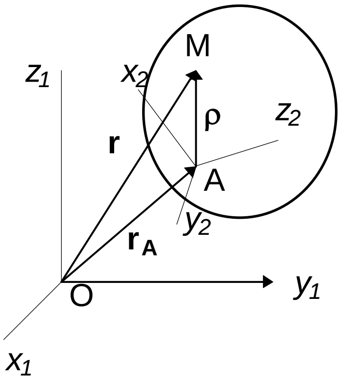
СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Постановка задачи. Абсолютное и относительное движение точки.

Часто движение точки является результатом сложения двух и более движений. Например, когда пассажир пробирается к выходу в трамвае, его движение по отношению к Земле складывается из движения вместе с трамваем и движения по отношению к трамваю. В этом примере трамвай играет роль ***несущего тела***, по которому движется точка (человек).



Пусть положение несущего тела и связанной с ним системы координат x_2, y_2, z_2 по отношению к ***абсолютной системе*** $x_1y_1z_1$ задано радиусом-вектором начала r_A (t) и матрицей поворота *T(t)*. Напомним, что *T* одновременно является матрицей перехода от подвижной к абсолютной системе координат. Движение несущего тела назовем переносным. Скорость и ускорение точки, возникающие в результате этого движения, назовем ***переносными*** и снабдим индексом “e”.

Положение изучаемой точки M на теле зададим вектором-столбцом ρ_2 (t) в координатах тела x_2, y_2, z_2 . Движение точки по отношению к несущему телу (подвижной системе) называется ***относительным***. Характеристики относительного движения будем снабжать индексом “r”

Движение точки M по отношению к абсолютной системе называется ***абсолютным***. Оно описывается радиусом-вектором- **r**(t), имеющим столбец проекций *r*(t). Характеристики абсолютного движения точки будем снабжать индексом “a”.

Очевидно соотношение векторного треугольника

$$\mathbf{r}=\mathbf{r_A}+\boldsymbol{\rho}$$

Чтобы записать его в проекциях на абсолютные оси, необходимо от ρ_2 в подвижных осях перейти к ρ в абсолютных осях с помощью матрицы *T* . Теперь можем записать

$$r(t)=r_A(t)+T(t)\,\rho_2(t) \qquad (2)$$

Это соотношение отличается от аналогичного выражения радиуса-вектора свободного твердого тела только тем, что здесь ρ_2 (t) является функцией времени, поскольку точка движется по несущему телу.

Требуется: по закону переносного движения тела r_A (t), *T*(t) и закону относительного движения точки ρ_2 (t) найти абсолютные скорость и ускорение точки M.

Теорема о сложении скоростей.

Дифференцируя (2) по времени, получим:

$$r^*=r_A^*+T^*\rho_2+T\rho_2^* \qquad (3)$$

В соответствии с определением абсолютного движения r^*- задает столбец проекции абсолютной скорости v_a, точки, а r_A***-** скорости v_A начала A. Известно, что для матрицы поворота *T* справедлива формула Эйлера

$$T^*=\Omega T \qquad (4)$$

Согласно определению относительного движения производная

$$v_r=T\rho_2^* \qquad (6)$$

дает проекции относительной скорости точки на абсолютные оси (ρ_2^* дает ее проекции на подвижные оси) . Получаем матричное соотношение

$$v_a=v_A+\Omega\rho+v_r$$

Запишем эту формулу в векторном виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{v_A}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}+\mathbf{v_r} \qquad (9)$$

Если точку M зафиксировать в подвижной системе (на несущем теле), то: $\boldsymbol{\rho}_2$**=Const,** $\mathbf{v_r}$**=0** и абсолютная скорость станет скоростью той точки несущего тела с которой в данный момент совпадает точка M. Такую скорость назовем ***переносной скоростью*** $\mathbf{v}_e$ точки M.

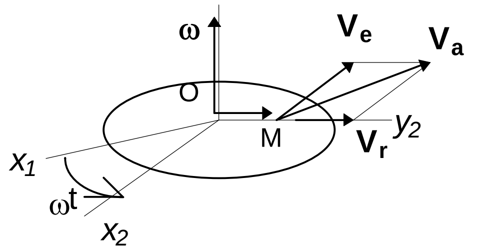
$$\mathbf{v_e}=\mathbf{v_A}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \qquad (10)$$

Таким образом приходим к ***теореме о сложении скоростей***

$$\mathbf{v}=\mathbf{v_e}+\mathbf{v_r} \qquad (11)$$

Заметим, что если остановить переносное движение ($\mathbf{v_A=0}$, $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$), то ( ) даст относительную скорость точки. Метод определения характеристик одного движения при мысленной остановке другого движения называется ***методом остановки***.

Пример По радиусу диска, равномерно вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью w=2с,$^{-}$, по закону y_2=3t^2 -2t (м) движется точка М. Найти абсолютную скорость точки в момент времени t_1=1сек.



Сначала решим задачу общепринятым *методом остановки*. Мысленно остановим вращение диска и найдем проекцию относительной скорости на подвижную ось y_2, продифференцировав закон относительного движения:

$$v_{ry}=y_2{*}=6t-2|_{t=1}=4 \text{ м/сек.}$$

Фиксируя точку М на расстоянии ОМ=$y_2|_{t=1}$=1м , найдем ее переносную скорость во вращении

$$v_e=\omega OM=2\text{м/сек}$$

Таким образом v_x=-2, v_y=4, v_z=0

Теперь найдем абсолютную скорость матричным методом в подвижных осях.

$$v_A=0 \qquad \Omega_2=\omega\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Таким образом находим проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

$$\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}=\Omega_2\, r_2+r_2{*}=2\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3t^2-2t\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6t-2\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{t=1}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Теорема о сложении ускорений

Дифференцируя теорему о сложении скоростей в матричной форме

$$v=v_A+\Omega\, T\,\rho_2+T\rho_2{*}$$

по времени, находим

$$w=w_A+\Omega{*}T\,\rho_2+\Omega\, T{*}\rho_2+\Omega\, T\,\rho_2{*}+T{*}\rho_2{*}+T\,\rho_2{**} \qquad (15)$$

Матрица Ω* называется ***матрицей углового ускорения*** Е**.** Она кососимметрична т.к. является производной от кососимметричной матрицы угловой скорости. Поэтому ей можно сопоставить присоединенный ***вектор углового ускорения*** $\boldsymbol{\varepsilon}$, а произведение этой матрицы на столбец можно заменить на векторное произведение с присоединенным вектором.

Очевидно, что

$$T\,\rho_2=\rho; \qquad \Omega\, T{*}\rho_2=\Omega\Omega T\,\rho_2=\Omega\Omega\,\rho$$

$$\Omega\, T\,\rho_2{*}=\Omega\, v_r \qquad T{*}\rho_2{*}=\Omega\, T\,\rho_2{*}=\Omega\, v_r \qquad (16)$$

Таким образом приходим к матричному соотношению для ускорений

$$w=w_A+(E+\Omega^2)\rho+T\rho_2{**}+2\,\Omega\, v_r \qquad (17)$$

По определению относительного движения столбец

$$w_r=T\rho_2{**} \qquad (18)$$

имеет элементами проекции ***относительного ускорения*** на абсолютные оси ($\rho_r{**}$ - на подвижные оси). В векторной форме получаем:

$$\mathbf{w}=\mathbf{w_A}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})+\mathbf{w_r}+2\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_r} \qquad (20)$$

Если точку М зафиксировать в подвижной системе, то $\mathbf{v_r}$ **,** $\mathbf{w_r}=\mathbf{0}$ и абсолютное ускорение станет равным переносному по определению

$$\mathbf{w_e}=\mathbf{w_A}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) \qquad (21)$$

Точно такая же формула была получена для ускорения точки твердого (несущего) тела. Но так и должно быть по определению переносного движения.

Теперь

$$\mathbf{w}=\mathbf{w}_e+\mathbf{w}_r+2\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r \qquad (22)$$

Из последнего выражения следует, что, в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений в общем случае не дает абсолютного ускорения точки. Возникает ***добавочное ускорение***

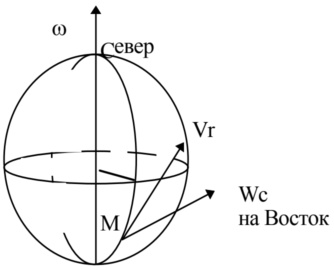
$$\mathbf{w}_c=2\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r \qquad (23)$$

которое еще называют ***Кориолисовым ускорением***.

Очевидно, что Кориолисово ускорение обращается в ноль при поступательном движении подвижной системы ($\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$).

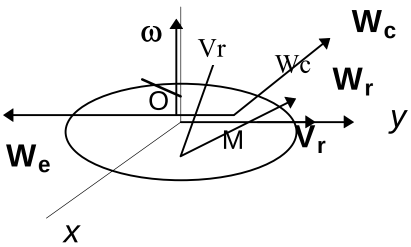
Таким образом приходим к ***теореме Кориолиса***

$$\mathbf{w}_a=\mathbf{w}_e+\mathbf{w}_r+\mathbf{w}_c \qquad (24)$$



Чтобы понять природу Кориолисова ускорения рассмотрим движение точки по меридиану Земли с относительной скоростью **Vr.** Кориолисово ускорение характеризует взаимное влияние переносного и относительного движений, которое не учитывается при подсчете отдельно переносного и относительного ускорений, поскольку

Рассмотрим тот же пример. Сначала применим метод остановки.



$w_{ry}=y^{**}=6$

$w_e=w_e^{oc}=\omega^2 OM=4\text{м/сек}^2$

$w_c=2\omega v_r=16\text{м/сек}^2$

В проекциях на подвижные оси

$w_x=-w_c=-16,\qquad w_y=w_r-w_e=2,\qquad w_z=0$

Тот же ответ получим матричным методом.

В подвижных осях имеем: $w_A=w_o=0;\qquad E=\Omega^*=0;$

$$\Omega^2=-\omega^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$W_a=\Omega^2 r+2\Omega r^*+r^{**}$$

$$\begin{pmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{pmatrix}=\left\{-\varpi^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3t^2-2t\\0\end{pmatrix}+2\varpi\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6t-2\\0\end{pmatrix}\right\}\Bigg|_{t=1}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\2\\0\end{pmatrix}$$

Как видим, результаты совпадают.