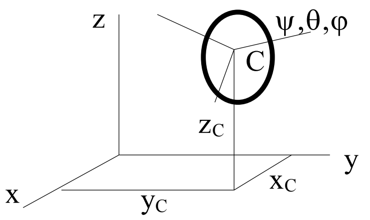
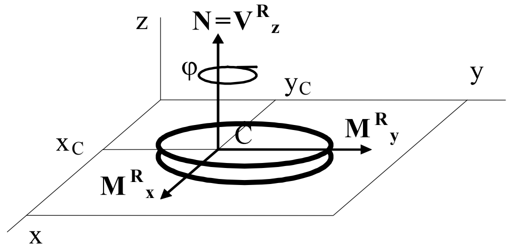
Лекция 4

Общие уравнения движения твердого тела. Динамическая эквивалентность систем сил.

Рассмотрим движение твердого тела под действием заданных сил. Если тело свободно (Рис.1), то **шесть** координат ($x_A y_A z_A$ и углы Эйлера ψ,θ,φ) определяют его положение.





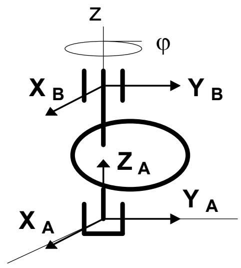


Рис.1 Рис.2 Рис.3

Если тело несвободно, то характер его движения определяют связи, реакции которых не известны. Предположим, что трение отсутствует, и рассмотрим частные случаи движения.

В плоском движении (Рис.2) **три** координаты ($x_A y_A \varphi$) определят положение тела и возникают **три** реакции плоскости, по которой движется тело: нормальная реакция N и моменты относительно осей x и y. Всего оказывается **шесть** неизвестных.

Вращающееся тело (Рис.3) имеет одну координату (угол поворота φ) и пять неизвестных реакций $X_A Y_A Z_A X_B Y_B$. Здесь опять **шесть** неизвестных.

Таким образом, при любом движении твердого тела необходимо иметь **шесть** скалярных уравнений для определения закона движения и реакций связей. Назовем их ***общими уравнениями движения тела***.

Общие уравнения движения тела определяются двумя теоремами: о движении центра масс и об изменении относительного кинетического момента.

$$M\mathbf{w}_C=\mathbf{V}^e \qquad (1)$$

$$d\mathbf{K}_C/dt=\mathbf{M}^e_C \qquad (2)$$

Матрично

$$M w_C = V^e \qquad (3)$$

$$dK_C/dt = M^e_C \qquad K_C(t)=J_C(t)\omega(t) \qquad (4)$$

Однако использовать теорему (4) в такой записи трудно т.к. матрица инерции является здесь неизвестной функцией времени $J_C(t)$, и ее невозможно продифференцировать.

Поэтому необходимо перейти к системе координат со штрихом, связанных с телом. В ней матрица инерции уже не будет зависеть от времени.

$$K'_C(t)=\begin{pmatrix} Kx' \\ Ky' \\ Kz' \end{pmatrix}=J'_C\omega'(t) \qquad J'_C=\mathrm{Const}$$

Теперь вектор

$$\mathbf{K}_C = Kx'\,\mathbf{i}' + Ky'\mathbf{j}' + Kz'\mathbf{k}'$$

задан в подвижной системе координат, и производную от него следует брать по теореме о связи производных (вспоминаем сложное движение точки).

$$d\mathbf{K}_C/dt = d_r\mathbf{K}_C/dt + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_C$$

Матрично

$$dK_C/dt=d(J'_C\omega')/dt+\Omega'(J'_C\omega')=J'_C\,d\omega'/dt+\Omega' J'_C\omega'=J'_C\varepsilon+\Omega' J'_C\omega'$$

Опуская штрихи, но нет забывая, что запись ведется в координатах, связанных с телом, придем к искомым ***общим уравнениям движения*** тела в системе отсчета, связанной с телом

$$M w_C = V^a + V^R \qquad (13)$$
$$\Omega\, J_C\, \omega + J_C \varepsilon = M^a{}_C + M^R{}_C$$

Здесь внешние силы разделены на активные и реакции связей (индекс R)
В случаях сферического и вращательного движений во второй формуле C можно заменить на неподвижную точку O.

В развернутом виде общие уравнения представляют собой систему шести скалярных уравнений. Эти уравнения определяют как ускорения точек тела, так и реакции связей.

Назовем ***эквивалентными*** системы сил, вызывающие одинаковое движение тела при данных начальных условиях и одинаковые реакции связей. В Статике движения не было, и мы называли ***статически эквивалентными*** системы сил, вызывающие одинаковые реакции. Было показано, что условием статической эквивалентности двух систем сил является равенство их главных векторов и главных моментов.

Уравнения (23) позволяют единственным образом определить закон движения и реакции связей по заданным активным силам. Значит ***условием динамической эквивалентности*** двух систем сил, приложенных к твердому телу, является хорошо известное условие равенства их главных векторов и главных моментов, ибо при выполнении этих условий уравнения движения не изменятся при замене одной системы сил другой.

Уравнения поступательного движения тела

Поскольку в поступательном движении тело не вращается, то

$$\omega = 0 \ \ (\Omega = 0) \qquad \varepsilon = 0 \qquad w_C = \begin{pmatrix} x_c ** \\ y_c ** \\ z_c ** \end{pmatrix} \qquad (24)$$

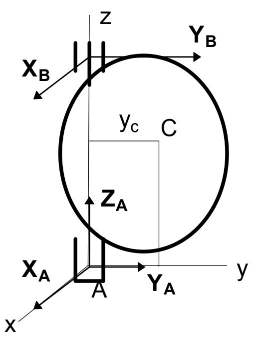
и главный вектор реакций связей равен нулю, то уравнения ( ) приобретают вид

$$M x_C** = \Sigma F_{kx} \qquad 0 = \Sigma m_x (F_k) + M_x^R$$
$$M y_C** = \Sigma F_{ky} \qquad 0 = \Sigma m_y (F_k) + M_y^R \qquad (25)$$
$$M z_C** = \Sigma F_{kz} \qquad 0 = \Sigma m_z (F_k) + M_z^R$$

Три дифференциальные уравнения определяют закон движения тела x(t), y(t), z(t), а остальные уравнения служат для нахождения главных моментов реакций связей относительно трех осей.

Уравнения вращательного движения тела.

Пусть тело вращается вокруг оси z. Тогда



$$\omega_x = \omega_y = 0,\ \omega_z = \varphi^*,$$
$$\varepsilon_z = \omega_z^* = \varphi^{**},$$
$$w_C = (E + \Omega^2) R$$

Здесь E и Ω - присоединенные матрицы углового ускорения и скорости. Теперь из (13) вытекают полные уравнения движения тела

$$M\begin{pmatrix} -\omega_z^2 & -\varepsilon_z & 0 \\ \varepsilon_z & -\omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma F_{kx} + Rx \\ \Sigma F_{ky} + Ry \\ \Sigma F_{kz} + Rz \end{pmatrix}$$

Рис.1

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -J_{xz}\omega_z \\ -J_{yz}\omega_z \\ J_z\omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -J_{xz}\varepsilon_z \\ -J_{yz}\varepsilon_z \\ J_z\varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x^a + M_x^R \\ M_y^a + M_y^R \\ M_z^a + M_z^R \end{pmatrix} \qquad (26)$$

В развернутом виде

$$\begin{gathered} -Mx_C\omega^2 \;\; -My_C\varepsilon_z = \Sigma F_{kx} + X_A + X_B \\ Mx_C\varepsilon_z \;\; -My_C\omega^2 = \Sigma F_{ky} + Y_A + Y_B \\ 0 = \Sigma F_{kz} + Z_A \qquad (27) \\ J_{yz}\omega_z^2 - J_{xz}\varepsilon_z = \Sigma m_x(F_k) - Y_B h \\ -J_{xz}\omega^2 - J_{yz}\varepsilon_z = \Sigma m_y(F_k) + X_B h \\ J_z\varepsilon_z = \Sigma m_z(F_k) \end{gathered}$$

В этих шести уравнениях шесть неизвестных: закон вращения φ (t) и пять составляющих реакций подшипников. Собственно ***дифференциальным уравнением вращения*** является последнее уравнение

$$J_z\varphi^{**} = \Sigma m_z(F_k) \qquad (28)$$

Оно определяет закон вращения φ (t). Остальные уравнения служат для определения реакций подшипников по найденному закону вращения.

Следует помнить, что силы, приложенные к телу, могут зависеть от угла поворота и угловой скорости тела. С помощью уравнения (18) можно решать прямые и обратные задачи динамики вращения тела. Из него вытекает также ***силовое условие равнопеременного вращения***. Очевидно, что для сохранения углового ускорения постоянным необходимо, чтобы главный момент приложенных сил был постоянным.

$$M_z = Const \qquad (29)$$

Чтобы тело вращалось равномерно, этот момент должен быть равен нулю

$$M_z = 0 \qquad (30)$$

Уравновешенность вращающегося тела

После того как закон движения найден из дифференциального уравнения вращения, из остальных уравнений можно найти реакции опор $X_A Y_A X_B Y_B$ и Z_A. Из уравнений (18) видно, что а Z_A не зависит от вращения тела, а остальные реакции могут зависеть.

Опыт показывает, что при больших угловых скоростях вращения эти реакции могут достигать значений, опасных разрушением подшипников. Поэтому актуальным является знание условий, позволяющих избежать такой опасности.

Тело называется ***динамически уравновешенным*** относительно оси вращения, если реакции подшипников не зависят от скорости вращения тела. Чтобы найти условия уравновешенности, исследуем уравнения для реакций, которые могут зависеть от вращения

$$\begin{gathered} -My_C\varepsilon_z = \Sigma F_{kx} + X_A + X_B \\ -My_C\omega^2 = \Sigma F_{ky} + Y_A + Y_B \qquad (22) \\ J_{yz}\omega_z^2 - J_{xz}\varepsilon_z = \Sigma m_x(F_k) - Y_B h \\ -J_{xz}\omega^2 - J_{yz}\varepsilon_z = \Sigma m_y(F_k) + X_B h \end{gathered}$$

Очевидно, что если бы левые части этих уравнений можно было обратить в ноль,

$$-My_C\varepsilon_z=0$$
$$-My_C\omega^2=0 \qquad (23)$$
$$J_{yz}\omega_z^2-J_{xz}\varepsilon_z=0$$
$$J_{yz}\varepsilon_z+J_{xz}\omega^2=0$$

то реакции не зависели бы от вращения, а определялись бы только активными силами.

Первые два условия (23) будут выполнены, если центр тяжести лежит на оси вращения. В этом случае ось называется ***центральной***

$$y_C=0 \qquad (24)$$

Это условие обеспечивает уравновешенность, которая называется ***статической***, поскольку легко проверяется “статическим” опытом. Достаточно расположить ось вращения тела горизонтально. Если тело будет сохранять покой при любом угле поворота, то ось центральна. Например, взяв велосипедное колесо за ось, легко определить, что его ось не является центральной, т.к. нипель заставит колесо повернуться в свое нижнее положение.

Вторые два условия (23) дают однородную систему линейных уравнений относительно моментов инерции. Ее определитель отличен от нуля

$$\begin{vmatrix}\omega^2 & -\varepsilon_{\ddot{y}}\\ \varepsilon_{\ddot{y}} & \omega^2\end{vmatrix}=\omega^4+\varepsilon^2>0 \qquad (25)$$

Это значит, что система имеет только нулевое решение

$$J_{zx}=J_{yz}=0 \qquad (26)$$

Таким образом, чтобы тело было ***динамически уравновешенным*** необходимо и достаточно чтобы ось вращения была ***центральной и главной*** осью инерции.

$$y_C=0 \qquad (27)$$
$$J_{zx}=J_{yz}=0$$

Условия уравновешенности вращающегося тела показывают, насколько важной является задача определения главных осей инерции в теле. Этой задаче посвящена следующая глава.

Уравнения плоского движения тела

Чтобы воспользоваться общими уравнениями динамики тела, придется рассмотреть движение плоской фигуры, полученной сечением тела через центр масс С параллельно плоскости движения тела.

Совместим плоскость осей xy с плоской фигурой тела а их начало с центром масс С. Тогда $\mathbf{W_C}$ и главный момент реакций гладкой плоскости будут лежать в плоскости xy, а $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и главный вектор реакций плоскости будут все время направлены вдоль оси z. Уравнения движения

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix}x_C{**}\\ y_C{**}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma F_{kx}\\ \Sigma F_{ky}\\ \Sigma F_{kz}+Rz\end{pmatrix} \qquad (35)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -\omega_z & 0\\ \omega_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-J_{xz}\omega_z\\ -J_{yz}\omega_z\\ J_z\omega_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-J_{xz}\omega*_z\\ -J_{yz}\omega*_z\\ J_z\omega*_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_x^a+M_x^R\\ M_y^a+M_y^R\\ M_z^a\end{pmatrix}$$

в проекциях на оси приобретут вид

$$Mx_C{**}=\Sigma F_{kx} \qquad J_{yz}\omega_z^2-J_{xz}\varepsilon_z=\Sigma m_x(F_k)+M_x^R$$

$$My_C^{**}=\Sigma F_{ky} \qquad -J_{xz}\omega^2-J_{yz}\varepsilon_z=\Sigma m_y(F_k)+M_y^R \qquad (36)$$
$$0=\Sigma F_{kz}+R_z \qquad J_z\varphi^{**}=\Sigma m_z(F_k)$$

Первое, второе и последнее уравнения

$$Mx_C^{**}=\Sigma F_{kx}$$
$$My_C^{**}=\Sigma F_{ky} \qquad (37)$$
$$J_z\varphi^{**}=\Sigma m_z(F_k)+M_z^R$$

являются ***дифференциальными уравнениями плоского движения***. Они определяют закон плоского движения x(t), y(t), φ(t). Остальные три уравнения- проекцию главного вектора реакций Z_A^R и главные моменты реакций M_x^R и M_x^R. Заметим, что реакции направляющих не будут зависеть от движения, если ось z_C является главной в центре С.

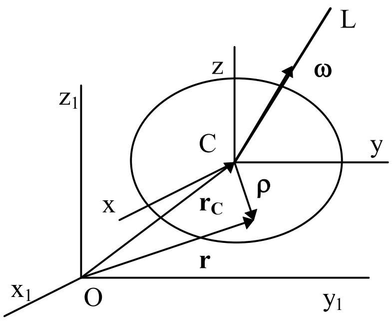
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия точки и системы. Теорема Кенига.

По Бутенину

Кинетическая энергия твердого тела.

Рассмотрим движение ***свободного твердого тела*** относительно инерциальной системы координат $x_1\ y_1\ z_1$.



Для сплошного твердого тела в формуле Кенига

$$T=0.5Mv_C^2+0.5\Sigma m_j v_{jr}^{\ 2} \qquad (1)$$

сумма становится интегральной, масса элементарной dm,

$$T^r=0.5\$v_r^2dm \qquad (2)$$

а относительная скорость точки v_r в сферическом движении вокруг центра масс С должна быть найдена по формуле Эйлера.

$$\mathbf{v_r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}=-\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (3)$$

В матричной записи

$$v_r=-R\omega \qquad (4)$$

Здесь R- присоединенная кососимметричная ($R^T=-R$) матрица радиуса вектора $\mathbf{r_C}$

Вычислим квадрат относительной скорости точки как произведения строки на столбец ее координат

$$v_r^{\mathbf{2}}=v_r^T v_r=(R\omega)^T\,(R\omega)=\omega^T R^T\,(R\omega)=\omega^T(-R)R\omega=\omega^T(-R^2)\,\omega \qquad (6)$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$T^r=0.5\omega^T[\ \$(-R^2)dm]\,\omega \qquad (7)$$

В квадратных скобках узнаем выражение матрицы тензора инерции относительно центра масс С.

$$J_C=-\$\ R^2dm \qquad (8)$$

Теперь формула кинетической энергии тела в произвольном движении приобретает вид

$$T=0.5(Mv_C^2+\omega^T J_C\omega) \qquad (9)$$

Поступательное движение

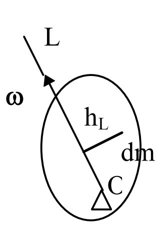
В этом случае тело не вращается (ω=0) скорости всех точек одинаковы (v) и значит

$$T=0.5Mv^2 \qquad (10)$$

Сферическое движение вокруг центра О

Повторив выкладки для T^r , но для центра О, получим аналогичную формулу

1) $$T=0.5\omega^T J_O\omega \qquad (17)$$



С другой стороны, мы знаем, что скорость точки тела в сферическом движении может быть найдена через расстояние до мгновенной оси L

$$v=\omega h_L \qquad (18)$$

Тогда

$$T=0.5\,\omega^2 \int h_L^2 dm \qquad (19)$$

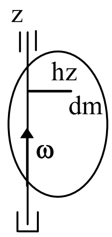
Интеграл дает момент инерции относительно мгновенной оси

$$J_L=\int h_L^2 dm \qquad (20)$$

и мы приходим ко второй формуле

$$2)\ T= 0.5\, J_l \omega^2 \qquad (21)$$

Вращательное движение



Оно является частным случаем сферического движения, когда мгновенная ось совпадает с осью вращения z: $J_L=J_z$

$$T=0.5J_z\omega^2 \qquad (23)$$

Плоское движение в плоскости xy

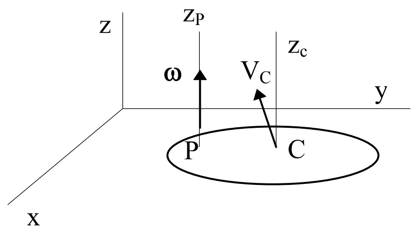
Вектор угловой скорости направлен вдоль оси z:

$$\omega^T=(0\ 0\ \omega_z) \qquad (11)$$

Первую формулу получим из теоремы Кенига

$$1)\qquad T = 0.5(Mv_C^2+J_{zC}\,\omega^2) \qquad (12)$$

Еще одну формулу получим, введя в рассмотрение центр скоростей P. Тогда скорость любой точки выражается через ее расстояние до P.



$$v=\omega\rho \quad (13)$$

Значит существует вторая формула, через мгновенный центр:

$$2)\qquad T=0.5\, J_{zP}\omega^2 \qquad (14)$$