Cours 3

Conditions de conservation du repos d'un système mécanique.
Conditions nécessaires de l'équilibre des forces extérieures du système.

Considérons un système de **n** points materiels au repos. Le système conservera le repos, si tout ses points conserve le repos. Selons les axiomes les conditions

$$\mathbf{F_k^e} + \mathbf{F_k^i} = \mathbf{0} \qquad (k=1,2,\dots,n), \qquad (12)$$

assurent le repos du système et represent ***les conditions necessaires et suffisantes*** de conservation du repos d'un système mécanique. Nous avons désigné par $\mathbf{F_k^e}$ la résultante des forces extérieures et par $\mathbf{F_k^i}$**-** la résultante des forces intérieures appliquée au point.

N'importe quelle combinaison ou la partie des conditions (12) est nécessaire, mais pas suffisante pour l'équilibre d'un système mécanique arbitraire.

Forces intérieures du système sont normalement inconnu, c'est pourquoi les combinaisons excluant ces forces represent l'intérêt spécial. Les propriétés des forces intérieures permettent de faire deux telles combinaisons.

La somme de (12), en prenant en considération, que le vecteur principal des forces intérieures est égal au zéro, nous donne conditions pour les forces extérieures

$$\mathbf{Ve=0}$$

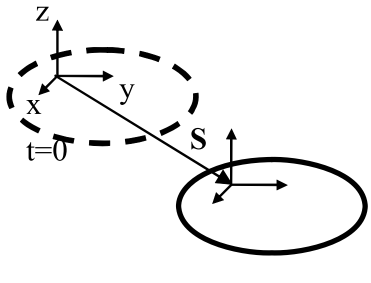
Multipliant (12) de gauche par le rayon - vecteur du point $\mathbf{r_k}$, après la sommation nous recevrons la deuxième condition pour les forces extérieures

$$\mathbf{M_o^e=0}$$

Deux ces conditions sont ***nécessaire,*** mais ***non suffisantes*** de repos ***pour système arbitraire mécanique***. Cela signifie, que si le système se trouve au repos, les conditions sont accompli. L'inverse n'est paz correcte. Montrerons, que ces conditions sont également les conditions **suffisantes** du repos pour le corps solide.

Conditions de la conservation de repos du corps solide

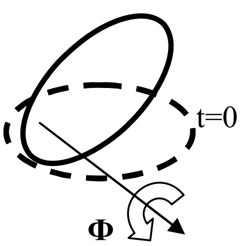
Deux types de déplacements - deux conditions vectorielles de repos du corps solide.
La charge et les réactions de liaisons. Le probleme directe de la statique



Un corps solide libre peut faire 2 types de déplacements, de la nature principalement différente : la translation et le tournant.

La translation est un déplacement, à qui les axes des coordonnées liées au corps, ne changent pas la direction. Un tel déplacement peut être décrit par le vecteur de la translation **S**.

Deuxième type du déplacement est tournant du corps autour de certain axe. On peut le représenter par la flèche arquée, autour de l'axe de tournant , dont la longueur correspond à l'angle du tournant. La direction de la flèche arquée montre la direction du tournant. Le tournant peut être presente par un vecteur axial **Φ.**



Le repos du corps est l'absence de deux déplacements vectoriels de translation et de tournant du corps. Donc le nombre des conditions vectorielles du repos du corps doit être égal à deux, de quoi nous nous persuaderons bientôt.

Le corps étudié interacte avec les corps de milieu entourant le corps. Les corps de milieu peuvent agir, sans limiter les déplacements du corps (action a distance), ou en limitant ceux-ci (action de contact).

Action a distance se crée par le champ gravitationnel ou électromagnétique de milieu. Il est défini par les lois de la physique, c'est pourquoi ses forces sont considérées donné. Nommerons toutes les forces données ***la charge***.

Avec les ***corps de contact*** on peut creer soit la charge soit les déplacements des points du corps en etude. Par exemple, on peut créer les deux avec l'aide du fil.

Les corps de contact immobiles, s'appellent ***liaisons***. Les forces, avec lesquelles les liaisons agissent sur le corps, s'appellent ***réactions des liaison.*** Comme les liaisons donnent les déplacements selon le principe fondamental de la mecanique, leurs réactions sont toujour inconnues.

Problème directe de la statique est le problème de définition des réactions selon la charge avec l'aide des conditions du repos du corps.

Liaisons déterminables.

Considéronsun corps à la charge arbitraire, dont le repos est assuré par liaisons. De telles liaisons s'appellent ***liaisons suffisant***.

Retirerons la charge. Le corps resta au repos sous l'action des réactions des liaisons. Les conditions de l'équilibre des réactions :

$$\mathbf{V^R=0,\ M_o{}^R=0}$$

doivent eter accomplit avec la nécessité. Dans les axes x, y, z ces deux conditions vectorielles sont équivalents au système homogène de six équations algébriques en forme matriciele.

$$Ax=0 \qquad (13)$$

Ici A est la matrice du système, x-la colonne des reactions cherchées.

Dans la statique du corps solide on n'examine que liaisons suffisantes, dont les réactions disparaissent avec la charge. De telles liaisons s'appellent ***liaisons déterminable***. Tous les autres liaisons s'appellent ***liaisons excédentaire***.

Pour que les liaisons soient déterminables, il est nécessaire, que le système (13) n'ait que la solution triviale (nulle). On sait, que pour cela la matrice A doit être carrée (avoir 6 inconnus) et son déterminant ne doit pas être egal a zéro. Remarquerons, qu' en présence de la charge, la meme condition est nécessaire pour la singularité de la solution du système non homogène.

$$Ax=b$$

Cela signifie, que la matrice carrée (6x6) A ne doit pas avoir des colonnes dépendante. Tel colonnes apparaîtront, et liaisons seront excédentaires, ci deux réactions se trouvons sur la meme ligne droite.

Ce resultat mathematique a une simple ***explication physique.*** Les liaisons exteriures deviennent excédentaires, quand elles doublent les liaisons intérieures du corps assurant la constance de la distance entre les points du corps.

On peut révéler la présence des liaisons excédentaires par deux expériments mentales : en chauffant le corps ou par déplaçant les supports. Si ca change réactions, les liaisons sont excédentaires.

Conditions vectorielles de conservation de repos du corps solide.

Considérons un corps solide libre au repos. Appliquons au corps une charge des forces extérieures **{F}.** Nommerons le système **{F}** ***système équilibré,*** si le corps restera au repos.

Théorème Conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système des forces appliquè au corps solide, sont l'égalité au zéro de vecteur et moment principals de la charge.

$$\mathbf{V=0;\ M_o=0} \qquad (2)$$

La nécessité des conditions (2) pour n'importe quel système mécanique était prouvée plus haut. Notons qu'ils sont insuffisants pour un corps déformable. Par exemple, un fil reste au repos sous deux forces étendant, mais elle se froisse si on change la direction de ces forces, bien que les conditions (2) restent accompli.

La suffisance pour le corps solide. Supposons que les conditions (2) sont accomplis . Montrerons, que le corps libre restera au repos, i.e. le système **{F}** est équilibré.

Supposerons l'inverse, i.e. que le corps quand même commencera à bouger. Pour arrêter le mouvement, nous infligerons au corps les liaisons déterminables. Ils sont suffisants, donc le repos sera assuré, et la charge avec les réactions formerons un systeme équilibré. Avec la nécessité, donc :

$$\mathbf{V}+\mathbf{V}^{R}=\mathbf{0},$$
$$\mathbf{M}_o+\mathbf{M}_o^{R}=\mathbf{0}.$$

En vue de (2) nous avons :

$$\mathbf{V}^{R}=\mathbf{0} \quad \mathbf{M}_o^{R}=\mathbf{0}$$

Comme les liaisons sont déterminables, ces conditions signifient, que toutes les réactions sont égales au zéro. Ainsi, les liaisons ne sont pas nécessaires, et le corps reste au repos sous la charge **{F}**. Ca signifie que les conditions (2) sont suffisant pour l'équilibre du système des forces **{F}**. Le théorème est prouvé.

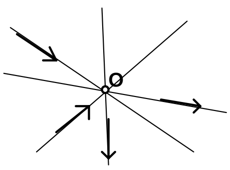
Conditions scalaires de l'équilibre des systèmes particuliers de forces. Deux problemes de la statique

a) système Arbitraire de forces

Bien que les grandeurs mécaniques ont le caractère vectoriel, tous les calculs doivent être fait sous la forme scalaire. Le passage à la forme scalaire est réalisé par projection des rapports vectoriels sur les axes de coordonnées. En projetant les conditions vectorielles de l'équilibre **V=0, M$_o$=0** sur les axes cartésiens nous recevons six conditions scalairs:

$$V_x=\Sigma F_{kx}=0;\ M_x=\Sigma m_x(F_k)=0;$$
$$V_y=\Sigma F_{ky}=0;\ M_y=\Sigma m_y(F_k)=0; \qquad (1)$$
$$V_z=\Sigma F_{kz}=0;\ M_z=\Sigma m_z(F_k)=0;$$

b) système Spatial de forces concourantes.



C'est le système de forces, dont les lignes de l'action se croisent dans un point. Le moment principal de tel système par rapport au point de l'intersection des forces O est égal a zéro **M$_o$=0**. C'est pourquoi l' équation de moments dans (1) est satisfaite et il ne reste que trois conditions:

$$Vx=0;\ Vy=0;\ Vz=0 \qquad (2)$$

Fig. 1

c) système Spatial de forces parallèles

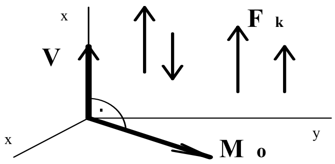


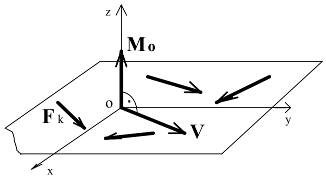
fig. 2

Dirigerons l'axe z parallèlement aux forces. Alors le vecteur principal **V** sera parallèle z, et le moment principal **M$_o$**, appartiendra au plan x y et, donc est perpendiculaire **V**. Pour l'équilibre il suffit demander:

$$V_z=\Sigma F_{kz}=0 \quad M_x=\Sigma m_x(F_k)=0 \qquad M_y=\Sigma m_y(F_k)=0 \qquad (4)$$

$$Vz=SFkz=0 \qquad Mo=Smo\ (Fk)=0 \qquad (5)$$

г) système Plan de forces.



Dans le point arbitraire O sur le plan des forces (Fig. 3) nous construirons le système des coordonnées xOy. Le vecteur principal du système se trouve au plan xOy, et le moment principal lui est perpendiculaire. Donc pour l'équilibre du système il suffit

1) $V_X=0$ $V_y=0$ $M_Z \equiv M_O = \Sigma m_O(F_k)=0$ (6)

Il est facile de montrer, que encore deux formes des

fig. 3

équations de l'équilibre pour le système plat des forces sont justes:

2) $V_X=0$; $M_A=0$; $M_B=0$ (AB # x) (7)

3) $M_A=0$; $M_B=0$; $M_C=0$ (ABC- ne sont pas sur la meme droite) (8)

Probleme directe de la statique. On examine un corps fixé par les liaisons déterminables, et sous la charge donnée. Il faut trouver les réactions des liaisons.

Dans ce cas les expressions (1) font le système complet des équations pour la définition des réactions. Ayant transféré les forces données à droite, nous recevons les équations de l'équilibre en forme du système hétérogène algébrique:

$$\Sigma R_{kx} = -\Sigma F_{kx} = -V_x^a \qquad \Sigma m_x(R_k) = -\Sigma m_x(F_k) = -M_x^a$$
$$\Sigma R_{ky} = -V_y^a \qquad \Sigma m_y(R_k) = -M_y^a \qquad (10)$$
$$\Sigma R_{kz} = -V_z^a \qquad \Sigma m_z(R_k) = -M_z^a$$

qui peut etre presente en forme matriciel:

$$Ax=b \qquad (11)$$

Puisque les liaisons déterminable, le déterminant de la matrice A n’est pas egale a zéro, et le système a la seule solution. Un telle probleme s'appelle ***probleme déterminable***.

Probleme inverse. Le corps libre au repos est charge du système des forces. Il faut savoir, si le corps conservera le repos. La réponse sera positif, si le système des forces satisfait aux conditions de l'équilibre.