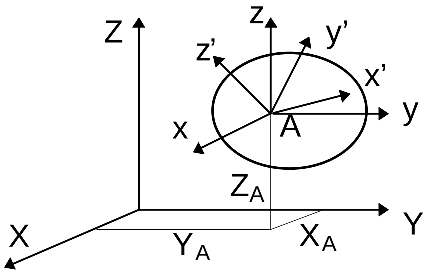
Лекция 7

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ТЕЛЕ

Закон движения свободного тела. Углы Эйлера.

Рассмотрим свободное тело, движущееся относительно системы отсчета с осями *X Y Z*

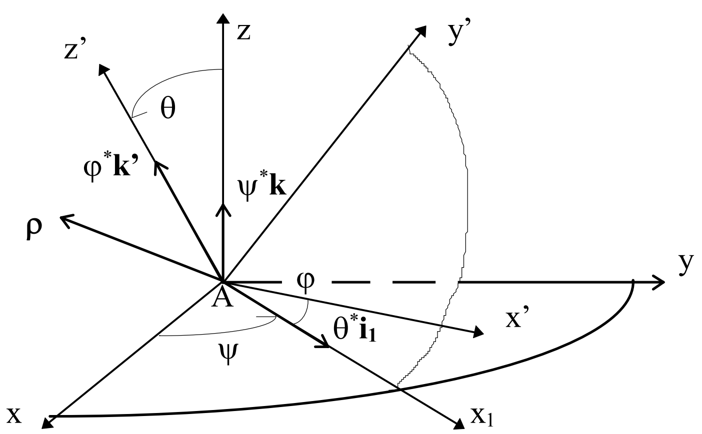


(Рис.1). Выберем в теле произвольную точку А (полюс) и поместим в ней начало осей *x y z* , параллельных *X Y Z* и движущихся с полюсом. В том же полюсе А выберем начало осей *x' y' z'*, связанных с телом .

Движение тела задано, если указан способ определения положения осей *x' y' z'*, в произвольный момент времени. Для этого достаточно определить положение начала А координатами $X_A(t)$, $Y_A(t)$, $Z_A(t)$. и поворот осей *x' y' z'* относительно *x y z*...

Рис.1

Поворот тела можно задать тремя угловыми координатами. Существует несколько способов выбора таких углов. Мы рассмотрим углы Эйлера, :



ψ *-угол прецессии*, ϑ *-угол нутации*, φ*-угол собственного вращения* (Рис.2).

Покажем, что, зная углы Эйлера, можно построить положение тела (осей *x' y' z'*) относительно осей *x y z*.

Пусть в текущий момент времени t произвольный вектор в теле ρ имеет координаты *x(t) y(t) z(t)*, образующие столбец ρ *(t)* в неподвижных осях. Очевидно, что при движении тела координаты *x' y' z'* вектора ρ не изменяются. Они образуют постоянный в времени столбец ρ_0. Если в начальный момент t=0 системы координат совпадали, то a_0- есть начальное значение столбца *a*.

$$\rho(0)=\rho_0$$

Покажем, как тремя последовательными поворотами можно совместить оси (*x y z*) с осями (*x' y' z'*). Проследим при этом за изменением координат вектора от ρ(t) к ρ_0. Таким образом найдем зависимость $\rho(t)$ от углов Эйлера.

Сначала поворотом вокруг оси *z* на угол y перейдем к осям (x_1 y_1z) (y_1 не изображена на Рис). Ось x_1 называется *линией узлов*. Столбцы ρ и ρ_ψ связаны матрицей перехода P_Ψ от второй к первой системе координат.

$$\rho_\psi=P_\psi\rho$$

Как видели эта же матрица является матрицей поворота T_ψ (   ) от первой ко второй системе:

$$\rho=T_\Psi\,\rho_\Psi \qquad T_\Psi=P_\psi^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Теперь поворотом вокруг x_1 на угол ϑ перейдем к осям (x_1 y_2 z') (y_2 не изображена). . Аналогично предыдущему, координаты ρ_Ψ и ρ_Θ окажутся связанными матрицей поворота T_Q от первой ко второй системе координат

$$\rho_\Psi=T_\Theta\,\rho_\Theta\,, \qquad T_\Theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Последним осуществим поворот вокруг *z'* на угол φ. При этом оси (x_1 y_2 z') совместятся с осями (*x' y' z'*): и координаты вектора ρ образуют столбец ρ_0.

$$\rho_\Theta= T_\varphi\,\rho_0, \qquad (3)$$

Здесь T_φ имеет вид матрицы T_Ψ, но для угла φ:

$$T_\varphi = T_\Psi(\varphi).$$

Мы показали, что координаты полюса A и углы Эйлера определяют положение тела. Таким образом шесть функций: $x_A(t), y_A(t), z_A(t);$ ψ(t), ϑ(t), φ(t) являются ***законом движения свободного тела***. Поэтому говорят, что свободное тело имеет 6 степеней свободы.

Попутно мы нашли, что текущее и начальное значения столбца координат вектора **a** связаны ***матрицей поворота*** T:

$$\rho(t)= T(t)\,\rho_0; \qquad T(t)=T_\Psi T_\Theta T_\varphi \qquad a_0=Const \qquad (4)$$

Матрица T является функцией времени поскольку ввиду ( ) ее компонентами являются переменные углы Эйлера.

Формуле ( ) соответствует тензорная запись

$$\boldsymbol{\rho}(t)= \boldsymbol{T}(t)\,\boldsymbol{\rho}_0$$

Угловая скорость тела. Формула Эйлера.

Рассмотрим *вектор в теле* **ρ=AM.** Как мы видели, его начальное и текущее положения связаны тензором поворота тела.

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\rho}_0 \qquad \boldsymbol{\rho}_0 =\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{\rho} \quad (\quad)$$

Продифференцируем ( ) по времени, учитывая, что $\boldsymbol{\rho}_0$**=Const**.

$$\boldsymbol{\rho}^*=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{\rho}_0= \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\rho}$$

Тензор

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}^T \qquad (\quad)$$

линейно отображает все векторы в теле на их производные и называется “***тензором угловой скорости тела***” (линейность следует из линейности оператора дифференцирования).

Формула

$$\boldsymbol{\rho}^*=\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\rho}$$

называется ***формулой Эйлера***. Ей соответствует матричная запись

$$\rho^*=\Omega\,\rho$$

Покажем, что матрица Ω кососимметрична:

Модуль вектора в теле постоянен, поэтому производная от него равна нулю

$$\rho^2=\rho^T\rho=Const, \qquad d(\rho^2)/dt=\rho^T\rho^*+\rho^{T*}\rho=0,$$

Подставив сюда формулы преобразования ( ) получим

$$\rho^T\,\Omega\rho+\rho^T\Omega^T\rho=0, \text{ или } \rho^T(\Omega+ \Omega^T)\rho=0.$$

Таким образом

$$\Omega+ \Omega^T=0 \qquad (9)$$

т.е. матрица Ω кососимметрична.

Обозначив три компоненты матрицы Ω через ω_x ω_y ω_z

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

составим вектор-столбец

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

которому соответствует вектор **ω,** называемый вектором ***угловой скорости.***

Это аксиальный вектор, поскольку он меняет свое направление с изменением ориентации пространства. Действительно, при изменении направления одной оси x должен измениться знак только у ρ_x и ρ_x* Это произойдет только, если при этом вектор **ω** изменит направление. (Знак изменят только проекции ω_y и ω_z , поскольку ось x поменяла направление) В этом легко убедиться, посмотрев на развернутую формулу:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

Известно, что если матрица Ω кососимметрична, то формуле (7) соответствует векторное произведение:

$$\mathbf{a}^* = \omega \times \mathbf{a}, \qquad (12)$$

Полученные выражения (6) и (12) называются ***формулой Эйлера*** в тензорной и векторной записи. Это центральная формула кинематики твердого тела. Она показывает, что производные всех векторов в данном теле связаны между собой вектором угловой скорости тела **ω**. Именно поэтому картина распределения скоростей и ускорений в твердом теле носит простой и строго упорядоченный характер.

Умножив ( ) на **T** справа, получим

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{T} \qquad (13)$$

Таким образом формула Эйлера справедлива и для тензора поворота ***T***.

Определим теперь проекции вектора **ω** на неподвижные оси ($x\,y\,z$) по заданному закону вращения в углах Эйлера. Учитывая выражение (4) матрицы T, находим матрицу угловой скорости через углы Эйлера

$$\Omega = (T_\Psi T_\Theta T_\varphi)^* (T_\Psi T_\Theta T_\varphi)^T$$

Раскрывая, находим

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_x \\ \omega_z & 0 & -\omega_y \\ -\omega_x & \omega_y & 0 \end{pmatrix} = (T_\Psi^* T_\Theta T_\varphi + T_\Psi T_\Theta^* T_\varphi + T_\Psi T_\Theta T_\varphi^*)\, T_\varphi^T T_\Theta^T T_\Psi^T =$$

$$= T_\Psi^* T_\Theta T_\varphi T_\varphi^T T_\Theta^T T_\Psi^T + T_\Psi T_\Theta^* T_\varphi T_\varphi^T T_\Theta^T T_\Psi^T + T_\Psi T_\Theta T_\varphi^* T_\varphi^T T_\Theta^T T_\Psi^T =$$

$$= T_\Psi^* T_\Psi^T + T_\Psi (T_\Theta^* T_\Theta^T)\, T_\Psi^T + T_\Psi [\, T_\Theta (T_\varphi^* T_\varphi^T)\, T_\Theta^T]\, T_\Psi^T =$$

$$= \Omega_\Psi + T_\Psi \Omega_\Theta T_\Psi^T + T_\Psi (T_\Theta \Omega_\varphi T_\Theta^T)\, T_\Psi^T =$$

$$= \Omega_\Psi + \Omega_{\Theta S} + \Omega_{\varphi S}$$

Здесь произведения

$$W_\Psi = T_\Psi^* T_\Psi^T = \psi^* \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega_\vartheta = T_\vartheta^* T_\vartheta^T = \vartheta^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_\varphi = T_\varphi^* T_\varphi^T = \varphi^* \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются матрицами проекций угловых скоростей ψ^*, ϑ^* и φ^* на неподвижную ось z, и подвижные оси N и z' соответственно

Множители вида $T_\Psi(\Omega_\Theta)\, T_\Psi^T$ вокруг этих матриц проектируют их на неподвижную систему S. Таким образом видим, что вектор угловой скорости тела **ω** является суммой трех угловых скоростей

$$\boldsymbol{\omega} = \psi^* \mathbf{k} + \vartheta^* \mathbf{i_1} + \varphi^* \mathbf{k'}$$

Проекции **ω** на неподвижные оси можно найти либо прямым проектированием последней формулы ( ), либо подставив в ( ) выражения матриц ( ). В результате получим:

$$\omega_{x'} = \vartheta^* \cos\psi + \varphi^* \sin\psi \sin\vartheta; \quad \omega_{y'} = \vartheta^* \sin\psi - \varphi^* \cos\psi \sin\vartheta; \quad \omega_{z'} = \psi^* + \varphi^* \cos\vartheta$$