Лекция 8

Статический принцип возможных перемещений в обобщенных координатах.

Как было показано, принцип гласит: *Необходимым и достаточным условием сохранения покоя в данном положении системы с голономными, стационарными и идеальными связями является равенство возможной работы активных сил нулю на любом возможном перемещении из данного положения.*

$$\delta A^a=0$$

Запишем это условие через обобщенные силы:

$$\delta A^a=\sum_i Q_i\delta q_i=0$$

Поскольку все δq_i независимы, то обязаны обратиться в ноль все обобщенные силы, и принцип можно сформулировать в обобщенных координатах так: *Чтобы система оставалась в покое в данном положении необходимо и достаточно, чтобы в этом положении обращались в ноль все обобщенные силы.*

$$Q_i = 0 \qquad (i=1,2,...,l)$$

Это условие может служить:

а) для выяснения является ли данное положение равновесным. Достаточно подставить в выражения обобщенных сил координаты данного положения. Если значения всех сил окажутся нулевыми, то положение равновесное.

б) для поиска положения равновесия системы. Если уравнения

$$Q_i\,(q_1q_2...q_l) = 0 \qquad (i=1,2,...,l)$$

имеет одно или несколько решений, то они определяют положения равновесия системы. Так, приравнивая нулю выражения обобщенных сил в примере с эллиптическим маятником,

$$Q_x\equiv 0,\quad Q_\varphi= -m_2gl\mathrm{Sin}\varphi = 0$$

находим координаты ожидаемого положения равновесия:

x- произвольно, $\varphi=k\pi$ (k=0,1,2...)

Уравнения Лагранжа

Тождества Лагранжа

Рассмотрим голономную систему точек с массами $m_1\ m_2 \ldots m_k \ldots m_n$ и l степенями свободы. Радиусы-вектора точек системы могут быть выражены через обобщенные координаты $\mathbf{r}_k\,(q_1\ldots q_l\,;\,t)$, k=1,2,...,n. Время t входит в эти выражения, если связи не стационарны.

Вычислим скорость k-той точки:

$$\mathbf{V}_k=\mathbf{r}_k{}^*=\sum(\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i)q_i{}^*+\partial\mathbf{r}_k/\partial t \qquad (*)$$

причем

$$\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i\,(q_1\ldots q_l\,;\,t) \qquad (**)$$

Докажем первое тождество Лагранжа

$$\partial\mathbf{V}_k/\partial q_i{}^*=\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i \qquad (L1)$$

(*) - линейная функция $q_i{}^*$ с коэффициентами $\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i$. Значит тождество L1 верно.

Второе тождество Лагранжа

$$d(\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j)/dt=\partial\mathbf{V}_k/\partial q_j \qquad (L2)$$

доказывается прямым вычислением правой и левой частей тождества.

Дифференцируя (**) по времени, получаем

$$d(\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j)/dt=\sum(\partial^2\mathbf{r}_k/\partial q_j\partial q_i)\,q_i{}^*+\partial^2\mathbf{r}_k/\partial q_j\partial t$$

Дифференцируя (*) по q_j, получаем то же выражение

$$\partial\mathbf{V}_k/\partial q_j=\sum(\partial^2\mathbf{r}_k/\partial q_j\partial q_i)\,q_i{}^*+\partial^2\mathbf{r}_k/\partial q_j\partial t$$

Тождество (L2) доказано.

Уравнение Лагранжа второго рода.

Рассматривается система с идеальными, голономными связями, без ограничений на их стационарность. Для нее справедливо общее уравнение динамики:

$$\sum(\mathbf{F_k}+\mathbf{I_k}) \bullet \delta\mathbf{r_k} = 0$$

Уравнения Лагранжа есть запись общего уравнения в обобщенных координатах. Возможная работа активных сил в обобщенных координатах записывается, как было показано, через обобщенные силы

$$_{k=1}\sum^{n} (\mathbf{F_k} \bullet \delta\mathbf{r_k}) = {}_{i=1}\sum^{l} (Q_i \bullet \delta q_i) \qquad (***)$$

Здесь $\boldsymbol{l}$ – число степеней свободы системы.

Займемся вычислением возможной работы сил инерции Даламбера

$$_{k=1}\sum^{n} (\mathbf{I_k} \bullet \delta\mathbf{r_k}) = -{}_{k=1}\sum^{n} (m_k\mathbf{W_k} \bullet \delta\mathbf{r_k})$$

$$\mathbf{W_k} \bullet \delta\mathbf{r_k} = \mathbf{V}_k{*} \bullet \sum_i (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i)\, \delta q_i =$$
$$= \sum_i \{[\mathbf{V}_k \bullet (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i)]{*} - \mathbf{V}_k \bullet (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i){*}\}\, \delta q_i$$

Применив к первой круглой скобке тождество L1, а ко второй тождество L2, получим

$$\mathbf{W_k} \bullet \delta\mathbf{r_k} = \sum_i \{[\mathbf{V}_k \bullet (\partial\mathbf{V}_k/\partial q_i{*})]{*} - \mathbf{V}_k \bullet (\partial\mathbf{V}_k/\partial q_i)\}\, \delta q_i =$$
$$= \sum_i \{[\partial(\mathbf{V}^2{}_k/2)/\partial q_i{*})]{*} - \partial(\mathbf{V}^2{}_k/2)/\partial q_i)\}\, \delta q_i$$

Подставив это выражение в (***), получим:

$$_{k=1}\sum^{n} (\mathbf{I_k} \bullet \delta\mathbf{r_k}) = -\sum_i \{[\partial(\textstyle\sum_k m_k\mathbf{V}^2{}_k/2)/\partial q_i{*})]{*} - \partial(\textstyle\sum_k m_k\mathbf{V}^2{}_k/2)/\partial q_i)\}\, \delta q_i$$

Легко заметить, что выражения в круглых скобках есть не что иное, как кинетическая энергия системы

$$T = \sum_k m_k\mathbf{V}^2{}_k/2$$

Окончательно общее уравнение динамики в обобщенных координатах приобретает вид

$$\sum_i [(\partial T/\partial q_i{*}){*} - \partial T/\partial q_i - Q_i]\, \delta q_i = 0$$

Поскольку для голономной системы все δq_i независимы, то каждая из квадратных скобок должна равняться нулю

$$(\partial T/\partial q_i{*}){*} - \partial T/\partial q_i = Q_i \qquad (i=1,2,..,l) \qquad (@)$$

Выражения (@) и называются уравнениями Лагранжа второго рода.

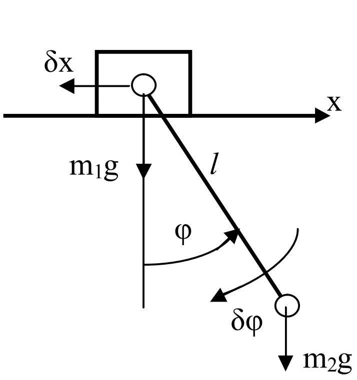
Они являются алгоритмом для вывода дифференциальных уравнений движения системы. Чтобы получить дифференциальные уравнения, нужно:

1. Записать функцию кинетической энергии T через обобщенные координаты и скорости
2. Взять соответствующие производные от T
3. Вычислить одним из способов обобщенные силы Q_i
4. Подставив результат в уравнения Лагранжа, мы получим $\boldsymbol{l}$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат как функций времени

Уравнение Лагранжа является наиболее простым и широко распространенным способом вывода дифференциального уравнения движения голономной системы с идеальными связями, в том числе и не стационарными.

Преимущества и недостатки метода Лагранжа по сравнению с методом Ньютона:

1) Формализм метода Лагранжа, состоящий в дифференцировании функции T, удобен, но не позволяет увидеть физические законы, как в методе Ньютона.
2) Метод Лагранжа позволяет изначально исключить из рассмотрения реакции идеальных связей, что позволяет быстро получить дифференциальные уравнения движения системы. Для определения этих реакций после интегрирования уравнений придется, однако, вернуться к методу Ньютона.



Пример

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника методом Ньютона, пришлось бы: учесть реакцию идеальной связи в виде натяжения нити, составить одно уравнение поступательного движения тела m_1, и два уравнения плоского движения точки m_2. Из трех уравнений- два будут дифференциальными и одно служит для определения натяжения нити.

Найдем дифференциальные уравнения методом Лагранжа:

Система имеет две степени свободы, которым соответствуют обобщенные координаты x, φ и уравнения Лагранжа

$$(\partial T/\partial x^*)^* - \partial T/\partial x = Q_x$$

$$(\partial T/\partial \varphi^*)^* - \partial T/\partial \varphi = Q_\varphi$$

Обобщенные силы мы нашли раньше

$$Q_x=0 \qquad Q_\varphi= -m_2 g l \mathrm{Sin}\varphi$$

Кинетическая энергия системы T в обобщенных координатах имеет вид

$$T=0.5[m_1 x^{*2}+m_2(x^{*2}+l^2 \varphi^{*2}+2\, l\, x^* \varphi^* \mathrm{Cos}\,\varphi)$$

Она не зависит от x: $\partial T/\partial x$ и $Q_x=0$, значит $(\partial T/\partial x^*)^*=0$. Поэтому

$$\partial T/\partial x^*=(m_1+m_2)\, x^*+m_2 l\, \varphi^* \mathrm{Cos}\,\varphi =\mathrm{Const}$$

Замечаем, что это подтверждает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси x. Первое дифференциальное уравнение движения системы получим после дифференцирования

$$(m_1+m_2)\, x^{**}+m_2 l\, \varphi^{**}\mathrm{Cos}\,\varphi - m_2 l\, x^* \varphi^{*2}\mathrm{Sin}\,\varphi=0$$

Для получения второго уравнения, найдем соответствующие производные.

$$\partial T/\partial \varphi^*= m_2 l\,(l\, \varphi^*+x^* \mathrm{Cos}\,\varphi) \qquad (\partial T/\partial \varphi^*)^*= m_2 l^2 \varphi^{**}+ m_2 l\, x^{**} \mathrm{Cos}\,\varphi - \underline{m_2 l\, x^* \varphi^* \mathrm{Sin}\,\varphi}$$

$$\partial T/\partial \varphi= - \underline{m_2 l\, x^* \varphi^* \mathrm{Sin}\,\varphi}$$

При подстановке во второе уравнение Лагранжа подчеркнутые выражения сокращаются, и мы находим второе дифференциальное уравнение движения системы

$$l\varphi^{**}+ x^{**} \mathrm{Cos}\,\varphi=-g\mathrm{Sin}\varphi$$

При фиксации тела m_1 получаем уравнение колебаний математического маятника m_2

$$l\varphi^{**}=-g\mathrm{Sin}\varphi$$