Cours 6

CINÉMATIQUE du CORPS SOLIDE

Théorème sur la distribution des vitesses dans le corps solide

La matrice du tournant du corps solide.

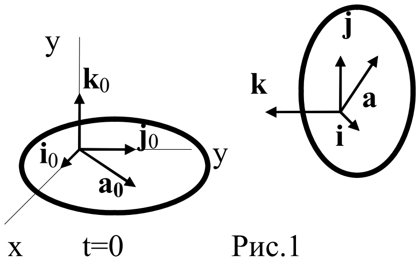


Рис.1

Considérons deux positions du corps solide : au moment initial du temps t=0, et au moment courant t (fig. 1). Nommerons ***vecteur dans le corps*** n'importe quel vecteur, joignant deux points du corps. Tous les vecteurs dans le corps ont modules constants et ne changent que leur directions, en se tournant avec le corps.

Lierons au corps un repère **i, j, k.** Désignerons la position du repère au moment initial par $\mathbf{i_o}$ $\mathbf{j_o}$ $\mathbf{k_o}$ Comme la position initiale du corps est fixé, on peut lui lier les axes immobiles des coordonnées x, y, z, ayant cumulé ceux-ci avec un repère.

Le vecteur **a** a la position $\mathbf{a_o}$ au moment initial

$$t=0: \quad \mathbf{a}(0)=\mathbf{a_o}=x_o\mathbf{i_o}+y_o\mathbf{j_o}+z_o\mathbf{k_o}=\mathbf{Const} \qquad (1)$$

Au moment t on peut presenter le vecteur **a** dans les axes immobiles x, y, z,

$$\mathbf{a}(t)=x(t)\mathbf{i_o}+y(t)\mathbf{j_o}+z(t)\mathbf{k_o} \qquad (2)$$

et dans les axes mobiles

$$\mathbf{a}(t) = x_o\mathbf{i}(t)+y_o\mathbf{j}(t)+z_o\mathbf{k}(t) \qquad (3)$$

À (3) c'est pris en considération, que les projections du vecteur sur les axes mobiles sont invariables et sont égaux à ses projections initiales sur les axes immobiles (1). C'est pourquoi le rapport

$$x\mathbf{i_o}+y\mathbf{j_o}+z\mathbf{k_o}= x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}+z_o\mathbf{k} \qquad (4)$$

qui découle de (2) et (3), lie

1) D'une part les coordonnées de deux positions du vecteur **a** dans les memes axes immobiles x, y, z après (à gauche) et avant le tournant (à droite),
2) D'autre part au moment courant du temps t les projection du vecteur **a** sur les axes immobiles et mobiles.

En multipliant le rapport (4) successivement par **i, j, k** nous trouvons

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{i_o}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{i_o}(x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}+z_o\mathbf{k}) = \alpha_{11}x_o+\alpha_{12}y_o+\alpha_{13}z_o \\ y &= \mathbf{j_o}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{j_o}(x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}+z_o\mathbf{k}) = \alpha_{21}x_o+\alpha_{22}y_o+\alpha_{23}z_o \qquad (5) \\ z &= \mathbf{k_o}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{k_o}(x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}+z_o\mathbf{k}) = \alpha_{31}x_o+\alpha_{32}y_o+\alpha_{33}z_o \end{aligned}$$

Ainsi, nous recevons l'expression des coordonnées courantes du vecteur du corps tournant par ses coordonnées initiales dans le système x, y, z

$$a(t)=T(t)\,a_0 \qquad a(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad T(t)=\begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{pmatrix} \qquad a_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=Const \qquad (6)$$

Ici par α_{mn} on désigne ***les cosinus dirigeant*** des angles entre vecteurs-unités de deux systèmes des coordonnées. Les indices sont les numéros vecteurs-unités (**1** correspond vecteur **i, 2- j, 3- k**), le premier est le numéro du vecteur-unité du système des coordonnées immobilele, deuxième - mobile. Par exemple $\alpha_{23}(t)=\mathbf{j_o}\circ\mathbf{k}(t)$.

Comme la matrice (6) caractérise le tournant de tous les vecteurs dans le corps, T s'appelle ***la matrice du tournant*** du corps**.**

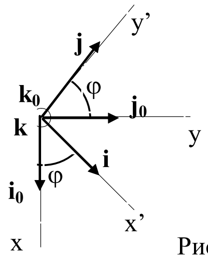


Рис.2

L'exemple : Pour le tournant du corps de l'angle φ autour de l'axe z (Fig. 2) la matrice du tournant peut etre calcule en fonction de (6)

$$T_z=\begin{pmatrix} Cos\varphi & -Sin\varphi & 0 \\ Sin\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Les matrices de tournant autour des axes x et y auront la même structure, seulement l'unité à ceux-ci occupera la place 11 et 22.

$$T_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\varphi & -Sin\varphi \\ 0 & Sin\varphi & Cos\varphi \end{pmatrix} \qquad T_y=\begin{pmatrix} Cos\varphi & 0 & -Sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ Sin\varphi & 0 & Cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (8)$$

En consernant a et a_o comme matrice colonnes des projections du vecteur **a** au moment t sur les axes immobiles et mobiles, on peut interpréter le rapport

$$a\ (t) = T\ (t)\ a0 \qquad (9)$$

comme le rapport de passage du système mobile vers le système immobile des coordonnées. C'est pourquoi la matrice T est simultanément ***la matrice du passage*** du système mobile des coordonnées vers système immobile. Il faut souligner que les directions du tournant et du passage sont opposés.

Étudions les propriétés de la matrice T. Comme la longueur du vecteur dans le corps ne change pas, le carrée du vecteur avant et après le tournant reste le meme.

$$a^2= a^Ta=a_0^Ta_0= a_0^T\ T^TT\ a_0 \qquad (10)$$

Ca signifie que

$$T^TT=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

où E-la matrice unitaire. Donc la matrice inverse à la matrice du tournant, est égale à sa matrice transposée.

$$T^{-1}=T^T \qquad (12)$$

De telles matrices s'appellent ***matrices orthogonales***. Maintenant on peut inscrire le rapport l'inverse a (9)

$$T^Ta=T^TTa_0 \qquad a_0=T^T a \qquad (13)$$

Vitesse *angulaire* du corps. Formule Euler.

En dérivant le rapport (9) par rapport au temps, compte tenu de (13) et de $a_o=Const$, nous recevrons

$$a^*=T^*a_0=T^*T^T a= \Omega a \qquad \Omega=T^*T^T \qquad (14)$$

Montrerons, que la matrice Ω est antisymmétrique. En effet :

$$\Omega^T=(T^T)^T(T^*)^T=T(T^*)^T=(TT^T)^*-T^*T^T= -T^*T^T= -\Omega$$

Ayant désigné trois composants de la matrice Ω par ω_x ω_y ω_z, nous la inscrirons comme:

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Composons le vecteur - colonne nommé ***vecteur joint de la matrice*** Ω:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

Le vecteur **ω,** correspondant a la colonne (18) est nommée ***vitesse angulaire***

Nous avons montré (voir moment de la force par rapport au point), que, si la matrice Ω est antisymmétrique, à la formule (14) correspond au produit vectoriel:

$$a^* = \Omega a \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a^*} = \omega \times \mathbf{a}\ , \qquad (19)$$

Cette formule s'appelle ***formule Euler*** dans l'écriture matricielle et vectorielle. Elle est la formule centrale de la cinématique du corps solide et montre, que les dérivées de tous les vecteurs dans le corps donné sont liées par le vecteur de la vitesse angulaire du corps **ω**. C'est pourquoi, comme nous verrons plus loin, la distribution des vitesses et des accelerations dans le corps solide porte un caractère simple et strictement réglé.

Ayant multiplié (14) par T à droite, nous recevrons

$$T^* = \Omega T \qquad (20)$$

Nous voyons que la formule Euler est aussi juste pour la matrice du tournant T.

Théorème sur distribution des vitesses dans le corps. Méthode du pôle.

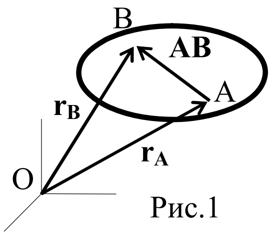


Рис.1

Formule Euler lie les caractéristiques de mouvement de tous les points du corps entre elle-même. Cela fait possible de les exprimer par les caractéristiques du mouvement d'un, spécialement choisi, point du corps nommé ***pôle***. Un tel approche s'appelle ***la méthode du pôle***.

Que le mouvement du corps soit donné dans les axes $x, y, z.$ par trois coordonnées du pôle A et trois angles Euler (Fig.1). Comme on le sait, de ces fonctions on peut calculer la vitesse du pôle $\mathbf{V_A}$ et la vitesse angulaire du corps **ω**.

Considérons le point arbitraire du corps B. L'expression initiale de la méthode du pôle est l'expression:

$$\mathbf{r_B = r_A + AB} \qquad (1)$$

En dérivant (1) par rapport au temps, nous trouvons

$$\mathbf{dr_B/dt = dr_A/dt + dAB/dt} \qquad \mathbf{V_B = V_A + dAB/dt}$$

La dérivee du vecteur **AB** doit etre prise par la formule Euler.

$$\mathbf{dAB/dt = \omega \times AB}$$

Ainsi, nous venons vers ***théorème sur distribution des vitesses*** dans le corps solide

$$\mathbf{V_B = V_A + \omega \times AB} \qquad (2)$$

Forme matricielle de ce théorème dans un système arbitraire des coordonnées a l'air :

$$V_B = V_A + \Omega\,(AB) \qquad (3)$$

Conséquences

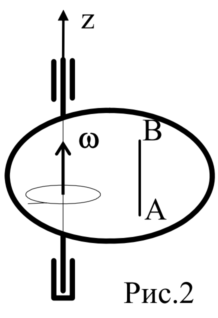


Рис.2

a) Si les vitesses de deux points du corps A et B sont identique, la vitesse angulaire est parallèle AB. Par exemple à la rotation du corps autour de l'axe immobile les vitesses des points de cet axe sont égaux au zéro. C'est pourquoi le vecteur de la vitesse angulaire est parallèle à l'axe de la rotation Z. Ordinairement on la présente sur l'axe (Fig. 2).

б) L'inverse est aussi correcte. Les vitesses des points sur la ligne droite parallèle a la vitesse angulaire, sont identiques au moment donné

$$\mathbf{AB}\ ||\ \omega: \qquad \mathbf{V_B = V_A} \qquad (4)$$

в) *Théorème de projections des vitesses.* Projections des vitesses de deux points sur l'axe passant par ces points, sont égaux. En projetant (2) sur z, et tenant compte de que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$ est perpendiculaire a z , nous recevons le théorème:

$$pr_{AB}\, \mathbf{V_A} = pr_{AB}\, \mathbf{V_B} \qquad (5)$$

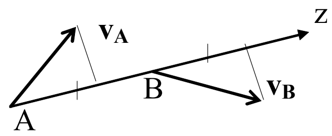


Рис.3

Ce théorème reflète la demande claire de la constance de la distance entre les points du corps solide.

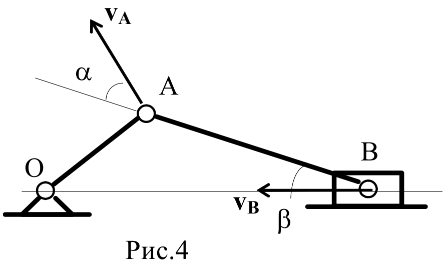


Рис.4

Exemple : Trouverons la relation entre les vitesses des points A et B de la bielle AB du mécanisme. Le point A appartient à la manivelle OA, tournant autour de l'axe O. Sa vitesse est perpendiculaire a OA. Le point B glisse le long de la ligne droite OB et sa vitesse est dirigé le long de cette ligne. Selon le théorème les projections des vitesses sont liées

$$V_A \operatorname{Cos}\alpha = V_B \operatorname{Cos}\beta \qquad (6)$$

MOUVEMENTS SIMPLES du CORPS SOLIDE

Mouvement de translation.

Nommerons ***mouvement de translation instantané*** le mouvement du corps au moment, quand la vitesse angulaire du corps est egale a zéro

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0} \qquad (7)$$

Dans ce cas

$$\mathbf{V_B} = \mathbf{V_A}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB} = \mathbf{V_A}=\mathbf{V} \qquad (8)$$

C'est-à-dire qu'a ce moment les vitesses de tous les points sont égals.

Par exemple, au moment, quand la manivelle OA sur fig. 4 est perpendiculaire à OB, les vitesses des points A et B deviendront parallèles a OB. $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ à ce moment et les vitesses de tous les points de la bielle sont égales.

On peut appeler la vitesse **V** la vitesse du mouvement de translation du corps. Le mouvement de translation est le seul type de mouvement du corps, ou on peut parler de la vitesse du corps. Dans le cas general tous les points du corps ont les vitesses différentes et le mouvement du corps est caractérisé seulement par le vecteur de la vitesse angulaire.

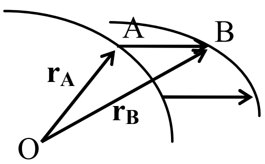


Рис.5

Si la vitesse angulaire reste égal a zéro au cours d'un certain laps de temps, le mouvement du corps pendant ce temps s'appelle ***mouvement de translation.*** Par exemple le coulisseau B sur Fig. 4 est tout le temps en mouvement de translation.

$$d\mathbf{AB}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{AB}=\mathbf{0} \quad \text{veut dire que} \quad \mathbf{AB = Const} \qquad (9)$$

Ca signifie que les trajectoires de n'importe quels deux points A et B sont identiques et sont déplacés pour le vecteur constant **AB.**

En dérivant (8) par rapport au temps, nous trouverons qu'à chaque moment du temps les accélérations de tous les points sont égaux

$$\mathbf{W_B = W_A = W} \qquad (10)$$

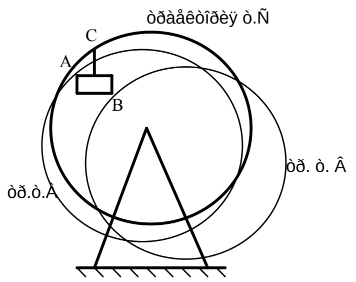


Fig 6

Il faut remarquer, que la trajectoire du mouvement de translation du corps peut être la courbe arbitraire, par exemple une circonférence, comme pour la cabine de la roue de la revue.

Le mouvement de translation du corps est décrit par les formules de la cinématique du point. Pour decrire le mouvement de translation du corps c'est assez de decrire le mouvement de son point. Comme on le sait, le mouvement du point dans l'espace est donné par trois fonctions scalaires de ses coordonnées. Donc le mouvement de translation a 3 degrés de la liberté.

Mouvement de rotation. Vitesse et accélération angulaire.

Examinerons le corps en rotation autour de l'axe immobile z. On peut donner la position du corps par l'angle de rotation du corps (Fig. 7)

$$\varphi = \varphi\,(t) \qquad (11)$$

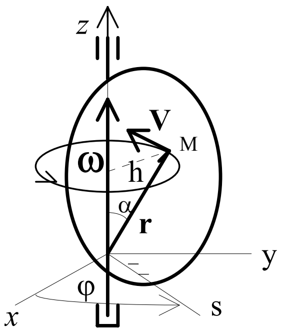


Fig. 7

Cette fonction du temps représente la loi de la rotation. Ainsi, dans le mouvement de rotation le corps a un degré de la liberté.

Comme était montré, la vitesse angulaire **ω** du corps tournant est dirigée le long de l'axe de la rotation. Trouverons sa liaison avec la loi de la rotation. La matrice du tournant

$$T = \begin{pmatrix} Cos\varphi & -Sin\varphi & 0 \\ Sin\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la vitesse angulaire

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = T^*T^T = \varphi^* \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Nous voyons, que le vecteur de la vitesse angulaire **ω** est en effet dirigé le long de l'axe de la rotation et sa projection sur cet axe est égale à la dérivée de la loi du mouvement par temps :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z\,\mathbf{k}. \qquad \omega_z = \varphi^* \qquad (14)$$

Comme nous voyons, dans le mouvement de rotation la vitesse angulaire est la vitesse du changement de l'angle de rotation du corps. D'ici le nom de la vitesse angulaire. Comme nous verrons, dans le cas general la vitesse angulaire s'exprime d'une manière beaucoup plus compliquée et non par un, mais par trois angles d'Euler.

Le vecteur **ω** est approvisionné toujours par la flèche arquée indiquant la direction de la rotation du corps. Dans un système droit la règle suivante de la vis droite agit : ***le vecteur de la vitesse angulaire du corps est dirigé le long de l'axe de la rotation dans le sens, d'où on voit, que le corps tourne contre les aiguilles d'une montre.***

On appelle ***accélération angulaire*** du corps le vecteur

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt \qquad (15)$$

Comme le godographe de la vitesse angulaire est l'axe même de la rotation, l'accélération angulaire sera aussi dirigée le long de l'axe de la rotation. En dérivant (12) par rapport au temps, nous trouvons :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varphi^{**}\mathbf{k} = \varepsilon_z\,\mathbf{k}; \qquad \varepsilon_z = \varphi^{**} \qquad (16)$$

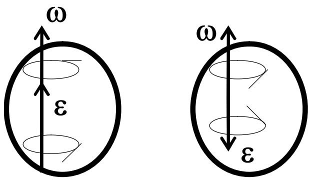
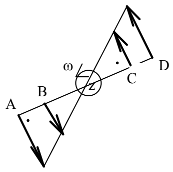


Рис.8

Ainsi la projection de l'accélération angulaire sur l'axe z est égale à la deuxième dérivée de la loi de la rotation. L'accélération angulaire comme la vitesse angulaire est le vecteur axial.

On appelle ***rotation accéléré*** une rotation dont la vitesse angulaire augmente par module. Il est évident, qu'elle aura lieu si les vecteurs de la vitesse et de l'accélération angulaire sont codirigés. Donc la rotation sera accéléré si $\varphi^*\varphi^{**}>0$ et ralenti si $\varphi^*\varphi^{**}< 0$

Vitesse et accélération du point de corps tournant



Le rayon - vecteur du point M du corps en rotation est un vecteur dans le corps, donc sa derivee se trouve selon la formule Euler

$$\mathbf{V}=d\mathbf{r}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (17)$$

L'écriture matricielle de cette formule

$$V=\Omega\ r \qquad (18)$$

En fonction de Fig. 6 le module V de la vitesse du point est égal :

$$V=\omega\ r\ \mathrm{Sin}\ \alpha =\omega\ h \qquad (19)$$

Fig.. 5

Nous voyons, que la vitesse du point dépend de la distance h jusqu'à l'axe de la rotation. Le tableau de la distribution des vitesses sur la ligne droite, perpendiculaire a l'axe de rotation est présenté sur Fig. 5

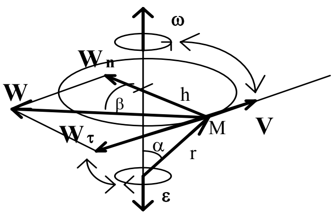


Fig. 6

Maintenant trouverons l'accélération du point de corps en rotation. En dérivant (17) par rapport au temps

$$\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dt = d/dt(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) =$$

$$=d\omega/dt \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{V} \qquad (20)$$

Ainsi l'accélération du point du corps tournant a deux composants. De Fig. 6 nous voyons que le composant $\varepsilon X\mathbf{r}$ est une ***accélération tangentielle.*** Sa direction correspond à la flèche arqué de l'accélération angulaire **ε.**

Le deuxième composant **ω ×V** est ***l'accélération normale*** du point. En effet, les vecteurs **w** et **V** changent la direction simultanément, c'est pourquoi leur oeuvre vectorielle ne change pas la direction vers l'axe de la rotation. Nous avons définitivement :

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}^{вр}+\mathbf{W}^{oc}; \qquad \mathbf{W}^{вр}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W}^{cc}=\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}; \qquad (21)$$

Les modules des composants de l'accélération

$$W^{вр}=\varepsilon\ r\ \mathrm{Sina} =\varepsilon h \quad W^{oc}=\omega V=\omega^2 h \qquad (22)$$

Le module de l'accélération complète **W** et l'angle β avec la direction vers l'axe :

$$W=\sqrt{}\,(W^{вр2} +W^{oc2} = h\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\ ; \qquad \mathrm{tg}\beta=W^{вр}/W^{oc}=\varepsilon / \omega^2 \qquad (23)$$

Nous voyons, que le module de l'accélération du point dépend de la distance h , mais l'angle β est identique pour tous les points du corps.

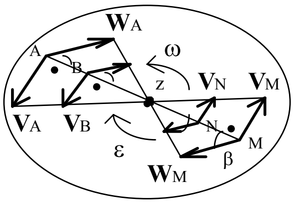


Fig. 7

Maintenant il est facile de représenter le tableau de la distribution des vitesses et des accelerations dans le corps en rotation. Les vitesse et les accélérations sont identiques tout le temps sur les lignes droites parallèles a l'axe de la rotation. Ca signifie que dans tous les plans, perpendiculaire a l'axe de la rotation, les tableaux de la distribution sont identiques. Un de ceux-ci est représenté sur Fig. 7.

On peut calculer matriciellement l'accélération du point M. En dérivant (18) par rapport au temps, nous trouvons

$$W=V^*= \Omega^* r+ \Omega r^*= \Omega^* r+ \Omega\Omega r = (E+\Omega^2)\ r \qquad (24)$$

Ici - E est la matrice de l'accélération angulaire

$$E=\Omega^{*}=\varphi^{**}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (25)$$