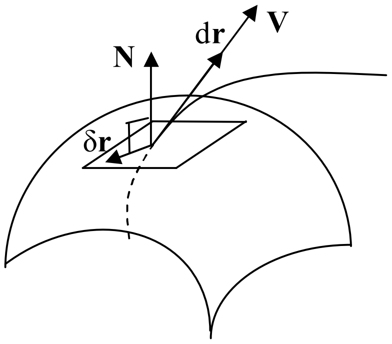
Лекция 7

Действительные, возможные перемещения.
Элементарная и возможная работа.

Рассмотрим движение точки, на которую наложена нестационарная геометрическая связь с уравнением



$$\Phi(x,y,z;t)=0$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение деформирующейся поверхности, по которой движется точка. На рисунке изображена фотография поверхности в момент времени t. Поскольку поверхность деформируется, то траектория точки не лежит на фотографии поверхности, а пересекает ее. За время dt точка M совершает элементарное перемещение d**r** =**V**dt по касательной к траектории. Его называют действительным, поскольку оно действительно происходит за время dt под действием сил и связи. Пусть поверхность связи гладкая, следовательно, ее реакция **N** – нормальна к поверхности.

Механика Лагранжа построена на понятии возможного перемещения. ***Возможным перемещением*** точки называется воображаемое бесконечно малое перемещение δ**r,** допускаемое связью, зафиксированной в данный момент времени в изображенном положении. Следовательно, возможных перемещений бесчисленное множество, все они лежат в касательной плоскости в точке M и перпендикулярны реакции **N**.

Замечание: Идея введения δ**r** вместо d**r** состоит в том, что, как видно из рисунка, реакция **N** не совершает работы на δ**r .** Это позволит в дальнейшем исключить неизвестные реакции связи, например N из рассмотрения.

Отличия δ**r** от d**r**:

1) d**r** в действительности происходит за время dt под действием сил и связей.
   δ**r** является воображаемым, определяется только связями, зафиксированными в данный момент времени.
2) d**r** – единственно, δ**r** – много.

Проекции d**r** (dx,dy,dz) на декартовы оси подчиняются соотношению, которое найдем из дифференциала уравнения связи

$$d\Phi(x,y,z;t)=(\partial\Phi/\partial x)dx + (\partial\Phi/\partial y)dy + (\partial\Phi/\partial z)dz + (\partial\Phi/\partial t)dt = 0$$

Проекции возможного перемещения δ**r** (δx, δy, δz) подчиняются соотношению, которое найдем из вариации уравнения связи (операция, аналогичная дифференцированию при фиксированном времени t):

$$\delta\Phi(x,y,z;t)=(\partial\Phi/\partial x)\,\delta x + (\partial\Phi/\partial y)\,\delta y + (\partial\Phi/\partial z)\,\delta z = 0$$

Видно, что эти соотношения отличаются последним слагаемым, значит в случае нестационарных связей, в уравнение которых входит время, эти перемещения не могут совпасть, что видно из рисунка. Для стационарных связей разница в соотношениях исчезает. Значит, при стационарных связях d**r** совпадает с одним из δ**r**.

Возможным перемещением системы называется множество возможных перемещений всех точек системы из данного положения $\{\,\delta\mathbf{r}_1\,\delta\mathbf{r}_2\ldots\delta\mathbf{r}_k\ldots\delta\mathbf{r}_n\,\}$.

Как известно, *элементарной работой* силы **F** называется алгебраическая величина

$$d'A = \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

По аналогии ***возможной работой*** силы **F** называется ее работа на возможном перемещении

$$\delta A = \mathbf{F}\bullet\delta\mathbf{r}$$

Видно, что для нормальной реакции **N** гладкой связи

$$d'A(\mathbf{N}) \neq 0 \qquad \delta A(N) = 0$$

Общее уравнение динамики (динамический принцип возможных перемещений). Статический принцип возможных перемещений.

Рассмотрим систему m_1 m_2 …m_k…m_n , связи которой голономны. Такая система называется ***голономной***. Обозначим через $\mathbf{F_k}$ и $\mathbf{R_k}$ равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к точке m_k. Связи называются ***идеальными***, если сумма возможных работа их реакций на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum \mathbf{R_k} \bullet \delta \mathbf{r_k} = 0$$

Примеры идеальных связей: шарнир без трения, нерастяжимая нить, гладкая поверхность.

Запишем основное уравнение динамики точки m_k

$$m_k \mathbf{W}_k = \mathbf{F_k} + \mathbf{R_k}$$

в виде

$$\mathbf{F_k} + \mathbf{R_k} + \mathbf{I_k} = \mathbf{0}$$

Здесь через $\mathbf{I_k} = - m_k \mathbf{W_k}$ обозначена *Даламберова сила инерции .*

Таким образом, при движении точки нагрузка, реакции и сила инерции находятся в «равновесии». Запись уравнений динамики в виде уравнений статики называется *методом кинетостатики.*

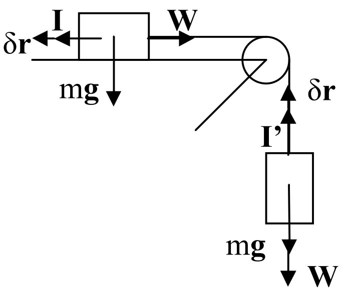
Суммирование по k с учетом идеальности связей приводит к ***общему уравнению динамики*** (динамическому уравнению возможных перемещений)

$$\sum(\mathbf{F_k} + \mathbf{I_k}) \bullet \delta \mathbf{r_k} = \mathbf{0} \ ,$$

который можно прочитать так: *Движение системы с идеальными связями таково, что в любой момент сумма возможных работ активных сил и Даламберовых сил инерции равна нулю*.

$$\delta A^a + \delta A^I = 0$$

По сравнению с методом Ньютона, выигрыш здесь состоит в исключении из рассмотрения реакций идеальных связей.



Рассмотрим пример. Два тела одинаковой массы m связанны нерастяжимой нитью. Одно из них скользит по гладкой поверхности. Таким образом, связи идеальны и принцип применим. Требуется найти ускорение W тел.

Решая задачу методом Ньютона, мы должны разрезать нить, ввести в рассмотрение ее натяжение T, составить два уравнения Ньютона и из них найти ускорение W и натяжение T.

Общее уравнение динамики позволяет найти ускорение W из одного уравнения. Кроме физических сил тяжести m**g**, изобразим Даламберовы силы инерции $I = I' = mW$. Действительное перемещение правого тела направлено вниз (из состояния покоя). Стационарные связи позволяют переместить его и вниз и вверх.

Дадим возможное перемещение $\delta \mathbf{r}$ вверх. Общее уравнение дает

$$(2\,mW - mg)\,\delta r = 0$$

откуда $W = g/2$

Статический принцип возможных перемещений.

Рассмотрим систему с идеальными стационарными связями, находящуюся в данный момент в покое. **Принцип**: *чтобы система оставалась в покое необходимо и достаточно равенство нулю возможной работы активных сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия.*

$$\delta A^a = \sum \mathbf{F_k} \bullet \delta \mathbf{r_k} = 0$$

Замечание - в равновесии находятся силы, когда система находится в покое. Иногда, все - же говорят о равновесии системы, имея в виду ее покой.

Необходимость принципа вытекает из общего уравнения $\delta A^a + \delta A^I = 0$. Действительно, если система остается в покое, то все ускорения и силы инерции равны нулю и уравнение переходит в принцип.

Достаточность: Пусть $\delta A^a = 0$. Покажем, что система остается в покое. Предположим обратное – система начала двигаться. Тогда система приобретет кинетическую энергию, которая, согласно теореме об изменении кинетической энергии равна работе активных сил на действительном перемещении.

$$dT = d'A^a = \sum \mathbf{F_k} \bullet d\mathbf{r_k} > 0$$

Поскольку связи стационарны, действительное перемещение совпадает с одним из возможных и

$$d'A^a = \delta A^a > 0$$

что противоречит исходному предположению, что принцип соблюдается. Значит, система останется в покое, что и требовалось доказать.

Уравнение Лагранжа второго рода.

Обобщенные координаты.
Число степеней свободы.

Рассмотрим систему n точек с идеальными голономными связями. Ее положение в инерциальной системе отсчета определяется 3n координатами ($x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots ; x_n, y_n, z_n$)
Эти параметры подчиняются s уравнениям голономных связей:

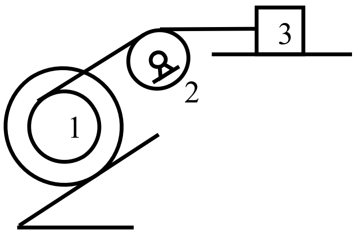
$$\Phi_i(x_1 \dots z_n;t) \geq 0 \qquad (i = 1,2,\dots,s)$$

Таким образом, из 3n координат только l = 3n-s является независимыми. Остальные s выражаются через них с помощью уравнений связи.

Для голономных систем, число l называется <u>**числом степеней свободы**</u>. Число $\boldsymbol{l}$ может быть определено как число координат, которое надо зафиксировать, чтобы система остановилась.

Декартовы координаты не всегда являются удобными параметрами. Кроме них используют угловые координаты и их комбинации с линейными координатами.

<u>***Обобщенной координатой***</u> $\boldsymbol{q_i}$ называется параметр любой размерности, описывающий положение системы. Так, обобщенными координатами системы трех тел можно назвать: координаты центра и угол поворота катка 1, угол поворота блока 2, координаты тела 3. Все они связаны между собой ввиду отсутствия проскальзывания катка, нерастяжимости нити, наличия направляющих. Только одна из них является независимой, поскольку при фиксации любого из перечисленных параметров система потеряет подвижность. Значит, она имеет одну степень свободы.



Условимся в дальнейшем под обобщенными координатами понимать только независимые координаты q_i (i=1,2…l)

Радиус-вектор k-ой точки системы является функцией независимых обобщенных координат $\mathbf{r_k}(q_1\, q_2 \dots q_l)$. При стационарных связях время t явно не входит в число параметров. Возможное перемещение точки найдем как вариацию функции $\mathbf{r_k}(q_1\, q_2 \dots q_l)$.

$$\delta\, \mathbf{r_k} = \sum(\partial \mathbf{r_k}/\partial q_i)\, \delta q_i \qquad (*)$$

Скалярное бесконечно малое приращение обобщенной координаты δq_i называется <u>*обобщенным возможным перемещением*</u> системы. Для голономных систем все δq_i независимы, как и сами q_i

Обобщенные силы, способы их вычисления.

Рассмотрим голономную систему $\{m_1\, m_2 \dots m_k \dots m_n\}$ и обозначим равнодействующие сил, приложенных к каждой точке соответственно $\{\mathbf{F}_1\, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_k \dots \mathbf{F}_n\}$. Дадим системе возможное перемещение $\{\delta\mathbf{r}_1\, \delta\mathbf{r}_2 \dots \delta\mathbf{r}_k \dots \delta\mathbf{r}_n\}$.

Вычислим возможную работу сил системы с учетом (*)

$$\delta A = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = \sum_i \left[\sum_k \mathbf{F}_k \cdot (\partial \mathbf{r_k}/\partial q_i)\right] \delta q_i$$

В этом выражении работы выражения в квадратных скобках умножается на обобщенные возможные перемещения δq_i. Поэтому их естественно назвать <u>обобщенными силами</u>, ведь работа это «сила на перемещение».

$$Q_i=\sum_k \mathbf{F}_k\cdot(\partial \mathbf{r}_k/\partial q_i) \qquad (**)$$

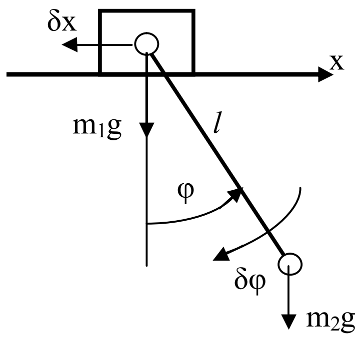
Размерность обобщенной силы определяется размерностью обобщенной координаты

$$[Q_i]=[A]/[q_i]$$

Так углу поворота в радианах соответствует обобщенная сила размерности момента.

Способы вычисления обобщенных сил.

1. По формуле (**), которая в декартовых координатах имеет вид
$$Q_i=\sum_k [F_{kx}\cdot(\partial x_k/\partial q_i)+ F_{ky}\cdot(\partial y_k/\partial q_i)+ F_{kz}\cdot(\partial z_k/\partial q_i)]$$
Этот способ применяется редко.
2. Через потенциальную энергию
$$Q_i= - \partial \Pi/\partial q_i$$
(смотрите в разделе «Потенциальное силовое поле»).
3. Наиболее распространен способ вычисления обобщенных сил через возможную работу.



Обобщенная сила находится как коэффициент при соответствующем обобщенном возможном перемещении в выражении возможной работы.

Посмотрим, как это делается на примере эллиптического маятника. Он состоит из тела массы m_1, поступательно скользящего без трения вдоль оси x, и шарнирно прикрепленного к нему математического маятника длины l и массы m_2. Название проистекает из того факта, что, как показывает исследование, точки стержня маятника движутся по эллипсам.

При вычислении возможной работы воспользуемся независимостью возможных перемещений системы δx и δφ. Их независимость означает, что работа на обоих перемещениях равна сумме работ на каждом из них. Связи допускают каждое из перемещений в двух направлениях. Для наглядности дадим системе отрицательные перемещения.

Сначала, для вычисления Q_x дадим перемещение $\delta x < 0$, оставив φ без изменения- $\delta\varphi = 0$. При этом вся система переместится поступательно налево на $|\delta x|$. Связи идеальны потому, что нет трения между плоскостью и телом и в шарнире маятника. Поэтому работу могут совершать только две силы тяжести. На горизонтальном перемещении δx они не совершают работы. Поэтому

$$\delta A_x=0 \qquad \text{и} \qquad Q_x=0$$

Чтобы вычислить Q_φ дадим системе возможное перемещение $\delta x = 0$, $\delta\varphi < 0$. Тело m_1 остается неподвижным, маятник поворачивается по часовой стрелке. Работу совершает момент силы m_2g на повороте δφ .

$$\delta A_\varphi=m_2gl\mathrm{Sin}\varphi\ |\delta\varphi|$$

Может показаться, что $Q_\varphi = m_2gl\mathrm{Sin}\varphi$, но это не верно. Дело в том, что обобщенная сила есть коэффициент при алгебраическом значении обобщенного перемещения, а здесь в выражении работы стоит его модуль. Алгебраическое (отрицательное) значение связано с модулем

$$\delta\varphi=-|\delta\varphi|$$

Поэтому работу следует записать в виде

$$\delta A_\varphi=-m_2gl\mathrm{Sin}\varphi(-|\delta\varphi|)$$

Таким образом

$$Q_\varphi= -m_2gl\mathrm{Sin}\varphi$$

Чтобы не ошибиться в знаке силы, удобно давать положительные обобщенные возможные перемещения.