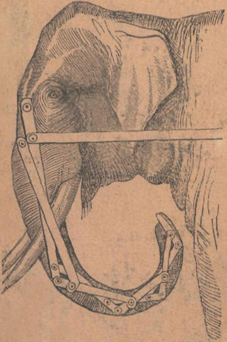
О НѢКОТОРЫХЪ СОЧЛЕНЕНІЯХЪ.



Кандидата князя **А. Гагарина**.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Императорской Академіи Наукъ
Вас. Остр., 9 лин., № 12.)
1880.

О НѢКОТОРЫХЪ СОЧЛЕНЕНІЯХЪ.

Первыя точныя круговыя линейки, точное прямолинейное движеніе, триссекторъ угла, симметрографъ.

Кандидата князя **А. Гагарина.**

Часть этой брошюры была читана авторомъ въ студенческомъ обществѣ Физико-Математиковъ. Аудиторія Физическаго кабинета СПБ. Университета, 3 марта 1879 г.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Императорской Академіи Наукъ

(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

1880.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 14-го декабря 1879 года.

Сочлененія составляются изъ прямолинейныхъ (фиг. 1), или ломанныхъ (фиг. 2) рычаговъ, соединенныхъ шарнирами. Рычаговъ должно быть не менѣе четырехъ для того, чтобы въ сочлененіи могли существовать относительныя движенія. Такія сочлененія съ тремя подвижными стержнями при одномъ неподвижномъ, называются *простѣйшими*. Изъ нихъ обратимъ вниманіе на вывороченный параллелограммъ, составленный только изъ прямыхъ стержней, гдѣ (фиг. 3) $AB = CD$, $AD = CB$ и закрѣпимъ въ немъ CD неподвижно. Если мысленно соединить A съ C прямою, то тотчасъ видно, что треугольники ABE и CDE равны при всѣхъ положеніяхъ AB. Отсюда слѣдуетъ, что $\alpha = \alpha_1$.

Это свойство, что $\alpha = \alpha_1$, навело меня на мысль послѣдовательно соединять такіе параллелограммы, чтобы тѣмъ получить на равныхъ разстояніяхъ рядъ равныхъ угловъ, обращенныхъ въ одну сторону. Два такихъ соединенія дали вездѣ равные углы, въ третьемъ величины послѣднихъ чередуются. Если отдѣльные члены достаточно мелки, то гибкая пластинка, прикрѣпленная къ каждому вывороченному параллелограмму въ какой нибудь одной сходственной во всѣхъ точкѣ, будетъ произвольно мало отличаться отъ круговой дуги постоянной длины, но перемѣннаго радіуса.

Первое сочлененіе получится, если отложимъ на прямой AD (фиг. 3) длину $AH = AB = DC$ (фиг. 4), продолжимъ AB до F такъ, чтобы $AF = AD = BC$ и построимъ на AH и AF такой же вывороченный параллелограммъ $AHGF$. Въ немъ очевидно $\alpha_1 = \alpha_2$. Нужно продолжить построеніе нѣсколькими такими колѣнами. Прикрѣплять гибкую пластинку всего удобнѣе въ точкахъ $a, b, c, \ldots$, или $1, 2, 3 \ldots$, внутри сочлененія. Круговая линейка, гдѣ сочлененія вида фиг. 3, съ одинаковыми углами встрѣчаются черезъ одно, составляется такъ (фиг. 5). Въ ней гибкую пластинку можно прикрѣплять только черезъ колѣно, напримѣръ въ точкахъ $a, b, c \ldots$, или въ $1, 2, 3 \ldots$

Но гораздо замѣчательнѣе получается сочлененіе, если откладывать длину AH не по направленію къ D, какъ въ фиг. 4, а по ту сторону A (фиг. 6). Выходитъ фигура, гдѣ *равные углы прилегаютъ къ концамъ прямой постоянной длины*. Дѣйствительно, треугольникъ ABE равенъ треугольнику CDE по доказанному и еще $\Delta ABF = \Delta HAK$ потому, что въ сочлененіяхъ $ABCD$ и $AFGH$ уголъ $\alpha = \alpha_1$, откуда слѣдуетъ, что эти сочлененія совпадутъ при наложеніи стороны AB на AH. Это видно, если мысленно соединить B съ D и F съ H прямыми. Отсюда выходитъ, что углы β при B и F стороны BF равны. Такимъ образомъ получается сочлененіе со свойствомъ, которое можно эксплуатировать для многихъ цѣлей, напримѣръ строится простѣйшая **круговая линейка** (фиг. 7), или механизмъ, котораго одной **точкѣ** возможно лишь **прямолинейное движеніе** [1]). Для этого стóитъ, напримѣръ,

[1]) Такихъ механизмовъ, по словамъ Профессора Чебышева, до моего насчитывается 47, но принципы, на которыхъ они основаны, совершенно другіе. Поэтому нѣтъ и сходства между ними и моимъ. Общаго въ нихъ только, то, что подвижныхъ частей, какъ въ моемъ, такъ и въ большинствѣ прочихъ — семь.

на сторонахъ BC и BF (фиг. 6) построить параллелограммъ $BCLF$ (фиг. 8). Точка N, двигаясь относительно CL, будетъ всегда на разстояніи отъ BF, равномъ разстоянію CL отъ BF. Значитъ N движется по прямой CL. Наконецъ, можно построить на сторонахъ BE и FN еще параллелограммъ $MNFB$ (фиг. 9). Тогда уже **прямая** MN будетъ **двигаться по прямой** LC [1]). Сочлененія вида фиг. 3, можно еще очень разнообразно соединять, получая напримѣръ спиральныя линейки (фиг. 10) и т. д., но такія лишены интереса.

Другія сочлененія можно составить изъ комбинацій двухъ вида фиг. 6. Такъ являются **симметрографъ** (фиг. 11) и **трисекторъ угла** (фиг. 12, 13, 14). Въ первомъ затушеванная часть служитъ для движенія прямой AB по оси симметріи, а бѣлая располагаетъ оба карандаша симметрично. Во второмъ затушеванная часть удваиваетъ уголъ α, бѣлая его утраиваетъ, такъ что, поставивъ AB и BC подъ даннымъ угломъ, мы этимъ приведемъ BD въ положеніе трети даннаго угла относительно AB.

Теперь я покажу, какъ можно преобразованіемъ вида построить столько-же новыхъ сочлененій, сколько я уже показалъ. Для этого я обобщу первое изъ двухъ предложеній Профессора Чебышева, помѣщенныхъ въ его брошюрѣ «О простѣйшихъ сочлененіяхъ». Въ немъ рѣчь идетъ именно о сочлененіяхъ съ прямыми членами, которыми мы исключительно здѣсь занимаемся.

Возьмемъ четырехъугольникъ (фиг. 15) съ неравными сторонами $ABCD$. [Сторона AD закрѣплена неподвижно] и пока-

[1]) Точное движеніе *прямой* по прямой еще не достигалось ни разу до сихъ поръ столь малымъ (9) числомъ подвижныхъ частей. Minimum было 11. Обыкновенно *было* 15 (Липкинъ).

жемъ, какъ можно замѣнить его другимъ той-же простоты, такъ чтобъ та линія, которая описывалась произвольно заданною точкой E на прямой BC, точно чертилась бы какою нибудь точкой новаго сочлененія. Мы не стѣснимъ движенія частей сочлененія, если прибавимъ $EH = CD$ и $HD = EC$. Продолжимъ HE до F пересѣченія съ мысленной прямой DB. Фигура $ECDHF$ есть пантографъ, гдѣ D неподвижно, точка B чертитъ дугу круга около центра A. Слѣдовательно F чертитъ кругъ съ центромъ G, который найдется на продолженіи AD тамъ, гдѣ эту линію пересѣчетъ FG, параллель къ AB, въ какомъ бы положеніи ни было сочлененіе. Поэтому, стержень FG не стѣснитъ движенія. Три прибавленныхъ подвижныхъ стержня GF, FH, HD составляютъ сами по себѣ простѣйшее сочлененіе (фиг. 16), которое можетъ замѣнить прежнее (фиг. 15), потому что точка E, всегда общая въ нихъ обоихъ, можетъ, въ каждомъ отдѣльно, двигаться только по одной траэкторіи. Значитъ и траэкторія есть одна общая. Профессоръ Чебышевъ это доказываетъ для частнаго случая (фиг. 17) $AB = CD$; $BE = \frac{1}{2} BC$. На основаніи сказаннаго фиг. 3 принимаетъ видъ фиг. 18, фиг. 4 преобразуется въ фиг. 19, а фиг. 8 въ фиг. 20. Тутъ точка A движется по прямой BC. Замѣчу, что въ получаемыхъ фигурахъ два смежныхъ простѣйшихъ сочлененія уже не имѣютъ общихъ членовъ, какъ это было въ первообразныхъ. На каждое новое колѣно круговой линейки, прибавляемое къ сдѣланнымъ, приходится брать четыре члена, вмѣсто двухъ и выходитъ, что у такой линейки членовъ вдвое больше, чѣмъ въ фиг. 4, 5, 7. Также и въ прямолинейномъ движеніи число членовъ значительно больше: 11 вмѣсто 7. Видъ сочлененій менѣе удобенъ для практическаго примѣненія. Поэтому не стану приводить здѣсь, во что преобразуются дальнѣйшія сочлененія.

Мнѣ остается показать интересное свойство, которое я изслѣдовалъ въ круговыхъ линейкахъ. Помощью ихъ можно *опредѣлять графически значеніе интеграла*

$$\int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx$$

для какихъ угодно вещественныхъ предѣловъ, между тѣмъ, какъ математика даетъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin cx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

лишь для предѣловъ o и ∞. Чтобы доказать это, опредѣлимъ кривую, чертимую однимъ концомъ линейки, когда другой закрѣпленъ неподвижно. Получится спираль (фиг. 21). Ея уравненіе найдется изъ слѣдующаго. Постоянная длина, равная единицѣ, гнется въ дугу круга перемѣннаго радіуса, но остается всегда касательною къ постоянной прямой OA въ точкѣ O. Поэтому всегда центръ линейки будетъ на $OR \perp OA$. Соединимъ O съ M. Перпендикуляръ CK къ серединѣ OM опредѣлитъ этотъ центръ. Теперь имѣемъ для дуги OKM, что

$$2\varphi r = 1,$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{2r},$$

но изъ треугольника CBM

$$r = \frac{\rho}{2} \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Значитъ

$$\varphi = \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

или

$$\rho = \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Это есть *уравненіе кривой*. Интересно, что измѣненіе ρ въ зависимости отъ φ не слѣдуетъ порядку черченія кривой моею линейкой. Такъ, въ то время, какъ линейка чертитъ сперва одну половинку кривой, а потомъ переходитъ на другую сторону прямой OA, связь ρ съ φ переходитъ отъ вѣтви M къ вѣтви N, потомъ къ I, къ F, и т. д. Въ отрицательную сторону связь ρ съ φ ведетъ отъ G къ L, потомъ къ E, къ H и т. д.

Сумма площадей, очерченныхъ всею кривою есть.

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2 d\varphi = 2\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\rho^2 d\varphi = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi = -\int_0^{\infty}\sin^2\varphi d\,\frac{1}{\varphi} =$$

$$= \left(\frac{1}{\varphi}\sin^2\varphi\right)_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\varphi} = \int_0^{\infty}\frac{\sin 2\varphi d\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

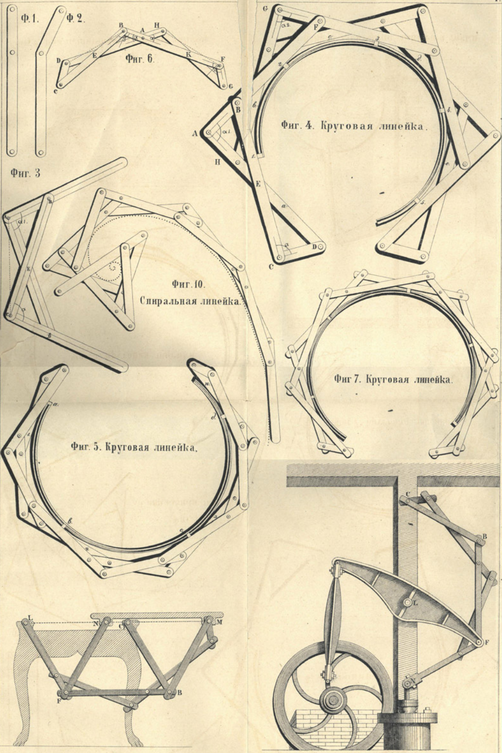
Итакъ

$$u = \frac{\pi}{2}$$

т. е. сумма всѣхъ площадей, очерченныхъ всѣми оборотами безконечной кривой, стремящейся къ асимптотической точкѣ O съ двухъ сторонъ, равна площади полукруга, радіуса, равнаго единицѣ. Если-же линейкой очертимъ долю спирали между произвольно данными предѣлами α и β для угла φ, то измѣримъ получившеюся секторьяльною площадью величину интеграла:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin 2\varphi d\varphi}{\varphi}$$

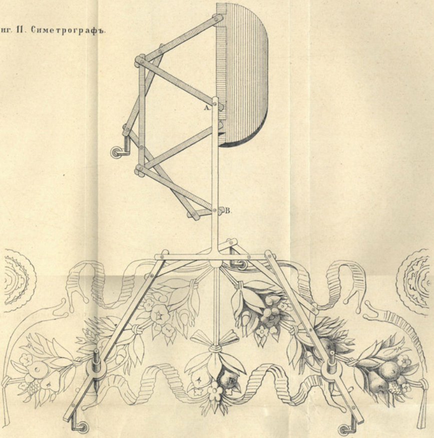
для этихъ предѣловъ α и β.



Фиг. 9. Прямолинейное движенiе прямой.

Фиг. 8. Прямолинейное движенiе точки.

Фиг. 11. Симетрографъ.



Фиг. 12. Триссекторъ угла.