Лекция 5

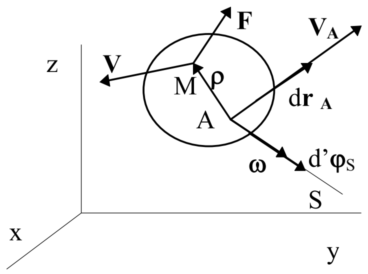
Теорема об изм. кин. эн. точки. Элементарная раб., мощность

Точка- Ньютон- dr- d’A- Размерность (нм=дж, кгм-техн сист.) Вычисление- Знак- Касательная

Мощность- Колесо (Сила трения- Момент плюс сил тр)- Трогание с места автомобиля

Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу.

Свободное движение. Пусть движение тела характеризуется скоростью полюса A $\mathbf{v_A}$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем мощность силы $\mathbf{F}$, приложенной в некоторой точке M тела.



$$N(\mathbf{F})=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v_A}+\boldsymbol{\omega}X\boldsymbol{\rho})=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r_A}/dt+\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\rho}X\mathbf{F})$$

Здесь учтена теорема о распределении скоростей

$$\mathbf{v}=\mathbf{v_A}+\boldsymbol{\omega}X\boldsymbol{\rho}$$

и произведена круговая перестановка в смешанном произведении

$$\mathbf{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}X\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\rho}X\mathbf{F})$$

В скобках узнаем выражение момента силы $\mathbf{F}$ относительно полюса A. Поскольку $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль мгновенной оси S, то

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\rho}X\mathbf{F})=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m_A}(\mathbf{F})=\omega_S m_S(F)$$

где ω_S– проекция угловой скорости на S, а $m_S(F)$– момент силы относительно этой оси. Умножая на dt, приходим к выражению элементарной работы силы:

$$d'A(\mathbf{F})=N(\mathbf{F})dt=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r_A}+m_S(F)\ d'\varphi_S \qquad (*)$$

Здесь произведение

$$d'\varphi_S=\omega_S dt$$

следует понимать как угол бесконечно малого поворота тела вокруг оси S. Штрих подчеркивает, что в свободном движении этот угол не является дифференциалом функции φ. Вспомним, что он выражается через дифференциалы трех углов Эйлера. Только во вращательном и плоском движениях этот угол есть дифференциал функции $\varphi(t)$– закона вращения тела.

Заметим, что знак второго слагаемого проще определить, сравнивая направления момента и поворота. Поэтому практически часто знак определяют отдельно и работу вычисляют по формуле

$$d'A(\mathbf{F})=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r_A}\underline{+}|m_S(F)|\ |d'\varphi_S| \qquad (*)$$

Заметим, что в отличие от формулы Кенига для кинетической энергии, здесь полюс A– произвольная точка тела, не обязательно центр масс.

Если к телу приложена система сил $\{\mathbf{F}\}=\{\mathbf{F_1}\mathbf{F_2}\ldots\mathbf{F_k}\ldots\mathbf{F_n}\}$, то после суммирования по к, получим

$$d'A\{\mathbf{F}\}=\mathbf{V_e}\cdot d\mathbf{r_A}+M_S\ d'\varphi_S$$

Здесь $\mathbf{V_e}$– главный вектор, а M_S– главный момент относительно оси S системы внешних сил.

Пользуясь общей формулой (*), получим выражения работы для простейших движений тела.

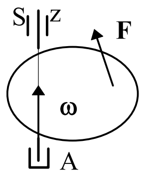
Поступательное движение

Тело в поступательном движении не вращается ($d'\varphi_S=0$) и все его точки имеют одинаковое элементарное перемещение d$\mathbf{r}$

$$d'A\{\mathbf{F}\}=\mathbf{V_e}\cdot d\mathbf{r}$$

Вращательное движение

Здесь есть смысл выбрать полюс A на оси вращения z, с которой совпадает мгновенной ось S.



Тогда $\mathbf{dr_A}$=0 и формула (*) показывает что элементарную работу совершают моменты сил относительно оси вращения:

$$d'A\{\mathbf{F}\}= M_{я}\, d\varphi$$

Здесь учтено, что элементарный поворот $d\varphi$ является дифференциалом закона вращения $\varphi(t)$, поэтому штрих опущен.

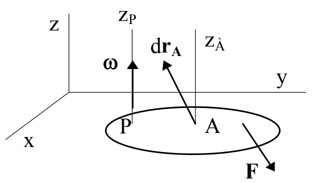
Для одной силы **F** имеем

$$d'A\{\mathbf{F}\}= \pm |m_{я}||d\varphi|$$

Знак плюс, если момент силы направлен туда же куда и поворот.

Плоское движение

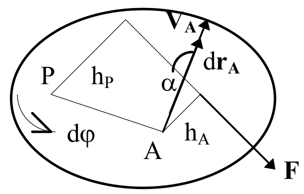
Вспомним, что здесь тоже направление мгновенной оси не изменяется , она перпендикулярна плоскости движения. Поэтому элементарный угол поворота тоже является дифференциалом закона вращения. Формула (*) приобретает вид



$$d'A\{\mathbf{F}\}= \mathbf{V_e}\cdot d\mathbf{r_A}+ M_{zA}\, d\varphi$$

Например для одной силы **F** на Рис.2 получим

$$d'A(\mathbf{F})= -F\cdot dr_A \cos\alpha - Fh_A\, d\varphi$$



Как известно, если ω не равно нулю, то существует мгновенный центр скоростей P, скорость которого (а значит и элементарное перемещение) равна нулю в данный момент. Выбрав P за полюс, из (*) найдем, что в плоском движении работу совершают моменты сил относительно P.

$$d'A\{\mathbf{F}\}= M_{zP}\, d\varphi$$

Для конкретной силы **F** на Рис.2 имеем

$$d'A(\mathbf{F})= -Fh_P\, d\varphi$$