

Конструирование абсолютно достаточных статически определимых связей

Постановка задачи. Достаточные и избыточные связи.

Большинство инженерных сооружений (здания, мосты и т.д) находятся под нагрузкой в покое, поскольку их перемещения ограничены связями. Связи должны:

1. Обеспечить покой сооружения (тела) при произвольной нагрузке.
2. Быть минимальными (а, значит, экономичными) и такими, чтобы их реакции можно было бы вычислить по заданной нагрузке для расчета прочности опор.

Связи, обеспечивающие покой тела при произвольной нагрузке, назовем **абсолютно достаточными**. Согласно второму требованию, среди таких связей нас интересуют **статически определимые** связи, реакции которых однозначно определяются заданной нагрузкой и, значит, исчезают вместе с ней.

Реакции связей будут неопределенными, если среди связей есть **статически неопределимые избыточные** связи, реакции которых могут быть отличными от нуля и произвольными при отсутствии нагрузки. Такие связи возникают при попытке дублирования внутренних связей твердого тела, оставляющих расстояния между точками и углы в теле неизменными.

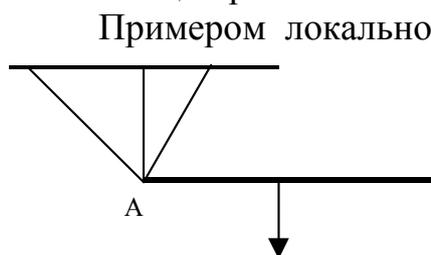


Рис. 1

Примером локально избыточной связи на плоскости могут служить три нити, на конце А стержня (Рис.1). Очевидно, что двух нитей достаточно для фиксации точки на плоскости и одна из нитей просто не будет натянута, однако нельзя определить какая. Поэтому натяжения нитей неопределенны. В то же время, очевидно, что три нити являются недостаточными для равновесия стержня под действием его веса.

Другим примером на плоскости может служить стержень на двух опорах. Если по концам стержня поставить два цилиндрических шарнира (Рис.2 а), то связи будут статически неопределимыми, поскольку мы пытаемся повторно зафиксировать расстояние АВ, неизменное в силу того, что стержень - твердое тело.

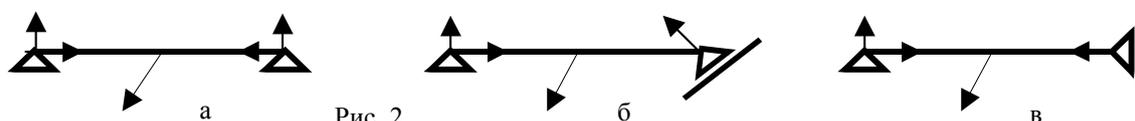


Рис. 2

Действительно, в этом случае произвольные горизонтальные реакции могут возникнуть из-за неточной установки опор и/или нагрева стержня. Этот критерий универсален: если в результате смещения опор или нагрева тела возникают реакции связей, то связи избыточны.

Рассмотренные выше связи станут статически определимыми, если вместо одного из шарниров поставить каток (Рис.2 б). Однако и здесь безразлично, под каким углом наклонить плоскость, по которой скользит опора. Если эта плоскость перпендикулярна стержню (Рис.2 в), то связи становятся недостаточными,

(стержень « проваливается» вниз) и избыточными (повторная фиксация длины стержня) одновременно.

Можно назвать еще два признака избыточности связей:

1. Силы реакции в двух точках имеют общую линию действия.
2. Моменты реакции в двух точках параллельны

Если к телу приварены три стержня, лежащие в одной плоскости, и в точке А тела

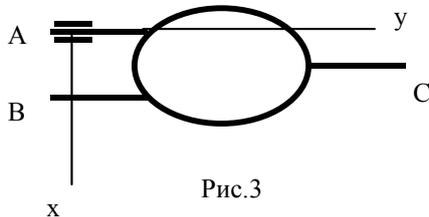


Рис.3

поставлена скользящая заделка, то сила и момент реакций в этой точке лежат в плоскости xz (Рис.3). Значит в точках В и С нельзя ограничивать перемещения вдоль линии АВ, и поворот вокруг любого направления в плоскости xz , иначе возникнут избыточные связи и появятся признаки

1,2.

Математическая сторона вопроса. Статически определимые задачи.

Пусть тело находится в покое под действием пространственной нагрузки и реакций достаточных связей. Требуется найти реакции связей из шести уравнений равновесия.

$$\begin{aligned} V_x^R &= -V_x^A & M_x^R &= -M_x^A \\ V_y^R &= -V_y^A & M_y^R &= -M_y^A \\ V_z^R &= -V_z^A & M_z^R &= -M_z^A \end{aligned}$$

Задача называется **статически определимой**, если уравнения равновесия имеют единственное решение.

Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение, если число неизвестных равно числу независимых уравнений. Отсюда вытекает, что абсолютно достаточные связи должны иметь шесть неизвестных реакций.

Условием независимости уравнений является отличие от нуля определителя матрицы уравнений. В этом случае при отсутствии нагрузки однородная система

$$\begin{aligned} V_x^R &= 0 & M_x^R &= 0 \\ V_y^R &= 0 & M_y^R &= 0 \\ V_z^R &= 0 & M_z^R &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

имеет только тривиальное (нулевое) решение. Но это и значит, что связи статически определимы, поскольку их реакции исчезают вместе с нагрузкой.

Таким образом, задача статически определима, если связи достаточны и статически определимы. Обратим внимание на то, что в примерах Рис.1 и Рис.2с, несмотря на равенство числа неизвестных числу уравнений на плоскости (три), связи являются недостаточными и, одновременно, избыточными. Легко проверить, что в этих примерах уравнения будут линейно зависимыми.

Проверка связей на статическую определимость.

Пусть сконструированы пространственные связи с шестью неизвестными реакциями. Составим уравнения равновесия реакций (1) и вычислим определитель матрицы этой системы. Могут встретиться следующие случаи.

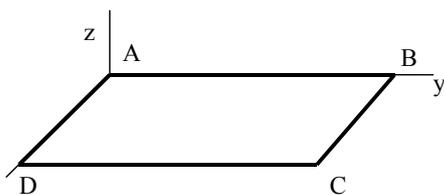
1. В матрице нет нулевых строк. Ее определитель отличен от нуля. Это означает, что связи абсолютно достаточны и статически определимы.

- В матрице нет нулевых строк. Ее определитель равен нулю. Это значит, что уравнения линейно зависимы и несовместны при произвольной нагрузке (нет равновесия). Равновесие возможно, если нагрузка обладает той же линейной зависимостью, что и уравнения. Задача заведомо статически неопределима.
- В матрице есть нулевая строка. Поэтому определитель матрицы равен нулю. Равновесие возможно, если нагрузка отсутствует в той же строке. Задача заведомо статически неопределима.

Примеры конструирования статически определимых связей.

Пример 1

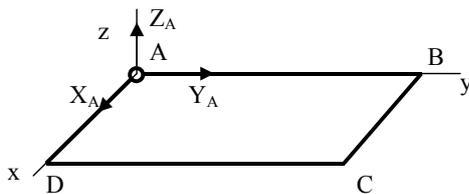
Требуется закрепить прямоугольную пластину ABCD в углах так, чтобы она



оставалась в покое под действием произвольной пространственной нагрузки и реакции связей были статически определимы.

Ясно, что тривиальным является закрепление в одной точке с помощью глухой заделки, поэтому глухие заделки в пространственных задачах не встречаются.

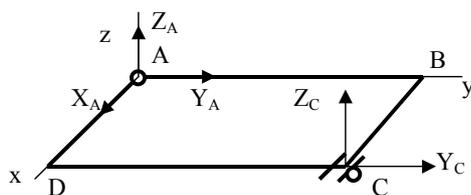
Поставим в точке A сферический шарнир, создающий реакцию с тремя неизвестными координатными составляющими X_A Y_A Z_A .



После этого пластина может вращаться вокруг точки A. Это вращение следует остановить, поставив связи с тремя оставшимися реакциями. Есть соблазн поставить еще один сферический шарнир. Но этого делать нельзя по двум причинам. Связи окажутся избыточными

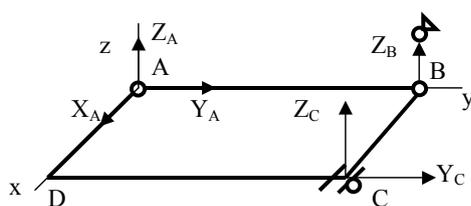
(попытка дважды зафиксировать расстояние AB) и недостаточными (останется возможность пластины поворота вокруг AB).

Поставим в точке C цилиндрический шарнир. Чтобы связь не стала



избыточной, ось шарнира нельзя направлять перпендикулярно линии AC. Пусть ось будет направлена вдоль CB.

Теперь линия AC зафиксирована, но остается возможность поворота пластины вокруг этой прямой. В нашем распоряжении остается всего одна неизвестная, поэтому поставим в точке B стержень. Чтобы он не был избыточным (и в то же время бесполезным для ограничения поворота), стержень



нельзя направить в плоскости пластины. Если его направить вдоль оси z, то полученные связи окажутся достаточными и статически определимыми при любой нагрузке. Это легко проверить, убедившись, что следующие уравнения имеют только нулевое решение

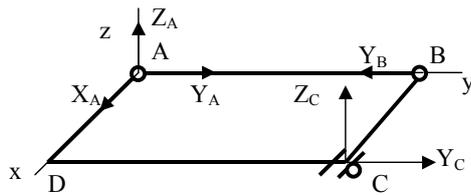
(реакции исчезают вместе с нагрузкой).

$$V_x = X_A = 0$$

$$\begin{aligned}
 V_y &= Y_A + Y_C = 0 \\
 V_z &= Z_A + Z_B + Z_C = 0 \\
 M_x &= Z_B AB + Z_C AB = 0 \quad (2) \\
 M_y &= Z_C AD = 0 \\
 M_z &= Y_C AD = 0
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, что произойдет, если изменить связи.

Сначала направим стержень в плоскости пластины, например, вдоль оси y , создавав заведомо статически неопределимую связь. При этом уравнения (2) примут вид



$$\begin{aligned}
 V_x &= X_A = 0 \\
 V_y &= Y_A - Y_B + Y_C = 0 \\
 V_z &= Z_A + Z_C = 0 \quad (3) \\
 M_x &= Z_C AB = 0 \\
 M_y &= Z_C AD = 0 \\
 M_z &= Y_C AD = 0
 \end{aligned}$$

Четвертое и пятое уравнение стали линейно зависимыми и несовместными, если главные моменты нагрузки относительно осей x и y произвольны:

$$Z_C AB = -M_x^a \quad Z_C AD = -M_y^a$$

Это значит, что связи перестали быть абсолютно достаточными. Равновесие в общем случае невозможно.

Равновесие пластины все-же возможно в частном случае, когда M_x^a и M_y^a будут пропорциональны AB и AD соответственно. Пусть это так, и пластина находится в равновесии (иначе дальнейшие рассуждения теряют смысл). Теперь оставалось пять независимых уравнений. Из этих уравнений вытекает

$$X_A = 0, Y_C = 0, Z_C = 0, Z_A = 0 \text{ и } Y_A - Y_B = 0$$

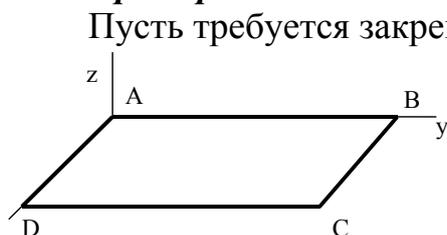
Значит, Y_A и Y_B могут быть произвольными (в зависимости от ошибок в установке опор). Таким образом, связи стали недостаточными для нагрузок, поворачивающих пластину вокруг AC , и избыточными одновременно.

Теперь *уберем стержень*, сделав связи явно недостаточными для нагрузок, поворачивающих пластину вокруг AC . Если таких нагрузок нет, то равновесие сохранится, и связи не будут избыточными.

Если к статически определимым связям *добавить еще какую-либо связь*, то число неизвестных будет больше шести. Задача станет статически неопределимой, поскольку будет допускать произвольное решение (за счет избыточности связей).

Действительно, лишние неизвестные можно просто назначать и присоединять к нагрузке, получая каждый раз новое решение.

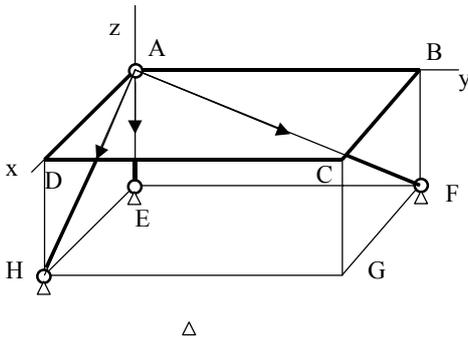
Пример 2



Пусть требуется закрепить прямоугольную плиту $ABCD$ с помощью стержней на шарнирах. Как известно в таком стержне возникает одна реакция, направленная вдоль стержня. Значит необходимо и достаточно поставить шесть стержней, чтобы связи были достаточными для произвольной пространственной нагрузки.

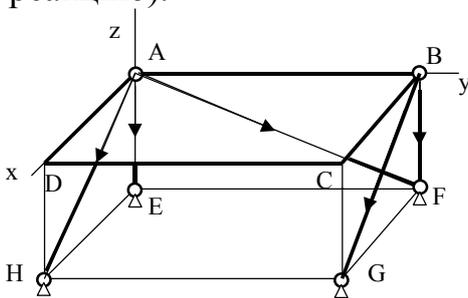
Но сделать это нужно так, чтобы не создать избыточных связей. Локально избыточные связи в точке возникнут, если в ней поставить больше двух стержней в одной плоскости или больше трех стержней в пространстве.

Поставим в точке А три стержня, создающие 3 из шести неизвестных



реакций. Оставшиеся три стержня нельзя поставить в другой точке плиты. Иначе возникнет избыточная связь в результате попытки зафиксировать две точки твердого тела (дублирование внутренних связей тела). Признаком избыточности в этом случае будет возможность совмещения линий действия реакций в двух точках (ведь три стержня в одной точке создают произвольно направленную суммарную

реакцию).

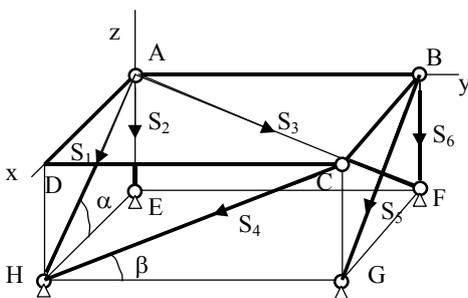


Таким образом в точке В можно поставить только два стержня. Единственным ограничением в направлениях этих стержней является то, что их плоскость не может включать точку А, иначе опять линии действия реакций в точках А и В могут совместиться. Значит, если в точке В один стержень направить вдоль ВЕ, то второй уже нельзя направить по ВF, но можно ВG.

Аналогично в точке С нельзя со стержнем СЕ совмещать стержень СG, но можно СН и СF. В точке D DE нельзя совмещать с ДН, но можно с DG.

Поставим в точке В стержни ВF, ВG.

Теперь точки А и В зафиксированы, но плита может поворачиваться вокруг АВ.



Последний, шестой стержень должен остановить этот поворот. Поэтому он не может лежать в плоскости плиты. В этом случае связи станут недостаточными и, одновременно, избыточными, поскольку перемещения в плоскости плиты уже невозможны. Таким образом, последний стержень может соединять точку С или D с любой точкой нижнего пояса. Поставив стержень СН, мы закончим конструирование достаточных и

статически определимых связей. Легко проверить, что уравнения равновесия реакций связей

$$V_x = S_1 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0$$

$$V_y = S_3 \cos \beta - S_4 \cos \beta = 0$$

$$V_z = S_1 \sin \alpha + S_2 + S_3 \sin \beta + S_4 \sin \beta + S_5 \sin \alpha + S_6 = 0 \quad (4)$$

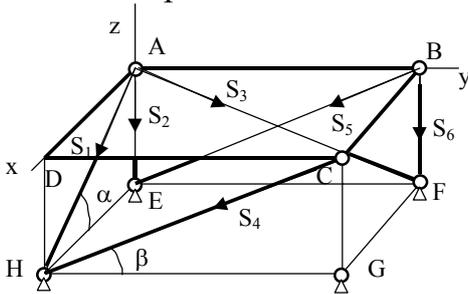
$$M_x = -S_4 \sin \beta \cdot DC + S_5 \sin \alpha \cdot DC - S_6 \cdot DC = 0$$

$$M_y = S_4 \sin \beta \cdot BC = 0$$

$$M_z = -S_4 \cos \beta \cdot BC - S_5 \cos \alpha \cdot DC = 0$$

имеют только нулевое решение, что свидетельствует о статической определимости связей.

Проследим, как изменятся уравнения, если ввести заведомо избыточную связь- стержень BG заменить стержнем BE. Теперь:



$$V_x = S_1 \cos \alpha = 0$$

$$V_y = S_3 \cos \beta - S_4 \cos \beta - S_5 \cos \beta = 0$$

$$V_z = S_1 \sin \alpha + S_2 + S_3 \sin \beta + S_4 \sin \beta + S_5 \sin \beta + S_6 = 0$$

$$M_x = -S_4 \sin \beta DC - S_5 \sin \beta DC - S_6 DC = 0 \quad (5)$$

$$M_y = S_4 \sin \beta BC = 0$$

$$M_z = -S_4 \cos \beta BC = 0$$

Из двух последних уравнений видно, что равновесие возможно только для нагрузки, моменты которой относительно осей y и z соотносятся как $-\tan \beta$. Но даже для такой нагрузки задача будет статически неопределимой, поскольку при $S_4 = 0$ первые четыре уравнения

$$S_1 = 0$$

$$S_3 - S_5 = 0$$

$$S_2 + S_3 \sin \beta + S_5 \sin \beta + S_6 = 0$$

$$S_5 \sin \beta + S_6 = 0$$

(6)

имеют произвольные решения. Действительно, можно произвольно задать S_5 и из уравнений (6) найти тоже произвольные S_3 S_2 S_6

$$S_3 = S_5$$

$$S_2 = S_6 = -S_5 \sin \beta$$

Это показывает, что нарушение правил установки связей приводит к недостаточным и, одновременно, избыточным связям. А правила эти просты.

При установке связи нельзя допускать, чтобы:

1. Реакция новой связи могла иметь общую линию действия с реакциями уже установленных связей.
2. Момент новой связи мог быть параллелен моментам уже установленных связей