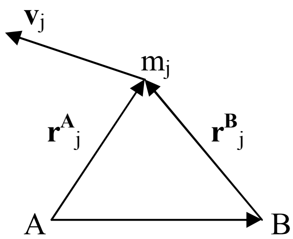
Кинетическим моментом системы относительно центра O называется главный момент количеств движений точек системы относительно этого центра.

$$\mathbf{K_o}=\Sigma\mathbf{K_{oj}}=\Sigma m_j\mathbf{r_j}\times\mathbf{v_j} \qquad (5)$$

Аналогично с формулой (3) проекции вектора (4) образуют столбец кинетических моментов относительно осей координат

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}=\Sigma m_j\begin{pmatrix} y_j z_j{}^*-z_j y_j{}^* \\ z_j x_j{}^*-x_j z_j{}^* \\ x_j y_j{}^*-y_j x_j{}^* \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Найдем связь между кинетическими моментами системы относительно двух неподвижных центров A и B. Обозначим через $\mathbf{r^A}_j$, $\mathbf{r^B}_j$ радиусы векторы точки m_j системы относительно центров A и B соответственно. Очевидно, что



$$\mathbf{r^A}_j=\mathbf{AB}+\mathbf{r^B}_j$$

Тогда

$$\mathbf{K_A}=\Sigma m_j\mathbf{r^A}_j\times\mathbf{v_j}=\Sigma m_j\,[(\mathbf{AB}+\mathbf{r^B}_j)\times\mathbf{v_j}]=\mathbf{AB}\times\Sigma m_j\,\mathbf{v_j}+\Sigma m_j\mathbf{r^B}_j\times\mathbf{v_j}$$

Окончательно

$$\mathbf{K_A}=\mathbf{K_B}+\mathbf{AB}\times M\mathbf{v_c} \quad \text{или} \quad \mathbf{K_A}=\mathbf{K_B}+\mathbf{AB}\times\mathbf{Q}$$

Формула напоминает зависимость главного момента системы сил от центра. Заметим, что при неподвижном центре масс тела (например сферическое движение вокруг C или вращение вокруг центральной оси) кинетический момент не зависит от центра.

$$\mathbf{v_C}=\mathbf{0}: \quad \mathbf{K_A}=\mathbf{K_B}=\mathbf{K_C}=\mathbf{K}$$

Кинетический момент системы в сложном движении

Наряду с инерциальной системой отсчета с осями xyz введем поступательно движущиеся С координаты с началом в центре масс С (Рис.3). Теперь движение каждой точки можно представить как сложное. Скорость точки будет складываться из переносной скорости, равной для всех точек скорости центра масс С и относительной скорости $\mathbf{v_{jr}}$

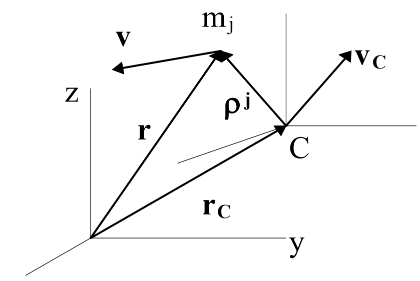


Рис.3

$$\mathbf{v_j}=\mathbf{v_C}+\mathbf{v_{jr}} \qquad (7)$$

Кроме того, из рисунка видно, что

$$\mathbf{r_j}=\mathbf{r_C}+\boldsymbol{\rho_j} \qquad (8)$$

Теперь

$$\mathbf{K_o}= \Sigma m_j(\mathbf{r_C}+\boldsymbol{\rho_j})\times(\mathbf{v_C}+\mathbf{v_{rj}})=$$
$$\mathbf{r_C}\times\mathbf{v_C}\,\Sigma m_j+ \mathbf{r_C}\times\Sigma m_j\mathbf{v_{rj}}+(\Sigma m_j\boldsymbol{\rho_j})\times\mathbf{v_C}+\Sigma m_j\boldsymbol{\rho_j}\times\mathbf{v_{rj}} \qquad (9)$$

Здесь второе и третье слагаемые равны нулю поскольку по определению центра масс

$$\Sigma m_j\rho_j=M\rho_C=0 \qquad \Sigma m_j v_{rj}=d/dt\Sigma m_j\rho_j=0 \qquad (10)$$

Последнее слагаемое логично назвать относительным кинетическим моментом системы

$$\mathbf{K_C}= \Sigma m_j\boldsymbol{\rho_j}\times\mathbf{v_{rj}} \qquad (11)$$

Теперь

$$\mathbf{K_O}= \mathbf{K_C}+ \mathbf{r_C}\times M\mathbf{v_C} \qquad (12)$$

Заметим, что в отличие от похожей формулы, связывающей кинетические моменты относительно неподвижных центров, здесь С произвольно движется и в **Кс** входят относительные скорости точек. Вывод формулы показывает, что такая простая формула (12) справедлива только для центра масс, что подчеркивает значение этого центра в динамике.

Теорема об изменении кинетического момента системы.

Дифференцируя (5) по времени находим

$$d\mathbf{K_O}/dt=\Sigma m_j(\mathbf{v_j}\times\mathbf{v_j} +\mathbf{r_j}\times\mathbf{w_j})= \Sigma\mathbf{r_j}\times m_j\mathbf{w_j}=$$
$$\Sigma[\mathbf{r_j}\times(\mathbf{F^e_j}+\mathbf{F^i_j})]=\Sigma\mathbf{m_O}(\mathbf{F^e_j})+\Sigma\mathbf{m_O}(\mathbf{F^i_j})=\mathbf{M^e_O}+\mathbf{M^i_O}=\mathbf{M^e_O} \qquad (13)$$

Здесь учтено, что векторное произведение вектора на себя и главный момент внутренних сил равны нулю. Таким образом, приходим к ***теореме об изменении кинетического момента***

$$d\mathbf{K_O}/dt=\mathbf{M^e_O} \qquad (14)$$

В проекциях на оси xyz с началом в О теорема имеет вид

$$dK_x/dt=M^e_x=\Sigma m_x(F^e_j)$$
$$dK_y/dt=M^e_y=\Sigma m_y(F^e_j) \qquad (15)$$
$$dK_z/dt=M^e_z=\Sigma m_z(F^e_j)$$

Подставим теперь выражение (12) в формулу (14). После дифференцирования получим

$$d\mathbf{K_C}/dt+ \mathbf{v_C}\times M\mathbf{v_C}+\mathbf{r_C}\times M\mathbf{w_C}=\mathbf{M^e_O} \qquad (16)$$

С учетом того, что $\mathbf{v_C}\times M\mathbf{v_C}=\mathbf{0}$, $M\mathbf{w_C}=\mathbf{V^e}$ и теоремы о зависимости главного момента от центра получаем

$$d\mathbf{K_C}/dt= \mathbf{M^e_O}-\mathbf{r_C}\times\mathbf{V^e}= \mathbf{M^e_O}+\mathbf{CO}\times\mathbf{V^e}=\mathbf{M^e_C} \qquad (17)$$

Доказанная ***теорема об изменении относительного кинетического момента***

$$d\mathbf{K_C}/dt= \mathbf{M^e_C} \qquad (18)$$

имеет тот же вид, что и в инерциальной системе.

В проекциях

$$dK_{xC}/dt= \Sigma m_{xC}(F^e_j)$$
$$dK_{yC}/dt= \Sigma m_{yC}(F^e_j) \qquad (19)$$
$$dK_{zC}/dt= \Sigma m_{zC}(F^e_j)$$

Следствия

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении цента масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.

2. Если $\mathbf{M}^e_O$=0, то $\mathbf{K_O}$**=Const** векторно. Так для Солнечной системы, которую можно считать изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая ***плоскостью Лапласа***, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.

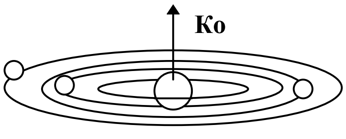


Рис.4

3. Если, в частном случае только M_z=0, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента K_z=Const. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку M_z=0. Значит, во время движения произведение $mV_\perp h$ будет постоянным, т.е.

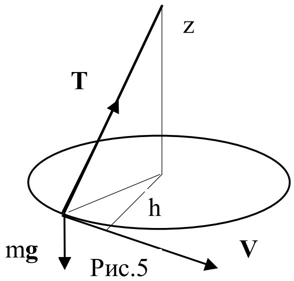


Рис.5