

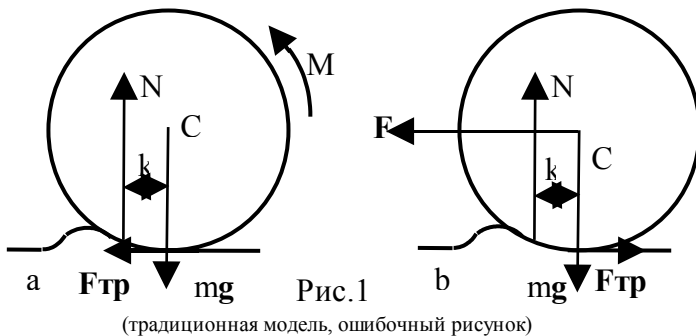
# А.В.Костарев. Сопротивления движению колеса в курсе Теоретической механики Санкт Петербургский Политехнический университет

## Резюме

Обнаружены противоречия традиционного объяснения сопротивления движению колеса. Выяснено, что традиционная модель описывает момент сопротивления деформации вращающегося колеса (например, шины на асфальте). Исследуется другой вид – сила сопротивления деформации дороги (например, асфальта под катком).

## Противоречия традиционного изложения

Общепринято следующее объяснение сопротивления качению колеса [1, стр.] [2, стр.79], [3, стр.89], [4,стр.239], [5.стр.252]. «Деформация дороги» перед колесом смещает нормальную реакцию  $N$  в сторону движения колеса на величину коэффициента трения качения  $k$  (Рис.1).



Такое описание модели приводит к парадоксам при исчезающе малой силе трения скольжения  $F_{тр}$ :

**Ведущее колесо** (Рис.1 а) должно двигаться, не смотря на сопротивление дороги. Опыт показывает, что оно буксует на месте.

**Ведомое колесо** (Рис.1 б) должно парадоксально вращаться в обратную сторону под действием силы  $N$ .

**Свободно** пущенное вдоль абсолютно

гладкой дороги колесо должно не останавливаться, несмотря на сопротивление дороги.

Причина парадоксов в некорректном рисунке. «Деформация дороги» и смещение нормальной реакции относятся к разным источникам сопротивления. «Деформация дороги» иллюстрирует сопротивление дороги, описания которого не обнаружено в учебной литературе. Смещение же нормальной реакции относится к сопротивлению от деформации колеса. Это сопротивление рассматривается в традиционной модели, снабжаемой обычно ошибочным рисунком.

## Два вида сопротивления движению колеса

Рассмотрим абсолютно твердое и гладкое колесо покоящееся на абсолютно твердой и гладкой горизонтальной дороге. Сколь угодно малый момент начнет вращать такое колесо на месте, а центральная горизонтальная сила приведет колесо в поступательное движение.

Пусть теперь деформируемое колесо покоится на твердой дороге. Трение скольжения по-прежнему отсутствует. Чтобы равномерно вращать колесо на месте придется преодолеть деформацию колеса, приложив момент, модуль которого называют моментом трения качения. Область деформации колеса вращается вокруг его центра, поэтому сопротивление связано только с поворотом колеса и не зависит от движения его центра. Центральная сила по-прежнему будет двигать колесо поступательно.

Рассмотрим гладкое твердое колесо на гладкой деформируемой дороге. Сколь угодно малый момент будет вращать такое колесо на месте. Однако для равномерного поступательного перемещения колеса вдоль дороги придется преодолеть деформацию дороги, приложив центральную силу, которую можно назвать силой сопротивления дороги. При отсутствии трения эта сила не зависит от вращения колеса.

Поскольку оба вида сопротивления связаны со скоростью деформации, то величина сопротивления должна зависеть от свойств пластичности контактирующих материалов и возрастать со скоростью.

Опыты показывают ([http://www.rau.am/fiz\\_osnovy\\_mexaniki/Lectons/L14/L14-1.htm](http://www.rau.am/fiz_osnovy_mexaniki/Lectons/L14/L14-1.htm)), что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления качению твердого колеса по мягкой дороге значительно превосходит коэффициент сопротивления мягкого колеса по твердой дороге:

Стальное колесо по дереву:  $k_1=0,15-0,25$  см

Деревянное колесо по стали:  $k=0,03-0,04$  см

Малые значения коэффициентов сопротивлений позволяют предположить, что суммарное сопротивление есть линейная суперпозиция «модельных сопротивлений»: испытуемого колеса на твердой дороге и твердого колеса на испытываемой дороге.

### Качение мягкого колеса по твердой дороге (традиционная модель)

Традиционная модель описывает, фактически, сопротивление вращению деформируемого колеса на твердой дороге. Такое сопротивление возникает только при внешнем вращательном воздействии (моменте или силе трения), стремящемся повернуть колесо, и не зависит от движения его центра. Поскольку при недостаточном трении ведомое колесо может не повернуться, рассмотрим сначала *ведущее колесо* (Рис.2).

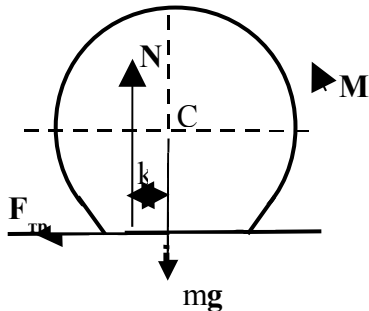


Рис.2

(традиционная модель, правильный рисунок)

При отсутствии вращательного момента  $M$  деформация колеса симметрична и реакция  $N$  центральна. Момент  $M$  вызывает смещение реакции  $N$  на  $x$  в сторону желаемого движения, создавая уравнивающий момент  $-Nx = M$ .

С возрастанием момента  $M$  смещение растет до предельного значения  $k$  начала вращения колеса (независимо от движения его центра)

Такая трактовка убирает упомянутые выше парадоксы. При отсутствии трения *ведущее колесо* вращается на месте, а *свободное колесо* скользит юзом бесконечно долго без обратного вращения.

При малом коэффициенте трения  $fr < k$  *ведомое колесо* будет скользить без вращения при  $F > mgf$ , что фактически и происходит на льду со спущенным задним колесом переднеприводного автомобиля. Колесо начнет вращаться только при  $fr > k$ .

Любопытно выяснить попутно, как будет отличаться реальная *скорость автомобиля со спущенными колесами* (Рис.3), вращающимися без проскальзывания (по асфальту) от показания спидометра.

Корд покрышки оставляет радиус внешней дуги  $R$  неизменным. Опорная часть покрышки деформируется так, что дуга  $AB$  переходит в хорду  $AB$ . При равномерном движении за один оборот центр колеса проходит длину периметра деформированной покрышки:

$$2R(\pi - \alpha + \sin \alpha) \text{ за время } T = 2\pi / \omega.$$

Здесь  $\omega$  – постоянная угловая скорость колеса. Скорость автомобиля при этом будет равна:

$$v = L / T = R \omega (1 - (\alpha - \sin \alpha) / \pi) < R \omega \text{ (показания спидометра)}$$

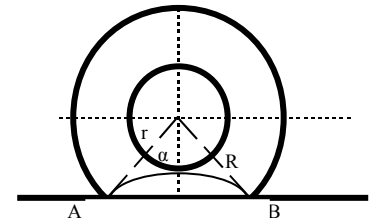


Рис.3

### Движение твердого колеса по мягкой дороге.

Поскольку при малом трении движения центра ведущего колеса может не возникнуть, рассмотрим сначала *ведомое колесо* (Рис.4).

Свободное покоящееся колесо симметрично деформирует дорогу. На площадке контакта действуют нормальные распределенные реакции.

Равнодействующая нормальных реакций  $R$  вертикальна и проходит через центр колеса.

Движущая сила  $F$  делает деформацию дороги не симметричной. Точка приложения равнодействующей  $R$  смещается вперед и сама она, оставаясь центральной, наклоняется против движения колеса.

С ростом движущей силы  $F$  угол наклона возрастает до предельного значения  $\alpha$  при начале движения центра колеса (с вращением или без). При этом точка приложения реакции  $R$  сместится на  $k_1 \approx r \alpha$

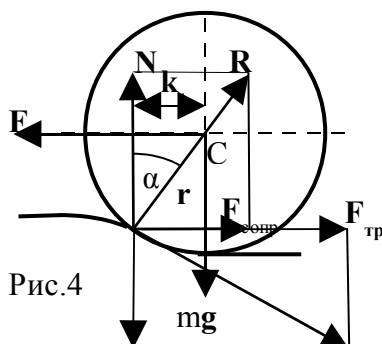


Рис.4

в сторону движения колеса. Назовем  $k_1$  *коэффициентом сопротивления дороги*.

Опыты должны показать, как зависит  $k_1$  от радиуса колеса. Можно предположить, что зависимость слабая.

Переместим реакцию  $R$  в центр колеса (Рис.5). Ее составляющая  $N$  уравновесит нагрузку  $mg$ . Составляющую  $F_{\text{сопр}}$  назовем **силой сопротивления дороги**.

Найдем модуль силы сопротивления. Угол  $\alpha$  мал, поэтому следует положить:

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \sin \alpha \approx k_1/r \quad \text{и} \quad N \approx R = mg \quad F_{\text{тр}} \approx R_{\text{тр}}$$

Таким образом

$$F_{\text{сопр}} = R \sin \alpha = N \sin \alpha \sim mg k_1/r$$

Сила сопротивления уменьшается с увеличением радиуса колеса, что объясняет лучшую проходимость автомобилей с большими колесами.

При малом трении  $fr < k_1$  **ведущее колесо** буксует на месте (ведущее колесо автомобиля в глубоком снегу). Центр колеса начнет двигаться только при достаточном трении  $fr > k_1$

Поскольку сила сопротивления дороги  $F_{\text{сопр}}$  никак не связана с вращением, то такая же сила, возникает и при движении лыж или саней в глубоком снегу.

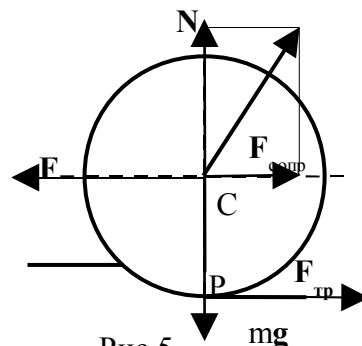
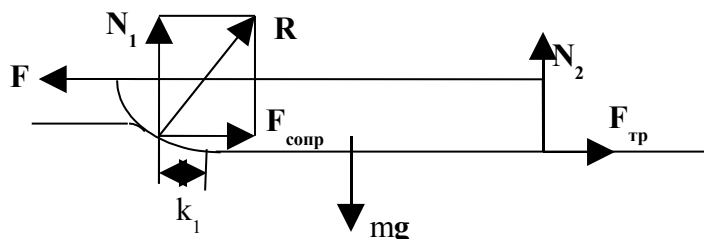


Рис.5



## Опытное определение коэффициентов $k$ и $k_1$

### Способ 1

Коэффициенты определяются с помощью цилиндра, установленного строго горизонтально на наклонной плоскости. Угол наклона плоскости увеличивают до значения  $\alpha$ , при котором цилиндр начинает катиться. Кроме плоскости и цилиндра из «испытываемых» материалов нужно дополнительно изготовить плоскость и цилиндр из «твердых» материалов, твердость которых на порядок выше твердости «испытываемых» материалов.

Для определения **коэффициента  $k$**  «испытываемый» цилиндр ставится на «твердую» плоскость. При начале качения вращающий момент равен моменту сопротивления качению

$$mgr \sin \alpha = mgk \cos \alpha$$

откуда

$$k = r \tan \alpha$$

Для определения **коэффициента  $k_1$**  «твердый» цилиндр ставится на «испытываемую» плоскость. Цилиндр начинает движение при равенстве скатывающей силы и силы сопротивления наклонной плоскости

$$mg \sin \alpha = mg k_1 / r,$$

откуда

$$k_1 = r \sin \alpha$$

### Способ 2

При известном коэффициенте трения скольжения для данной пары колесо-дорога нужно поставить два эксперимента.

- Для определения  $k$  измерить момент  $M$ , равномерно вращающий колесо нагруженное силой  $P$ , на месте. Тогда

$$M = Pfr + Pk \quad k = M/P - fr$$

- Для определения  $k_1$  измерить силу  $F$ , равномерно движущую юзом колесо, нагруженное силой  $P$ . Тогда

$$F = P(f + k_1/r) \quad k_1 = r(F/P - f)$$

## Задачи

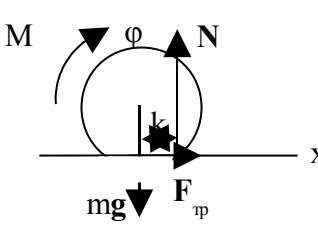
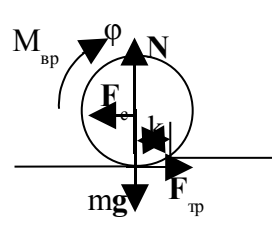
### Задача 39.10 (И.В. Мещерский)

Колесо радиуса  $r$  катится по прямому горизонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента  $M=5fmg/2$ , где  $f$ - коэффициент трения скольжения,  $m$ - масса колеса. Коэффициент трения качения  $k=fr/4$ .

Определить скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом (скорость проскальзывания). Масса колеса равномерно распределена по ободу колеса. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ:  $fgt/4$

Предположим, что в задачнике традиционно имеется в виду движение мягкого колеса (дерево) по твердой дороге (сталь). Для сравнения рассмотрим движение твердого колеса (сталь) по мягкой дороге (дерево). Как показывает опыт ([http://www.rau.am/fiz\\_osnovy\\_mexaniki/Lectons/L14/L14-1.htm](http://www.rau.am/fiz_osnovy_mexaniki/Lectons/L14/L14-1.htm)) для такой пары  $k_1=5k=5fr/4$

<p>а) «Мягкое» колесо на «твердой» дороге (Мещерский)</p>  <p><b>Решение.</b>  <math>m\ddot{x} = F_{\text{тр}} = mgf</math>, <math>\dot{x} = gft</math>  <math>mr^2\ddot{\phi} = M - Nk - F_{\text{тр}} \cdot r</math>,  <math>r\dot{\phi} = t[M - mg(k + fr)] / (mr) = 5fgt/4</math>  <b>Ответ:</b> <math>V = \dot{x} - r\dot{\phi} = -t[M / (mr) - g(2f + k/r)] = -fgt/4</math></p>	<p>б) «Твердое» колесо на «мягкой» дороге</p>  <p><b>Решение.</b> Положим <math>k_1 = 5k = 5fr/4</math>  <math>m\ddot{x} = F_{\text{тр}} - F_c = mgf - mgk_1/r = 3fmg/4</math>,  <math>\dot{x} = g(f - k_1/r)t = 3fgt/4</math>  <math>mr^2\ddot{\phi} = M - F_{\text{тр}} \cdot r</math>,  <math>r\dot{\phi} = t[M - mgfr] / (mr) = 3fgt/2</math>  <b>Ответ:</b> <math>V = \dot{x} - r\dot{\phi} = -t[M / (mr) - g(2f - k_1/r)] = -7fgt/4</math>.  <b>В семь (!) раза больше, чем в а).</b></p>
--	---

В условиях задачи величина  $k_1 = 5k = 5fr/4$  для пары дерево-сталь не может быть достигнута, поскольку буксование на месте начнется уже при:

$$k_1^* = fr < 5fr/4$$

когда сила сопротивления уравновесит силу трения

$$F_{\text{тр}} - F_c = mgf - mgk_1^*/r = 0$$

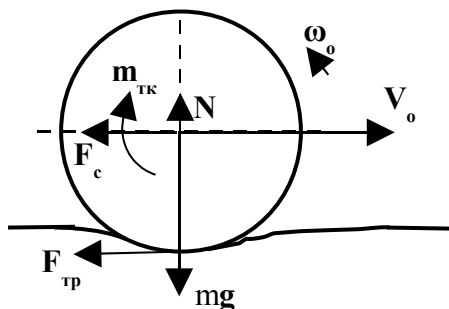
Поэтому реальная скорость проскальзывания точки контакта стального колеса по деревянной дороге будет только в **шесть (!)** раз больше, чем у деревянного колеса на стальной дороге.

Как и следовало ожидать, твердое колесо на мягкой дороге больше склонно к буксованию, чем мягкое колесо на твердой дороге.

## Обруч

Обруч радиуса  $r$  бросают вдоль дороги с начальной скоростью центра  $V_0$ , придав ему обратное вращение со скоростью  $\omega_0$ . Коэффициент трения  $f$ , коэффициенты сопротивления  $k$  и  $k_1$ .

Найти угловую скорость  $\omega_0$ , при которой движение центра и вращение обруча прекратятся одновременно. Найти когда и где это произойдет.



Решение:

При движении обруча сила трения, момент и сила сопротивления не изменяются по модулю

$$F_{\text{тр}} = mgf \quad m_{\text{тк}} = mgk \quad F_c = mgk/r$$

Уравнения движения обруча

$$m\ddot{x} = -F_{\text{тр}} - F_c = -mg(f + k_1/r)$$

$$0 = N - mg$$

$$mr^2 \ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} r + m_{\text{тк}} = mg(fr + k)$$

Интегрируя при начальных условиях  $\dot{x}_0 = V_0$ ,  $\dot{\varphi} = -\omega_0$ , находим

$$\dot{x} = V_0 - g(f + k_1/r)t$$

$$r\dot{\varphi} = g(f + k/r)t - r\omega_0$$

В момент

$$t_1 = V_0 / [g(k/r + f)]$$

центр обруча останавливается. Чтобы одновременно прекратилось и его вращение, нужно чтобы модуль начальной угловой скорости был равен

$$\omega_0 = \frac{(V_0(rf + k))}{(r(rf + k_1))}$$

Положим, что колесо и дорога из одного материала и  $k_1 = k$ . Тогда  $\omega_0 = V_0/r$

К моменту  $t_1$  обруч повернется на угол

$$r\varphi_1 = -x_1$$

а его центр пройдет путь:

$$x_1 = V_0 t_1 - g(f + k/r)t_1^2/2 = V_0^2 / [2g(k/r + f)]$$

Заметим, что при отсутствии трения скольжения обруч все же остановится на расстоянии

$$x_{1*} = rV_0^2 / (2gk)$$

(что в традиционной модели невозможно).

Легко проверить, что при этом начальная кинетическая энергия обруча

$$T_0 = 0.5mr^2 \omega_0^2 + 0.5mV_0^2 = mV_0^2$$

превратится в работу сил сопротивления

$$A_{12} = -m_{\text{тк}} \varphi_1 - F_{\text{тр}}(x_1 - r\varphi_1) - F_c x_1$$

12 июля 2008 г.

А. Костарев  
[hofa@hofa.ru](mailto:hofa@hofa.ru)

#### Литература

1. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2, М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон, «Наука», Москва, 1966
2. Курс теоретической механики, т.1, Л.Г.Лойцанский, А.И.Лурье, Москва, «Наука», 1982
3. Курс теоретической механики, Н.В.Бутенин и др,СПб, «Лань», 1998
4. Курс теоретической механики, под ред. К.С.Колесникова,Москва,МГТУ, 2000
5. Курс теоретической механики, Н.Н.Никитин, Москва, «Высшая школа», 2003