Лекция 9

Потенциальное силовое поле.

Определение и свойства потенциального силового поля.

Силовым полем называется трехмерное пространство, в каждой точке которого задана функция силы $\mathbf{F}(\mathbf{r};t)$. Если время t отсутствует явно, то поле стационарное.

Рассмотрим стационарное силовое поле, заданное в декартовых координатах x, y, z функциями:

$$F_x(x,y,z); \qquad F_y(x,y,z); \qquad F_z(x,y,z) \qquad (*)$$

Как было показано, для вычисления конечной работы силы силового поля, необходимо знать траекторию движения точки. Среди силовых полей существует класс *потенциальных силовых полей*, для которых конечная работа силы определяется только начальным и конечным положением точки и не зависит от траектории.

Силовое поле (38) называется *потенциальным*, если существует такая функция *потенциальной энергии* $\Pi(x,y,z)$, что

$$\boxed{F_x = -\partial\Pi/\partial x \quad F_y = -\partial\Pi/\partial y \quad F_z = -\partial\Pi/\partial z}$$

Критерии потенциальности силового поля: Пусть задано поле (*). Как проверить является ли оно потенциальным? Это можно сделать, если воспользоваться свойством дифференциала непрерывной однозначной функции: порядок взятия смешанной производной не имеет значения. Мы считаем, что потенциальная энергия Π является непрерывной, дважды дифференцируемой функцией координат. Тогда:

$$\partial^2\Pi/\partial x\partial y=\partial^2\Pi/\partial y\partial x \quad \partial^2\Pi/\partial y\partial z=\partial^2\Pi/\partial z\partial y \quad \partial^2\Pi/\partial z\partial x=\partial^2\Pi/\partial x\partial z \quad (**)$$

Условия (**) будут выполнены, а, значит, заданное поле будет потенциальным, если выполняется следующий критерий:

$$\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x \qquad \partial F_y/\partial z = \partial F_z/\partial y \qquad \partial F_z/\partial x = \partial F_x/\partial z$$

Свойства работы потенциальных сил.

1. Элементарная работа потенциальной силы равна минус дифференциалу потенциальной энергии. Действительно
$$d'A=\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=F_x dx+ F_y dy+ F_z dz=- [(\partial\Pi/\partial x)dx+(\partial\Pi/\partial y)dy+(\partial\Pi/\partial y)dy]= - d\Pi$$
Отсюда вытекают следующие свойства.
2. Конечная работа потенциальной силы зависит только от начального и конечного положения точки
$$A_{12}=\int_{12} d'A=-{}_1\int^2 d\Pi=\Pi_1-\Pi_2$$
3. Работа по замкнутому кругу равна нулю:
$$\Pi_1=\Pi_2, \qquad \text{поэтому} \qquad A_o=0$$

Вычисление потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии.

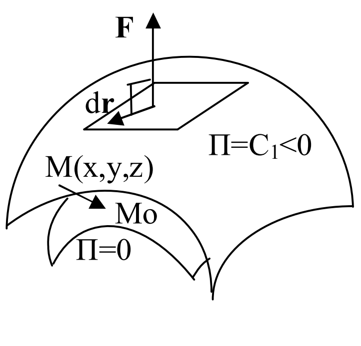
Поверхность на которой Π сохраняет значение называется *эквипотенциальной*:

$$\Pi\ (x,y,z) = C_1 = \text{const}$$

Выясним направление F по отношению к потенциальной поверхности:

Пусть точка перемещается по эквипотенциальной поверхности $\Pi=C_1$. По свойству работы потенциальная сила F не совершает работы:

$$d'A=\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=0$$



Поскольку $d\mathbf{r}$ направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности $\Pi=C_1$, то сила направлена перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям.

С другой стороны

$$\mathbf{F}= - (\partial\Pi/\partial x\ \mathbf{i} + \partial\Pi/\partial y\ \mathbf{j} + \partial\Pi/\partial z\ \mathbf{k})=-\mathbf{grad}\Pi$$

Значит, сила направлена в сторону убывания Π.

По свойствам дифференцирования функции $\Pi(x,y,z)$ и $\Pi(x,y,z)+C$, где C- произвольная аддитивная постоянная, определяют одно и тоже силовое поле. Говорят, что потенциальная энергия определена с *точностью до постоянной.*

Выберем нулевой уровень потенциальной энергии. Переместим точку из произвольного положения M(x,y,z) пространства в любую точку нулевого уровня и сосчитаем работу силы:

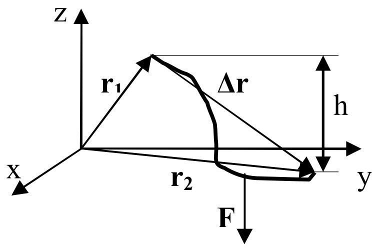
$$A_{Mmo} = П(x,y,z)$$

Отсюда <u>*правило вычисления функций потенциальной энергии*</u>:

Функция П(x,y,z) вычисляется как работа потенциальной силы на перемещение из произвольной точки M(x,y,z) на нулевой уровень.

Примеры:

1) <u>Постоянная сила</u> $\mathbf{F} = \mathbf{const}$: $A_{12} = \mathbf{F} \bullet {}_1\int^2 d\mathbf{r} = \mathbf{F} \bullet (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}) = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r}$



2) <u>Сила тяжести</u>. Это частный пример постоянной силы:
   Поле однородно, если

   $$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{const}$$

   Направим ось вертикально вверх, тогда

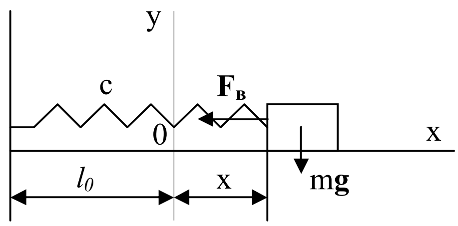
   $$F_x = F_y = 0 \qquad F_z = -mg$$

   Все поверхности z = const эквипотенциальны. Поэтому

   $A_{12} = F_z(z_1 - z_2) = \pm mgh$

   Работа положительна, если точка опускается.

3) <u>Прямая линейная пружина</u>:



   Естественная длина недеформированной пружины l_0. При изменении длины на $\Delta = l - l_0$, называемом деформацией пружины, возникает упругая сила $\mathbf{F_в}$. Она всегда стремится восстановить недеформированное состояние пружины, поэтому она называется <u>*восстанавливающей силой*</u>.

   Пружина <u>*линейна*</u>, если сила $\mathbf{F_в}$ линейно зависит от деформации:

   $$F_в = c\,\Delta$$

   Коэффициент c (н/м) называется жесткостью пружины. Если начало оси x выбрать в положении, где $\Delta = 0$, то

   $$F_{вx} = -c\,x$$

   Элементарная работа силы $\mathbf{F_в}$

   $$d'A = F_{вx}dx = -cxdx$$

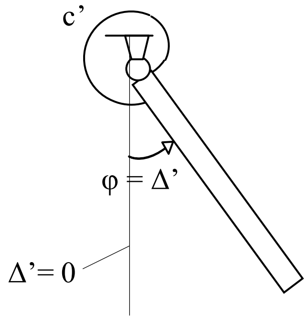
   Конечная работа силы $\mathbf{F_в}$

   $$A_{12} = -c\ {}_{x1}\int^{x2} xdx = 0.5c(x_1^2 - x_2^2)$$

   Квадраты координат можно заменить их модулями- деформациями:

   $$A_{12} = 0.5c(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$

4) <u>Спиральная линейная пружина</u>:



   При закручивании пружины на угол φ длины, называемый деформацией пружины Δ', возникает упругий <u>*восстанавливающий момент*</u> $\mathbf{M_в}$. Пружина <u>*линейна*</u>, если

   $$M_{вz} = -c'\,\varphi$$

   Коэффициент c' (нм) называется жесткостью пружины.

   Конечная работа момента $\mathbf{M_в}$

   $$A_{12} = -c'\ {}_{\varphi1}\int^{\varphi2} \varphi\, d\varphi = 0.5c'(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) \text{ или}$$

   $$A_{12} = 0.5c'(\Delta'^2_1 - \Delta'^2_2)$$

   Система называется <u>*консервативной*</u>, если все действующие на неё силы потенциальны.

   Теорема об изменении кинетической энергии для консервативной системы в интегральной форме:

   $$T_2 - T_1 = A_{12} = П_1 - П_2 \qquad \text{или } T_2 + П_2 = T_1 + П_1$$

<u>*Полной механической энергией*</u> системы называется сумма её кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + П$$

Как видим, полная механическая энергия консервативной системы сохраняется

E = const

Предположим, что кроме потенциальных сил, на систему действуют не потенциальные силы, тогда:

$$dT=d'A_{пот}+ d'A н_{не\ пот}=-d\Pi+ d'A н_{не\ пот}$$

Поделив на dt, найдем, что *скорость изменения полной механической энергии равна мощности непотенциальных сил.*

$$\boxed{dE/dt=N_{не\ пот}}$$

Например при наличии *силы вязкого сопротивления*

$$\mathbf{F}_{сопр}=- \beta\mathbf{V} \qquad \beta=Const$$

полная механическая энергия убывает со скоростью

$$dE/dt=- \beta\mathbf{V}\bullet\mathbf{V}=-\beta V^2$$

Обобщенные силы и статический принцип возможных перемещений для консервативной системы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с потенциальной энергией Π (x,y,z), и обобщенными координатами $q_1....q_l$. Найдем обобщенные силы системы по определению

$$Q_i =\sum\mathbf{F}_k\bullet (\partial\mathbf{r}_k/\partial q_i)= -\sum[(\partial\Pi/\partial x) (\partial x/\partial q_i)+ (\partial\Pi/\partial y) (\partial y/\partial q_i)+ (\partial\Pi/\partial z) (\partial z/\partial q_i)] \qquad \text{или}$$

$$\boxed{Q_i =- \partial\Pi/\partial q_i}$$

Пример: эллиптический маятник

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение x=0, φ=0 и вычислим работу при возвращении системы в начало координат

$$\Pi=m_2gl(1-Cos\ \varphi)$$

Π не зависит от x, значит $Q_x=0$

$$Q_\varphi =- \partial\Pi/\partial\varphi=-m_2glSin\ \varphi$$

Статический принцип возможных перемещений:

$$\delta A=\sum Q_i\delta q_i=0$$

Поскольку обобщенные возможные перемещения δq_i независимы, то принцип можно прочитать следующим образом:

В положении равновесия все обобщенные силы обращаются в ноль.
$Q_i=0\ \ (i=1,2,...,l)$

Это значит, что

В положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет экстремум
$\partial\Pi/\partial q_i=0 \qquad (i=1,2,...,l)$

Следовательно, нахождение положений равновесия консервативной системы сводится к нахождению экстремумов функции Π.

Уравнение Лагранжа для консервативных систем.
Циклические координаты и интегралы.

Рассмотрим консервативную несвободную систему с l степенями свободы. Потенциальная энергия $\Pi(q_1...q_l)$ определяет обобщенные силы

$$Q_i =- \partial\Pi/\partial q_i \qquad (i=1,2,...,l)$$

Уравнения Лагранжа приобретают вид

$$[\partial(T-\Pi)/\partial q_i^*]^* - \partial(T-\Pi)/\partial q_i = 0 \qquad (i=1,2,..,l)$$

Здесь учтено, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей

$$\partial\Pi/\partial q_i^*=0 \qquad (i=1,2,..,l)$$

Запишем уравнения Лагранжа через *функцию Лагранжа* L= T-П

$$(\partial L/\partial q_i^*)^* - \partial L/\partial q_i =0$$

Координата q_σ называется *циклической*, если от нее не зависит функция Лагранжа

$$\partial L/\partial q_\sigma=0$$

Уравнение Лагранжа с номером σ приобретает вид

$$(\partial L/\partial q_i^*)^*=0$$

и имеет циклический интеграл

$$\partial L/\partial q_i^*=0$$

Часто этот интеграл описывает случай сохранения количества движения или кинетического момента.

Пример: эллиптический маятник

П и Т не зависят от x, значит x- циклическая координата, и существует интеграл

$$\partial T/\partial x^*=(m_1+m_2)\ x^*+m_2 l\ \varphi^* \mathrm{Cos}\ \varphi=\mathrm{Const}$$

Мы уже отмечали, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси x.