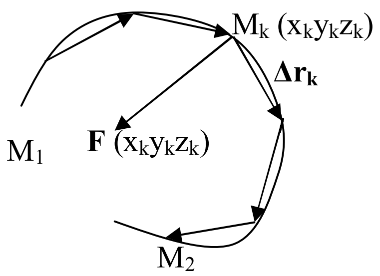
Лекция 6

Конечная работа силы.

Рассмотрим движение точки m под действием силы **F** по траектории из положения M_1 в положение M_2.



Разобъем кривую M_1 M_2 на n частей.
Проведем векторы перемещений из узла в узел и обозначим работу на этих перемещениях через

$$\Delta A_к = \mathbf{F}\,(x_k y_k z_k) \cdot \Delta\mathbf{r_k}$$

Конечной работой силы F на перемещение из положения M_1 в положение M_2 называется скалярная величина равная пределу

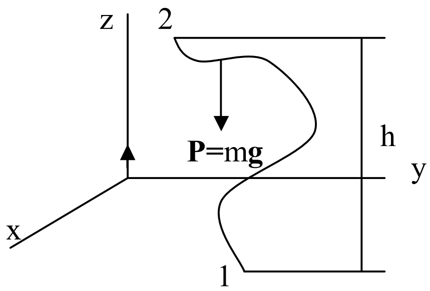
$$A_{12} = \lim_{(n\to\infty,\ \Delta\mathbf{rk}\to 0)} \sum \Delta A_к$$

Этот предел является криволинейным интегралом 2го рода

$$A_{12} = {}_{1\text{-}2}\int (\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{r}^*,t) \cdot d\mathbf{r})$$

Что нужно знать, чтобы вычислить этот интеграл?

1. Если сила зависит от всех параметров, то нужно знать закон движения точки $\mathbf{r}(t)$. Тогда этот интеграл становится определенным интегралом по времени
$$A_{12} = {}_{t1}\int^{t2} (\mathbf{F}(t) \cdot dt)$$
2. В случае *силового поля* – пр-ва, в каждой точке которая задана функция силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ нужно знать траекторию движения точки:
$$A_{12} = {}_{\mathbf{r}1}\int^{\mathbf{r}2} (\mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r})$$
3. Существуют силовые поля, называемые *потенциальными*, где для вычисления конечной работы нужно знать только начальное и конечное положение точки. Подробно такие поля будут рассмотрены ниже. Здесь приведем примеры полей силы тяжести и упругой силы.



Работа силы тяжести:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} \qquad P_z = -mg$$

$$d'A = P_z dz = -mgdz \qquad A_{12} = -mg\ {}_{z1}\int^{z2} dz = mg(z_1 - z_2)$$

Обычно эту формулу записывают в виде

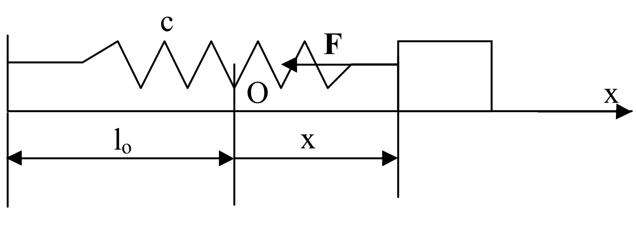
$$A_{12}(mg) = \pm mgh$$

Работа силы тяжести положительна, если $(z_1 - z_2) > 0$, т.е. точка опускается.

Работа силы упругости линейной пружины:

Деформацией Δ такой пружины называется изменение ее длины l_o. *Жесткостью* пружины «c» называется сила, необходимая для ее удлинения на единицу длины.

Деформация Δ вызывет упругую силу **F**. Пружина линейно упруга, если упругая сила линейно зависит от деформации $F = c\,\Delta$. Сила направлена к началу O координаты x, выбранному в положении равновесия груза. Поэтому сила называется *восстанавливающей* (положение равновесия), $|x| = \Delta$ и



$$F_x = -c\,x$$

Элементарная работа силы $d'A = -cx\,dx$. При перемещении конца пружины из положения с координатой x_1 в положение x_2, упругая сила совершает конечную работу

$$A_{12} = -c\ {}_{x1}\int^{x2} x dx = 0.5c(x_1^2 - x_2^2)$$

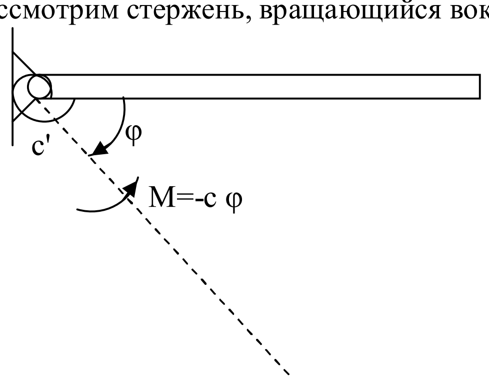
Квадраты координат заменим квадратами деформаций

$$A_{12} = 0.5c(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.

Работа момента упругости ***спиральной пружины***

Рассмотрим стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси под действием спиральной



пружины. Жесткость c’ такой пружины равна моменту, закручивающему пружину на один радиан. Ее деформация измеряется углом закручивания Δ’=φ в радианах. Деформация вызывает момент упругости M=-c’φ.

Элементарная работа силы d’A=-c’ φ d φ. При повороте стержня из положения с координатой φ_1 в положение φ_2, упругий моментсовершает конечную работу

$$A_{12}= -c' \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \, d\varphi = 0.5c'(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

Квадраты координат заменим квадратами деформаций

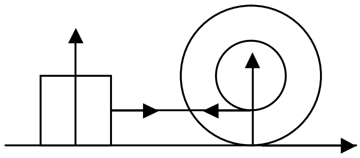
$$A_{12}=0.5c(\Delta'^2_1 - \Delta'^2_2)$$

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.

НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЛАГРАНЖА.

Механика Ньютона дает полную систему уравнений для решение основной задачи механики: определения закона движения системы и реакций связей по нагрузке. Как мы видели на примере твердого тела, часть этих уравнений, равная числу степеней свободы тела, является дифференциальными уравнениями движения, остальные определяют реакции связей.

Механика Лагранжа позволяет находить непосредственно дифференциальные уравнения движения системы.



Рассмотрим систему двух тел. Нерастяжима нить и отсутствие проскальзывания катка оставляют системе одну степень свободы. Три внешние реакции плоскости и одна внутренняя реакция нити войдут в 5 уравнений Ньютона: 2 для тела и 3 для катка. Из них только одно будет дифференциальным уравнением движения системы, которое чаще всего и является целью.

Метод Лагранжа позволяет сразу составить одно дифференциальное уравнение. При этом реакции связей будут изначально исключены из рассмотрения. Метод Лагранжа опирается на новое понятие *возможного перемещения*.

Принцип возможных перемещений.

Классификация связей.

Рассмотрим движение системы n точек в инерциальной системе отсчета с координатами x, y, z. состояние системы определяется значениями 3n координат $x_1 \dots z_n$ и 3n скоростей $x_1^* \dots z_n^*$

Связью называется ограничение, наложенное на координаты и скорости точек. В общем случае уравнения s связей имеют вид:

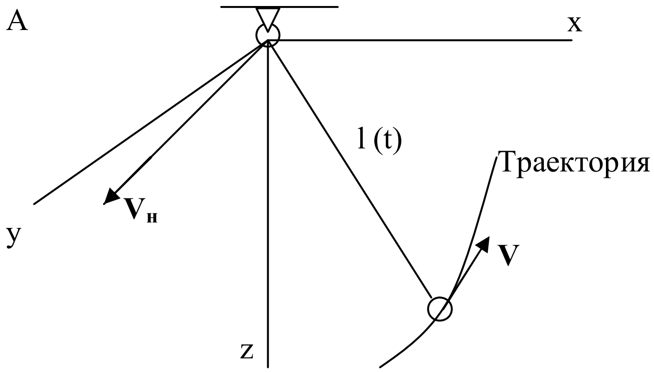
$$\Phi_i(x_1 \dots z_n;\ x_1^* \dots z_n^*; t) \geq 0 \qquad (i = 1,2,\dots,s)$$

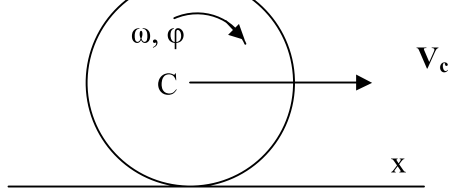
В качестве координат могут выступать и другие параметры, в том числе, угловые.

Связи подразделяются на:

1. ***Геометрические и кинематические***

В уравнения геометрических связей не входят скорости. Рассмотрим 2 примера: маятник A переменной длины и колесо B, которое катится без проскальзывания.





Расстояние от маятника A до начала координат не может быть больше переменной длины нити, поэтому уравнение связи имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2 \le l^2(t)$$

Связь геометрическая, поскольку в ее уравнении нет производных координат.
При качении колеса B без скольжения скорость центра и угловая скорость связаны соотношением

$$x^{*}=r\,\varphi^{*}$$

Значить эта связь кинематическая

2. ***Стационарные и нестационарные***
   В уравнениях стационарных связей время t не входит явно
   Примеры: A) – нестационарная, т.к. время входит в уравнение
   B) – стационарные
3. ***Удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние)***
   Уравнения удерживающих связей пишутся через равенство, неудерживающие- через неравенство.
   Примеры: A) – неудерживающая связь. Название односторонняя следует из того, что нить не растягивается, но может сминаться. Таким образом нить удерживает маятник в одну сторону, от центра.
   B) – удерживающие
4. ***Голономные и неголономные***:
   Голономные связи это все геометрические связи, а также те, из кинематических, которые интегрированием могут быть приведены к виду геометрических.
   Примеры: и A и B – голономные (геометрические). Уравнение связи колеса может быть проинтегрировано и приведено к виду геометрической связи

$$x - r\varphi = 0$$

Изучение систем с неголономными связями является сложным разделом Аналитической механики и выходит за рамки курса, следовательно, мы будем заниматься системами с голономными связями.