Лекция 3

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика твердого тела полностью описывается двумя общими теоремами, которые мы изучили: теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента.

Кинетический момент тела в свободном движении

Рассмотрим твердое тело, совершающее свободное движение в системе отсчета S_1 с координатными осями xyz (Рис.1). Кинетический момент тела относительно неподвижного центра O вычислим по формуле

$$\mathbf{K_O}= \mathbf{K_C}+ \mathbf{r_C}\times M\mathbf{v_C} \qquad (1)$$

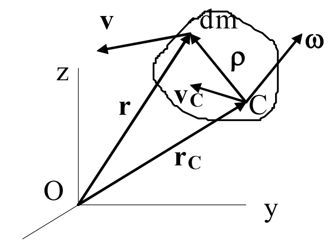

Рис.1

Поскольку тело сплошное, то в выражении $\mathbf{K_C}$ (Л3,11) сумму следует заменить интегралом по объему тела, а массу точки- элементарной массой dm. Относительную скорость точки найдем как скорость точки тела, вращающегося вокруг центра масс C, по формуле Эйлера $\mathbf{v_r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$. Получаем

$$\mathbf{K_C}=\int [\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]dm =-\int [\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega})]dm \qquad (2)$$

Представим формулу (2) в матричной форме, записав векторное произведение через присоединенную кососимметричную матрицу R радиус- вектора $\boldsymbol{\rho}$

$$K_C=(-\int R^2 dm)\ \omega \qquad (3)$$

т.к. $\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega})$ => $R\ (R\omega)=R^2$ $\qquad R=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$

Величина в скобках в (3) является матрицей 3x3, и называется ***матрицей инерции*** J_C в центре C- осях.

$$J_C=-\int R^2 dm \qquad (4)$$

Таким образом, векторной формуле (1) для тела в свободном движении соответствует матричная запись:

$$K_O= J_C\ \omega + MR_C v_C \qquad (5)$$

Матрица инерции. Осевые и центробежные моменты инерции

Вычислим матрицу инерции в соответствии с формулой (4).

$$J_C=-\int R^2 dm \qquad (7)$$

$$-R^2=-\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Интеграл от матрицы представляет собой матрицу интегралов ее элементов, поэтому

$$J_C=\begin{pmatrix} \int .(y^2+z^2)dm & -\int .xydm & -\int .xzdm \\ -\int .yxdm & \int .(z^2+x^2)dm & -\int .yzdm \\ -\int .zxdm & -\int .zydm & \int .(x^2+y^2)dm \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Видим, что матрица J_C симметрична ($\int xydm=\int yxdm$ и т.д.) и, значит, имеет только шесть различных элементов. Диагональные элементы называются ***моментами инерции тела относительно осей x, y*** и ***z***

$$J_x=\int (y^2+z^2)dm \qquad J_y=\int (z^2+x^2)dm \qquad J_z=\int (x^2+y^2)dm \qquad (8)$$

Л.5

Остальные три интеграла называются- ***центробежными моментами инерции***

$$J_{xy}=J_{yx}=\int xydm \qquad J_{yz}=J_{yz}=\int yzdm \qquad J_{zx}=J_{xz}=\int zxdm \qquad (9)$$

Размерность всех моментов инерции [J]=кг м^2.

В принятых обозначениях матрица инерции приобретает вид

$$J_O=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Рассмотрим основные свойства моментов инерции, (другие свойства будут рассмотрены в специальной главе).

Осевые моменты инерции

Заметим, что под знаками интеграла здесь стоят квадраты расстояний h от точки dm до соответствующей оси. Так $y^2+z^2=h_x^2$. Поэтому момент инерции тела относительно произвольной оси L будет равен

$$J_L=\int h_L^2dm \qquad (11)$$

где h_L- расстояние текущей точки до оси.

Видим, что осевой момент не может быть отрицательным или равным нулю, и характеризует удаленность масс тела от оси. Например, момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, будет больше, чем относительно наклонной оси (Рис.2) поскольку x>h для любой точки стержня.

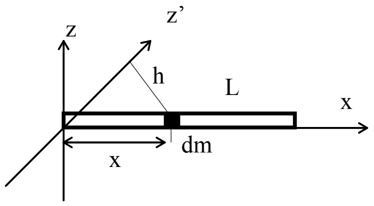

Рис.2

$$J_z>J_{z'}$$

Покажем, как практически вычисляется осевой момент инерции относительно оси z для однородного стержня массы M= γL (γ- погонная плотность, L- длина стержня). инерции стержня.

$$J_z=\int_0^L .x^2dm=\gamma\int_o^L .x^2dx=\gamma\frac{L^3}{3}=M\frac{L^2}{3} \text{ кг м}^2 \qquad (12)$$

Выражения моментов инерции тел правильной формы относительно некоторых осей можно найти в справочниках.

Центробежные моменты инерции.

В отличие от осевых моментов инерции, центробежные моменты инерции

$$J_{xy}=J_{yx}=\int xydm \qquad J_{yz}=J_{yz}=\int yzdm \qquad J_{zx}=J_{xz}=\int zxdm$$

могут быть отрицательными или равными нулю.

Ось называется ***главной осью инерции в точке O***, если оба центробежные момента с ее индексом равны нулю. Так ось z будет главной в O, если

$$J_{zx}=J_{yz}=0 \qquad (13)$$

В дальнейшем будет показано, что в любой точке пространства для данного тела существует три взаимно перпендикулярных главных оси инерции XYZ, в которых матрица инерции будет диагональной.

$$J_O=\begin{pmatrix} J_X & 0 & 0 \\ 0 & J_Y & 0 \\ 0 & 0 & J_Z \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Кинетический момент тела в сферическом и вращательном движениях.

Л.5

При указанных движениях тела формула (6) упрощается, т.к. тело имеет хотя бы одну неподвижную точку О, в которой мы и выберем начало координат.

Сферическое движение. Здесь отличны от нуля все три проекции угловой скорости и

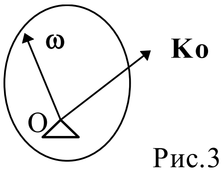

Рис.3

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\ -J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z \\ -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Для главных в центре О осей XYZ формула упрощается

$$\begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_X\omega_X \\ J_Y\omega_Y \\ J_Z\omega_Z \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Однако даже в этом случае векторы $\mathbf{K_O}$ и $\boldsymbol{\omega}$ оказываются не коллинеарными, поскольку осевые моменты инерции, вообще говоря, не одинаковы (Рис.3).

Вращательное движение. Если тело вращается вокруг неподвижной оси z, не главной в начале О, тогда $\omega_x=\omega_y=0$ и формула (16) приобретет вид

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{xz} \\ -J_{yz} \\ J_z \end{pmatrix} \omega_z \qquad (17)$$

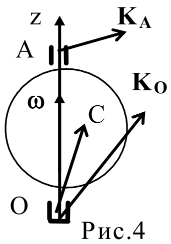

Рис.4
Ось z не главная в О

Видим, что в этом случае векторы $\mathbf{K_O}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарные. Кроме того, согласно формуле

$$\mathbf{K_A} = \mathbf{K_O} + \mathbf{AO} \times M\mathbf{v_C} \neq \mathbf{K_O}$$

Пусть теперь ось z – не центральная но главная в О. Тогда

$$\begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_Z \end{pmatrix} \omega_z \qquad (18)$$

и $\mathbf{K_O}$ будет направлен вдоль оси вращения (Рис.5). $\mathbf{K_A}$, однако, по-прежнему $\neq$ $\mathbf{K_O}$ поскольку ось не центральная..

Если, наконец, ось z является главной в О и центральной, то кинетический момент не будет зависеть от положения неподвижного центра на оси вращения (Рис.6). Это значит, что

$$\mathbf{K_A} = \mathbf{K_O} = \mathbf{K_C}$$

И все они лежат на оси вращения. Отсюда следует, что ***главная центральная ось является главной в любой своей точке***.

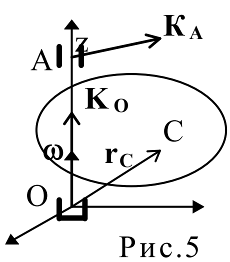

Рис.5

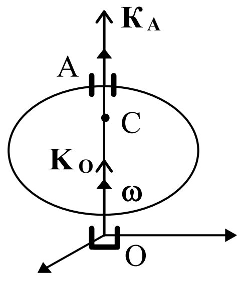

Рис.6

Преобразование матрицы инерции при переносе системы координат из центра инерции. Формула Штейнера-Гюйгенса

Рассмотрим тело в сферическом движении. Скорость произвольной точки тела, в том числе и центра масс С следует искать по формуле Эйлера.

$$\mathbf{v_C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_C} = -\mathbf{r_C} \times \boldsymbol{\omega}$$

В матричной форме

$$v_C = -R_C\omega \qquad (17)$$

Здесь R_C- присоединенная матрица столбца r_C

Подставив это выражение в формулу (6), получим

$$K_O = (J_C - MR_C^2)\ \omega \qquad (19)$$

С другой стороны, тот же кинетический момент можно вычислить через абсолютный радиус-вектор *r*:

$$\mathbf{K_O}=\int (\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}))\mathbf{dm} \qquad K_O=(-\int R^2 dm)\ \omega=J_O\,\omega \qquad (20)$$

Здесь J_O- матрица инерции в неподвижных осях

Сравнивая последние две формулы, приходим к ***обобщенной формуле Штейнера- Гюйгенса***

$$J_O= J_C -MR_C^2 \qquad (21)$$

Формула (1) позволяет определить компоненты матрицы инерции при параллельном переносе осей координат.

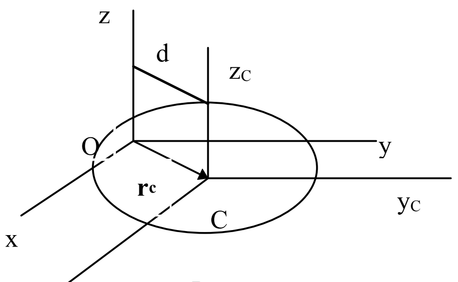

Рис. 1

Пусть xyz и x_C y_C z_C - попарно параллельные оси координат с началом в O и в C соответственно.

Найдем, как изменяется осевой момент инерции при переносе. Сравнивая правые нижние элементы матричного выражения (1), находим

$$J_z=J_{zC}+M(x_C^2+y_C^2)= J_{z'}+Md^2 \qquad (2)$$

Здесь d- расстояние между осями x и x_C. Это и есть ***формула Штейнера-Гюйгенса,*** выражающая момент инерции тела относительно произвольной оси через момент инерции относительно параллельной ей центральной оси.

Формула (2) показывает, что момент инерции относительно центральной оси меньше момента инерции относительно любой другой параллельной ей оси.

$$J_{xC}<J_x$$

Сравнивая недиагональные элементы матричного соотношения (2), находим формулу преобразования центробежных моментов инерции при переносе системы отсчета. Например

$$J_{xy} = J_{xCyC} -Mx_Cy_C \qquad (3)$$