DYNAMIQUE du CORPS SOLIDE

Moment cinétique du corps dans le mouvement libre

Considerons un corps solide faisant le mouvement libre dans le système du décompte S1 avec les axes des coordonnées xyz (Fig. 1). Le moment cinétique du corps par rapport au centre immobile O calculeront selon la formule

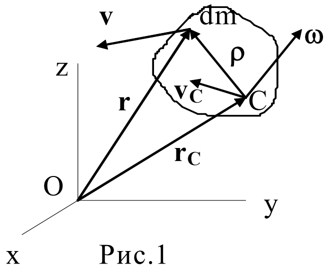

Рис.1

$$\mathbf{K_O}=\mathbf{K_C}+\mathbf{r_C}\times M\mathbf{v_C} \qquad (1)$$

La vitesse relative du point nous trouverons comme la vitesse du point du corps tournant autour du centre des masses C, selon la formule Euler $\mathbf{v_r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$. Nous recevons

$$\mathbf{K_C}=\int[\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]dm=-\int[\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega})]dm \quad (2)$$

Nous présenterons la formule (2) sur la forme matricielle, ayant inscrit le produit vectoriel par matrice R jointe au rayon vecteur **r**

$$K_C=(-\int R^2dm)\ \omega \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega}) \Rightarrow R\,(R\omega)=R^2\omega \qquad R=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

La grandeur dans les parenthèses à (4) est la matrice 3x3, qui s'appelle ***la matrice d'inertie*** J_C au centre des masses C.

$$J_C=-\int R^2dm \qquad (5)$$

Ainsi, l'écriture matricielle correspond à la formule vectorielle (1) pour le corps dans le mouvement libre :

$$K_O=J_C\,\omega+MR_Cv_C \qquad (6)$$

La matrice de l'inertie. Les moments axiaux et centrifuges de l'inertie

Nous calculerons la matrice de l'inertie en fonction de la formule (5).

$$J_C=-\int R^2dm \qquad (7)$$

$$-R^2=-\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

L'intégrale de la matrice représente la matrice des intégrales de ses éléments, c'est pourquoi

$$J_C=\begin{pmatrix} \int.(y^2+z^2)dm & -\int.xydm & -\int.xzdm \\ -\int.yxdm & \int.(z^2+x^2)dm & -\int.yzdm \\ -\int.zxdm & -\int.zydm & \int.(x^2+y^2)dm \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Nous voyons, que la matrice J_C est symétrique (($\int xydm=\int yxdm$ etc.) et, donc a seulement six éléments divers. Les éléments diagonaux s'appellent ***moments d'inertie du corps par rapport aux axes x, y*** et ***z***

$$J_x=\int(y^2+z^2)dm \qquad J_y=\int(z^2+x^2)dm \qquad J_z=\int(x^2+y^2)dm \qquad (10)$$

Les autres trois intégrales s'appelentt ***moments centrifuges de l'inertie***

$$J_{xy}=J_{yx}=\int xydm \qquad J_{yz}=J_{yz}=\int yzdm \qquad J_{zx}=J_{xz}=\int zxdm \qquad (11)$$

La dimension de tous les moments de l'inertie [J] =кг м2.

Dans les désignations acceptées la matrice de l'inertie acquiert l'aspect

$$J_O=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \qquad (12)$$