Лекция 7

Теорема о сложении угловых скоростей

Пусть вращение тела задано тензором $\boldsymbol{T_r}$ (t) относительно подвижной системы отсчета S_e, вращение которой, в свою очередь, относительно системы S задано тензором $\boldsymbol{T_e}$ (t) (Рис.3).

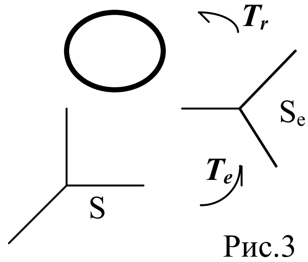

Рис.3

Абсолютная угловая скорость тела относительно S равна

$$\boldsymbol{\Omega_a = T^* T^T}, \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{T}$ – тензор поворота тела относительно S

$$\boldsymbol{T = T_e T_r} \qquad (15)$$

После подстановки получим

$$\boldsymbol{\Omega_a = (T_e^* T_r + T_e T_r^*) T_r^T T_e^T = T_e^* T_e^T + T_e (T_r^* T_r) T_e^T = \Omega_e + T_e \Omega_r^e T_e^T} \qquad (16)$$

Мы получили теорему о сложении угловых скоростей в тензорной форм

$$\boldsymbol{\Omega_a = \Omega_e + \Omega_r} \qquad (17)$$

Здесь последним стоит образ в абсолютной системе S тензора относительной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega_r}$ тела. Формуле (17) соответствует векторная форма теоремы

$$\boldsymbol{\omega_a = \omega_e + \omega_r} \qquad (18)$$

Если число подвижных координат равно N, то теорема приобретает обобщенный вид:

$$\boldsymbol{\omega_a = \Sigma^N \omega_{e\,k} + \omega_r} \qquad (19)$$

Пример. Сферическое движение тела можно представить как сумму трех вращений, соответственно

$$\boldsymbol{\omega_a = \omega_{e1} + \omega_{e2} + \omega_r} \qquad (20)$$

где складываются переносные угловые скорости прецессии и нутации с относительной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega_{e1}} = \psi^* \mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega_{e2}} = \vartheta^* \mathbf{i_1} \qquad \boldsymbol{\omega_r} = \varphi^* \mathbf{k'} \qquad (21)$$

Итак

$$\boldsymbol{\omega_a} = \psi^* \mathbf{k} + \vartheta^* \mathbf{i_1} + \varphi^* \mathbf{k'} \qquad (22)$$

Проекции $\boldsymbol{\omega_a}$ на неподвижные оси можно найти прямым проектированием последней формулы (22). В результате получим:

$$\omega_{x'} = \vartheta^* \cos\psi + \varphi^* \sin\psi \sin\vartheta; \qquad \omega_{y'} = \vartheta^* \sin\psi - \varphi^* \cos\psi \sin\vartheta; \qquad \omega_{z'} = \psi^* + \varphi^* \cos\vartheta$$

$$\omega^2 = \psi^{*2} + \vartheta^{*2} + \varphi^{*2} + 2\varphi^* \psi^* \mathrm{Cos}\,\vartheta \qquad (23)$$

Теорема о сложении угловых ускорений

Дифференцируя (16) по времени, находим:

$$\boldsymbol{\Omega_a^* = \Omega_e^* + T_e^* \Omega_r T_e^T + T_e \Omega_r^* T_e^T + \Omega_e + T_e \Omega_r T_e^{T*}} \qquad (24)$$

Обозначив абсолютное, переносное и относительное угловые ускорения через

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_a = \Omega_a^*} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}_e = \Omega_e^*} \qquad \boldsymbol{T_e^* = \Omega_e T_e}$$

$$\boldsymbol{\Omega_r^S = T_e \Omega_r T_e^T} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}_r = \Omega_r^*} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}_r^S = T_e \mathcal{E}_r T_e^T} \qquad (25)$$

и учтя, что

$$\boldsymbol{T_e^{T*} = (T_e^*)^T = T_e^T \Omega_e^T = -T_e^T \Omega_e} \qquad (26)$$

придем к теореме о сложении угловых ускорений

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_r^S + \mathcal{E}_C} \qquad (27)$$

где кососимметричный тензор

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_C = \Omega_e \Omega_r^S - \Omega_r^S \Omega_e} \qquad (28)$$

Тензорной форме теоремы соответствует матричная

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_r^S + \mathcal{E}_C \qquad \mathcal{E}_C = \Omega_e \Omega_r^S - \Omega_r^S \Omega_e \qquad (29)$$

и векторная

$$\boldsymbol{\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_r^S + \varepsilon_c} \qquad \boldsymbol{\varepsilon_c = \omega_e \times \omega_r^S} \qquad (30)$$