Лекция 6

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Тензоры в механике.

Все механические величины являются ***тензорами*** различных рангов**.**

Тензорами нулевого ранга являются скаляры, т.е. величины, характеризуемые одним вещественным числом.. ***Тензорами первого ранга*** являются векторы.

Тензор второго ранга определим как физическую величину $\boldsymbol{T}$, скалярное произведение которой на произвольный вектор **a** из множества А определяет вектор **b** из множества В

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{T}_{AB}\cdot\mathbf{a} \qquad (1)$$

и является линейным оператором (в дальнейшем точку скалярного произведения опустим)

Тензор $\boldsymbol{T}_{AB}$ можно понимать как векторную функцию векторного аргумента, ставящую в соответствие вектору **a** из одного множества векторов (области определения А) вектор **b** из другого множества векторов (области значений В).

Линейность оператора $\boldsymbol{T}_{AB}$ означает, что выполняются следующие правила:

1. $\boldsymbol{T}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=\boldsymbol{T}\mathbf{a}_1+\boldsymbol{T}\mathbf{a}_2=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$ (2)
2. $\boldsymbol{T}(l\mathbf{a})= \lambda\boldsymbol{T}\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$, где λ- скаляр

Условия линейности обеспечивают отсутствие “искажений” при отображении, как это происходит в фотографии при печати снимка с негатива.

Обратное отображение В на А обеспечивается ***обратным*** тензором $\boldsymbol{T}_{BA}$,

$$\boldsymbol{T}_{BA}=\boldsymbol{T}_{AB}^{-1} \qquad \mathbf{a}=\boldsymbol{T}_{BA}\mathbf{b}$$

Последовательное действие прямого и обратного тензоров не изменит вектора исходного множества:

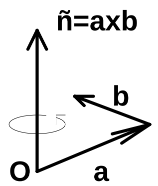
$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{a}=\boldsymbol{E}\,\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

Здесь $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}$**-** называется ***единичным тензором***. Очевидно что в произведении единичный тензор можно опустить.

В дальнейшем для краткости тензоры второго ранга будем называть просто тензорами. Рассмотрим некоторые примеры тензоров второго ранга

Тензор векторного умножения, тензор поворота и тензор перехода

Тензор векторного умножения



Самым простым примером тензора может служить известный нам оператор **v×** векторного умножения произвольного вектора **a** на вектор **v** слева. Действительно, произведя умножение, мы получим другой вектор **b**, который находится по известному правилу векторного произведения

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(Рис.1) Этот оператор обладает всеми свойствами линейности:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\times\mathbf{b}_2, \qquad \mathbf{a}\times\lambda\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

Рис.1

Значит действие оператора **a×** можно представить как скалярное произведение некоторого тензора $\boldsymbol{A}$ на вектор **b**

$$\mathbf{c}=\boldsymbol{A}\mathbf{b} \qquad (3)$$

Векторные пространства А и В могут иметь различную природу. Так, для момента силы относительно центра О, формула (3) получит вид

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}= \boldsymbol{R}\mathbf{F}$$

Тензор $\boldsymbol{R}$ отображает множество всех сил, которые можно приложить на конце радиуса вектора **r** на множество моментов этих сил относительно центра О.

Тензор поворота твердого тела (тела отсчета)

Рассмотрим перемещение твердого тела относительно системы отсчета S из начального положения 1 в текущее положение 2 (Рис.2)

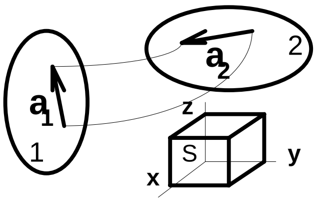


Рис.2

Вектором в теле назовем вектор, соединяющий две точки тела. Все векторы в теле образуют жесткую систему, связанную с данным телом. Вектор в теле имеет постоянный модуль и при движении тела меняет только свое направление. В каждый момент времени данный вектор в теле совпадает с некоторым вектором в системе отсчета S и воспринимается наблюдателем как образ (положение) вектора в данный момент времени.

Наблюдатель видит, как при движении тела произвольный вектор в теле **a** переходит из начального положения $\mathbf{a_1}$ в конечное положении $\mathbf{a}_2$. Множества начальных и конечных положений жесткой системы векторов в теле связаны линейным отображением, так как взаимное расположение векторов в теле при повороте не изменяется.

$$\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1} \rightarrow \mathbf{a_2}+\mathbf{b_2} \qquad\qquad \lambda\mathbf{a_1} \rightarrow \lambda\mathbf{a_2}$$

Значит существует тензор $\boldsymbol{T_{12}}$, связывающий два положения (направления) произвольного вектора **a** в теле

$$\mathbf{a_2}=\boldsymbol{T_{12}}\,\mathbf{a_1} \qquad (4)$$

Тензор $\boldsymbol{T_{12}}$ назовем ***тензором поворота*** тела из положения 1 в положение 2**.**

Тензор перехода

Теперь рассмотрим ситуацию, в какой-то степени обратную. Пусть две идентичные системы отсчета S_1 и S_2, совпадающие в начальный момент времени t=o, начинают расходится. К моменту времени t поворот S_2 относительно S_1 характеризуется тензором $\boldsymbol{T}_{\mathbf{12}}$. (Заметим, что этот поворот виден наблюдателю, построившему Рис.3)

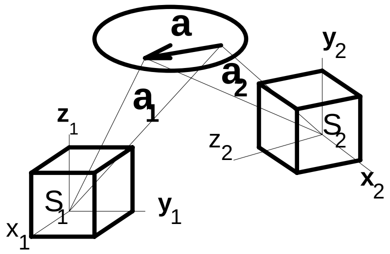


Рис.3

В этот момент времени два наблюдателя, связанных с системами S_1 и S_2 сравнивают положения (образы) некоторого вектора **a**(t) по отношению к своим системам.

Очевидно, что при повороте системы S_2 относительно S_1 положение вектора **a** , видимое из системы S_2, изменяется в противоположном направлении и описывается тензором, обратным $\boldsymbol{T}$. Тензор $\boldsymbol{P}$ обратный тензору $\boldsymbol{T}$ назовем ***тензором перехода*** от системы S_1 к системе S_2 в описании положения произвольного вектора **a**

$$\mathbf{a_2}=\boldsymbol{P}\,\mathbf{a_1} \qquad\qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}^{-1} \qquad\qquad (5)$$

Отсюда

$$\mathbf{a_1}=\boldsymbol{T}\,\mathbf{a_2}$$

Преобразование тензора при переходе к новой системе отсчета

Рассмотрим как преобразуется тензор при переходе от одной системы отсчета к другой. Пусть оба наблюдателя видят как некоторый вектор **r** отображается тензором **W** на другой вектор **v.** В системе S_1 наблюдатель записывает.

$$\mathbf{v_1}=\boldsymbol{\Omega_1}\,\mathbf{r_1} \qquad (6)$$

В системе S_2, повернутой тензором $\boldsymbol{T_{12}}$ относительно S_1, наблюдатель записывает свое соотношение

$$\mathbf{v_2}=\boldsymbol{\Omega_2}\,\mathbf{r_2} \qquad (7)$$

Образы всех векторов для двух наблюдателей связханы тензором перехода

$$\mathbf{v_2}=\boldsymbol{P}\,\mathbf{v_1} \qquad (8)$$

$$\mathbf{r_2}=\boldsymbol{P}\,\mathbf{r_1} \qquad (9)$$

$$(\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}^{-1})$$

Подставляя (9) в (7), получаем

$$\mathbf{v_2}=\boldsymbol{W_2}\,\boldsymbol{P}\,\mathbf{r_1}$$

Подставляя (6) в (8), находим

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{W}_1 \mathbf{r}_1$$

Отсюда

$$\boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{W}_1$$

Умножая это соотношение на $\boldsymbol{P}_{12}^{-1}$ справа, и опуская единичный тензор $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}$, имеем

$$\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{T}\, \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{T}^{-1} \qquad (10)$$

Так связаны “образы” тензора $\boldsymbol{W}$ для двух наблюдателей.

Матрицы тензоров перехода, поворота и векторного произведения.

Матрица тензора перехода

Тензорная (векторная) запись является основной в механике ввиду своей краткости и инвариантности (независимости) относительно координатных осей. Однако все расчеты, как известно, ведутся в скалярном виде (в числах). Поэтому возникает необходимость в матричном (скалярном) представлении тензорных выражений. Для этого вводится система координат, жестко связанная с телом отсчета. Известно, что вектору можно сопоставить матрицу-столбец его координат. Покажем, что рассмотренным ранее тензорам в выбранной системе координат соответствует квадратные матрицы 3x3.

Ввдем матрицу тензора перехода $\boldsymbol{P}_{21}$ от системы отсчета S_2 с осями $x_2y_2z_2$ развернута тезором $\boldsymbol{T}$ относительно S_1 с осями $x_1y_1z_1$. Образы произвольного вектора **a** в этих системах связаны соотношением

$$\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{P}_{21}\, \mathbf{a}_2$$

Запишем вектор **a** в разложении по осям обеих систем

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1 = x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2$$

Умножая соотношение поочередно на орты первой системы, найдем проекции вектора на ее оси

$$x_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_1 = (x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2)\,\mathbf{i}_1 = a_{11}x_2 + a_{21}y_2 + a_{31}z_2$$

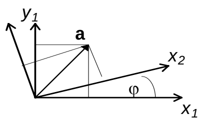
$$y_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}_1 = (x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2)\,\mathbf{j}_1 = a_{12}x_2 + a_{22}y_2 + a_{32}z_2$$

$$z_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}_1 = (x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2)\,\mathbf{k}_1 = a_{13}x_2 + a_{23}y_2 + a_{33}z_2$$

Здесь через a_{mn} обозначены ***направляющие косинусы*** углов между ортами обеих систем координат. Ортам приданы номера (**i-1, j-2, k-3**), и первым стоит номер орта системы S_2, а вторым- S_1.

Таким образом нашли связь между столбцами a_1 и a_2 в системах $S_!$ и S_2. В матричном виде то-же самое можно записать как

$$a_1 = P_{21}\, a_2 \qquad a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad P_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$



В частном случае поворота S_2 относительно S_1 на угол j вокруг оси z:

$$x_1 = x_2\, \mathrm{Cosj} - y_2\, \mathrm{Sinj}$$

$$y_1 = x_2\, \mathrm{Sinj} + y_2\, \mathrm{Cosj}$$

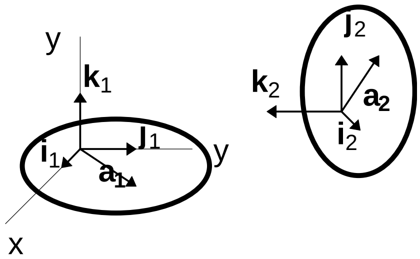
т.е. матрица P_{21} имеет вид:

$$P_{21} = \begin{pmatrix} Cos\varphi & -Sin\varphi & 0 \\ Sin\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричное выражение (13) в точности соответствует тензорному выражению (5) для тензора перехода. Поэтому матрицу P называют ***матрицей тензора перехода.***

Матрица тензора поворота

Пусть в момент времени t=0 тело и связанные с ним орты **i, j, k** и вектор **a** занимали положение, отмеченное индексом 1. К моменту t тело заняло положение 2. При этом новое и старое положения векторов в теле связаны тензором поворота $\boldsymbol{T_{12}}$.



$$\mathbf{a}_2(t)=\boldsymbol{T_{12}}\,\mathbf{a}_1 \qquad \mathbf{a}_1=\mathbf{Const}$$

Найдем связь между столбцами проекций вектора **a** на оси неподвижных координат xyz.

В начальный момент

$$\mathbf{a}_1=x_1\mathbf{i}_1+y_1\mathbf{j}_1+z_1\mathbf{k}_1=\mathbf{Const}$$

Поскольку при движении тела проекции вектора на орты, связанные с телом, не изменяются, то после поворота:

$$\mathbf{a}_2=x_2\mathbf{i}_1+y_2\mathbf{j}_1+z_2\mathbf{k}_1=x_1\mathbf{i}_2+y_1\mathbf{j}_2+z_1\mathbf{k}_2$$

Умножая последовательно обе части равенства на орты 1, находим проекции вектора **a** после поворота тела

$$x_2=\mathbf{a}_2\mathbf{i}_1=(x_1\mathbf{i}_2+y_1\mathbf{j}_2+z_1\mathbf{k}_2)\,\mathbf{i}_1=a_{11}x_1+a_{21}y_1+a_{31}z_1$$
$$y_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{j}_1=(x_1\mathbf{i}_2+y_1\mathbf{j}_2+z_1\mathbf{k}_2)\,\mathbf{j}_1=a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{32}z_1$$
$$z_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{k}_1=(x_1\mathbf{i}_2+y_1\mathbf{j}_2+z_1\mathbf{k}_2)\,\mathbf{k}_1=a_{13}x_1+a_{23}y_1+a_{33}z_1$$

В матричном виде связь новых и старых координат имеет вид

$$a_2=T_{12}\,a_1 \qquad a_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \qquad T_{12}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\alpha_{31}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{32}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{pmatrix} \qquad a_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

Сравнив это выражение с тензорным ( ), убедимся в том, что они совпадают по форме. Назовем T_{12} ***матрицей тензора поворота.*** Видим, что T_{12} равна матрице перехода P_{21}. Так при повороте тела на угол j вокруг оси z

$$T_{12}=P_{21}=\begin{pmatrix}Cos\varphi&-Sin\varphi&0\\Sin\varphi&Cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Если ( ) умножить на орты S_2 то придем к соотношению

$$a_1=T_{21}\,a_2 \qquad T_{21}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}=T_{12}^{\,T}=P_{12}$$

Покажем, что матрицы T_{21} и P_{21} взаимно обратны.

. Пусть вместе с телом поворот осуществляют два вектора в теле **a** и **b**. При повороте угол между векторами не изменится. Значит их скалярное произведение сохранит значение. Записывая скалярное произведение в матричной форме, имеем:

$$a_1^T b_1=a_2^T b_2=a_1^T\,T_{12}^{\,T}\,T_{12}\,b_1$$

Поскольку

$$T_{12}^{\,T}T_{12}=E=T_{12}^{\,-1}T_{12}$$

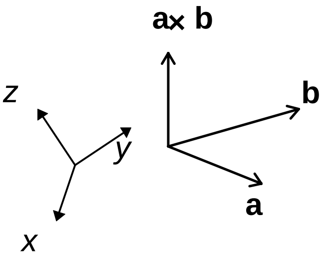
то

$$T_{12}^{\,--1}=T_{12}^{\;T}=P_{21} \qquad P^{-1}=P^T=T$$

Оператор, матрица которого обладает таким свойством, называется ***ортогональным***.

Матрица тензора векторного умножения на вектор.

Известно, что векторное произведение



$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

может быть представлено в виде определителя

$$\mathbf{c}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k},$$

где **I, j, k**- орты осей *x, y, z*

Таким образом вектору **c** в координатах *x, y, z* можно сопоставить столбец

$$c=\begin{pmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим кососимметричную квадратную матрицу из координат вектора **a** $A=\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$,

которую назовем присоединенной матрицей столбца *a*. Эта матрица позволяет записать столбец векторного произведения $c=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ в виде:

$$c=Ab=\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Таким образом видим, что векторной записи **c=axb** можно сопоставить тензорную и матричную записи.

$$\mathbf{c}=\boldsymbol{A}\mathbf{b}, \qquad c=Ab$$

Матричный аналог тензорных выражений

Теперь в векторных выражениях мы можем заменить векторные произведения векторов на скалярные произведения вектора с тензором. Например идентичными будут выражения

$$\mathbf{a}=\mathbf{t}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}-\mathrm{a}(\mathbf{g}\times\mathbf{h}),$$

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{c}+(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}-\mathrm{a}\boldsymbol{G}\cdot\mathbf{h}$$

Им будет соответствовать матричное соотношение:

$$a=TBc+d^Te\,f-\mathrm{a}Gh,$$

где *T, B* и *G* - присоединенные матрицы столбцов *t, b, g*

Например формуле (10) преобразования тензора при переходе к новой системе отсчета соответствует такое же по форме выражение для матрицы этого тензора. С учетом ортогональности матрицы поворота ($T^{-1}=T^T$) имеем:

$$W_2=T^{-1}W_1T \qquad W_1=T\,W_2T^{-1} \qquad (13)$$

Иногда правило (13) принимают за определение тензора, как величины, элементы матрицы которой преобразуются именно по этому правилу.