

547272
го *на добруо пам'яць оцъ
автора.*
Траду Сергію Юсєвичу Витте

БИБЛИОТЕКА Гр. С. Ю. ВИТТЕ.
Шкафъ *13*
Полка *7*
№ *207*

ПРИБОРЫ,

ЮЩЕ ЗАВИСИМОСТЬ

МЕЖДУ

УСИЛИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

ВО ВРЕМЯ УДАРА.

ДИССЕРТАЦІЯ,

ПРЕДСТАВЛЯЕМАЯ НА СОИСКАНИЕ СТЕПЕНИ
аДЪЮНКТА СПБ. ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА ПЕТРА ВЕЛИКАГО.

Князя Андрея ГАГАРИНА,

бывшаго директора этого Института.

547272



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

1912.

ИЮЛ 1947

ПРОВЕРЕНО
1955 г.

ФБ СПбГУ



0000524837

БИБЛИОТЕКА ГР. С. Ю. ВИТТЕ
№ ~~1876~~ 1844

ПО КАТОЛОГУ

ШКАФЪ 13

ПОЛКА 7

№ 207

ПРИБОРЫ,
ДАЮЩЕ ЗАВИСИМОСТЬ
МЕЖДУ
УСИЛИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ
ВО ВРЕМЯ УДАРА.

ДИССЕРТАЦИЯ,
ПРЕДСТАВЛЯЕМАЯ НА СОИСКАНИЕ СТЕПЕНИ
а д ъ ю н к т а С П Б . П о л и т е х н и ч е с к о г о И н с т и т у т а
И м п е р а т о р а П е т р а В е л и к а г о .

Князя Андрея ГАГАРИНА,
бывшаго директора этого Института.

547272



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1912.

ИМПЕРАТОРСКАЯ ТЕЛЕГРАФНАЯ
КАНИЦА
№ 1000
ВЪ КИЕВѢ
1874
АВГУСТЪ
10

ПРИЛОЖЕНІЕ

ДВОЮЖЕ ЗАБІВАНІЕ

УСНОВАНІИ И ДЕФОРМАЦІИ

ВО ВРЕМЯ УДАРА



КИЕВЪ АКАДЕМІИ НАУКЪ

ОГЛАВЛЕНІЕ.

	<i>Стр.</i>
Предисловіе	1
§ 1. Описаніе прибора съ упругимъ динамометромъ	2
§ 2. Труба-динамометръ	9
§ 3. Неупругія ея части	16
§ 4. Упругая ея часть	20
§ 5. Коэффициентъ упругости и скорость распространенія продольныхъ колебаній	20
§ 6. Сжимающее усиліе, отвѣчающее продольному изгибу	22
§ 7. Наибольшая допустимая высота бросанія бабы	25
§ 8. Тарировка прибора	26
§ 9. Абсциссы	26
§ 10. Ординаты	29
§ 11. Заводская ударная проба	33
§ 12. Опыты при участіи барабана Morin'a	42
§ 13. Траекторія бабы на немъ	48
§ 14. Траекторія наковальни на немъ	49
§ 15. Приближенный способъ St. Venant опредѣленія траекторіи бабы и наковальни	51
§ 16. Строго математическое рѣшеніе Navier задачи свободныхъ продольныхъ колебаній	55
§ 17. Рѣшеніе посредствомъ прерывистыхъ функций	56
§ 18. Рѣшеніе въ видѣ ряда гармоническихъ выраженій	62
§ 19. Вынужденныя продольныя колебанія. Способъ А. Н. Крылова	74
§ 20. Sagau & Vielle. Рѣшеніе уравненія движенія	78
§ 21. Крыловъ. Сосредоточеніе давленія на верхнюю площадку	82
§ 22. Предположеніе, что вѣшняя сила пропорціональна опусканію бабы	87
§ 23. Смѣшанныя колебанія	92
§ 24. Синтезъ нулевой ординаты и всей діаграммы	110
§ 25. Свободныя колебанія иглы	114
§ 26. Часть общая для всѣхъ методовъ ихъ нахожденія	117
§ 27. Методъ Кирхгофа	120
§ 28. Условія закрѣпленія	127
§ 29. Тонкій конецъ свободенъ	129

	<i>Стр.</i>
§ 30. Основаніе подперто	130
§ 31. Основаніе задѣлано	133
§ 32. Амплитуда колебаній при предѣлѣ упругости	135
§ 33. Методъ Крылова отысканія элементовъ свободныхъ попере- чныхъ колебаній	141
§ 34. Амплитуда колебаній иглы при предѣлѣ упругости	146
§ 35. Точка отправленія для вычисленій по Крылову	146
§ 36. Методъ В. А. Стеклова	150
§ 37. Условія закрѣпленія	159
§ 38. Форма, въ какую изгибается ось иглы при основномъ топѣ ея свободныхъ колебаній	164
§ 39. Разложеніе Б. Л. Сушенковымъ фундаментальнаго урав- ненія въ рядъ Mac Laurin	165
§ 40. Форма изгиба оси при основномъ топѣ	174
§ 41. Предѣленіе масштаба амплитуды при предѣлѣ упругости	176
§ 42. О методахъ Ritz'a и Тамаркина	181
§ 43. Переходъ къ неупругому динамометру	183
§ 44. Послѣдній типъ прибора	190

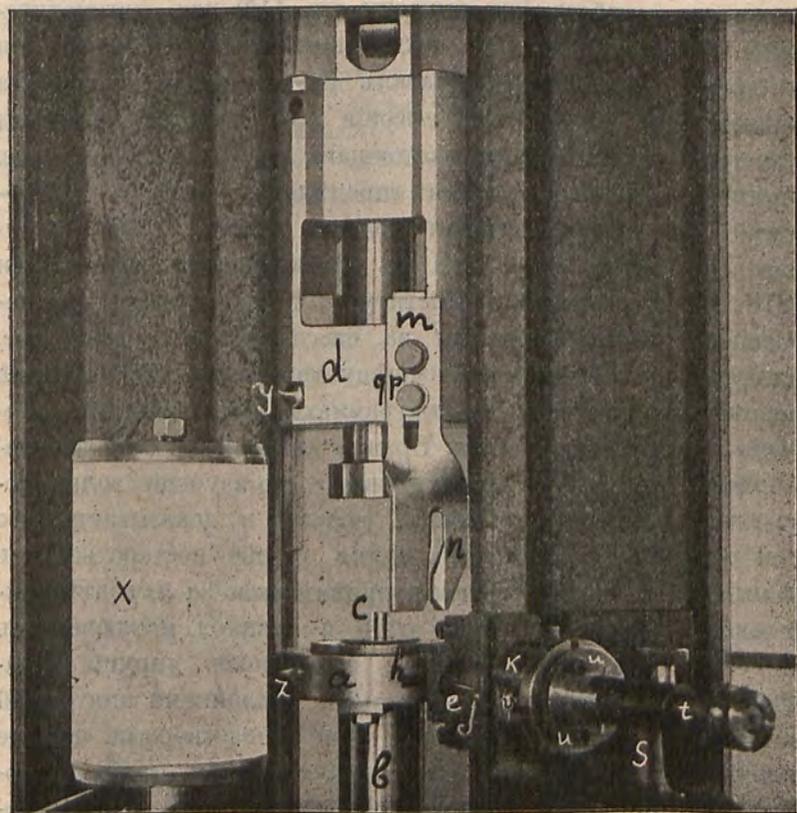
Предисловіе.

Въ 1904 году мною впервые былъ надуманъ и дешево построенъ приборъ (см. выноску стр. 112) для автоматической записи зависимости между усиліями и деформациями во время удара. Приборъ давалъ діаграммы одинаковыя для одинаковыхъ матеріаловъ. высокія для твердыхъ, длинныя для вязкихъ. Въ началѣ настоящаго труда показано, какъ достигнуты количественныя опредѣленія усилій и деформаций (фиг. 4) при помощи прибора (фиг. 1), пристроеннаго къ копру Amsler'a въ Механической лабораторіи СПБ. Политехническаго Института. Приборъ даетъ для заводской пробы діаграммы на сжатіе и на изгибъ, т.-е. иллюстраціи особенностей изслѣдуемаго матеріала. Но кромѣ искомой зависимости на діаграммахъ записываются колебанія динамометра и иглы. Правда, въ волнахъ есть закономерность, которую глазъ учитываетъ, но изученіе волнъ доказываетъ огромную сложность вопроса и доказываетъ, что при теперешнемъ состояніи науки лучше постараться отъ волнъ вовсе отказаться, чѣмъ приниматься за ихъ дѣйствительный учетъ. Вслѣдствіе этого я занялся исключеніемъ всего, что можетъ вибрировать, и замѣнилъ упругій динамометръ неупругими крешерными столбиками ничтожной массы. Полученные результаты меня удовлетворили, но еще далеки отъ заводской пробы и я желалъ бы, чтобы въ достиженіи этой пробы мнѣ помогли свѣжія силы заинтересовавшагося читателя. Свою работу я производилъ въ механическихъ лабораторіяхъ СПБ. Политехническаго Института и Артиллерійской академіи съ разрѣшенія профессоровъ С. И. Дружинина и покойнаго Н. А. Фролова. Среди многихъ лицъ я находилъ живое сочувствіе и содѣйствіе. По-

зволюю себѣ привести имена Л. В. Касперовскаго, А. В. Попова, К. Э. Рериха, Ю. С. Сикорскаго, Б. Л. Сушенкова, Я. Г. Усачева и Я. М. Хлытчиева.

§ 1. Описание прибора съ упругимъ динамометромъ.

Между станинами копра Amsler'a къ его основанію при помощи прочныхъ чугунныхъ накладокъ въ мертвую прикрѣпленъ не показанный на чертежѣ нижній фланецъ вер-

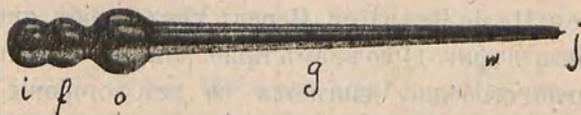


Фиг. 1.

тикальной стальной трубы—динамометра *b* (фиг. 1). Верхній фланецъ этой трубы охватенъ наковальней *a* туго натуго. Своими [выступами наковальня охватываетъ съ минималь-

нымъ зазоромъ ведущія части станинъ копра и можетъ двигаться только на одинъ—два миллиметра вверхъ и внизъ вмѣстѣ съ верхнимъ фланцемъ во время продольныхъ колебаній динамометра. Къ наковальнѣ при помощи кольца сверху прижата каленая стальная круглая плитка, на которую ставится испытуемый образецъ *c*. Баба *d* вѣсомъ 12.591 граммъ падаетъ на него. Посмотримъ, что происходитъ послѣ момента прикосновенія ея къ образцу.

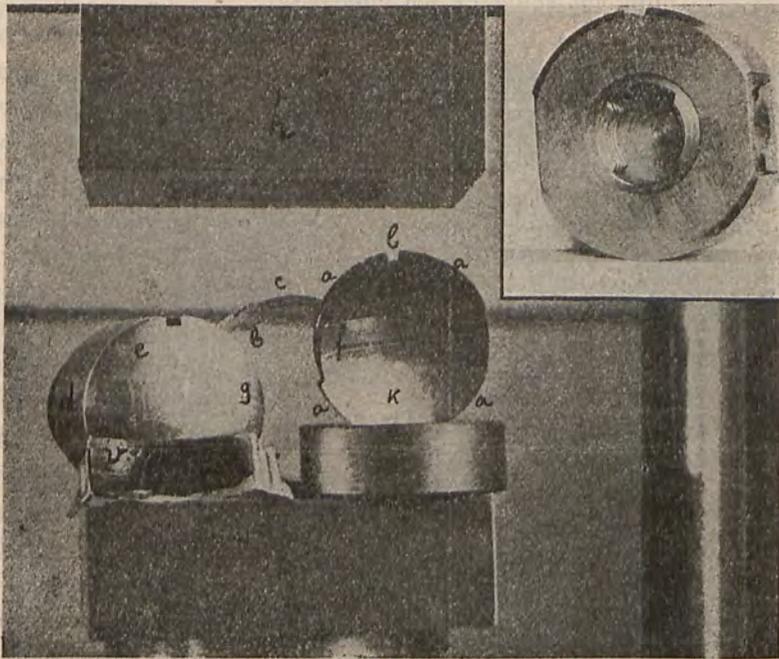
Разстояніе между бабой *d* и наковальней *a* уменьшается потому, что образецъ *c* сплющивается. Но въ то же время сама наковальня *a* опускается, потому что стоитъ на пружинящей трубкѣ-динамометрѣ *b*, сокращающейся подъ давленіемъ удара. Рядомъ къ станинѣ копра привинченъ кронштейнъ *r*, на которомъ неподвижно укрѣплены шаровой подшипникъ *e* и стойка *S* съ горизонтальнымъ цилиндрическимъ каналомъ, въ которомъ помѣщается оправка *t*. Оправку можно подвинуть по каналу впередъ, пока она не упрется въ *S* своими задними останочными гайками, регулированными такъ, чтобъ при этомъ игла *j* писала съ удобнымъ нажимомъ по чашѣ *K*. Въ этомъ положеніи оправку зажимаютъ въ трубкѣ *S* верхнимъ винтомъ. Послѣ опыта этотъ винтъ освобождаютъ и оправку *t* двигаютъ назадъ до останова. Тогда разстояніе между иглой и чашей становится большое, можно чашу отнять, смѣнить свинцовый листъ *v* и т. д. Вращаться оправка въ трубкѣ не можетъ благодаря шпонкѣ. Въ подшипникѣ *e* гнѣздится *o* (фиг. 2) самый боль-



Фиг. 2.

шой изъ трехъ шариковъ, выточенныхъ изъ одного куска съ иглой, на которую они какъ бы насажены. Около центра этого шарика *o*, ближайшаго къ жалу *j* иглы *g*, только и можетъ двигаться игла *g*.

Оправка *t* направлена къ шарикѣ *o* и кончается круглой площадкой, въ центрѣ которой утопленъ винтъ съ шаровой головкой, а близь окружности звѣздой расположены три опорныхъ винтика *и, и, и*. Ими регулируется и устанавливается, а центральнымъ притягивается и закрѣпляется винтовой поршень, на который насаживается стальная чаша *k* (фиг. 3 картушь) по принципу орудійнаго поршневого за-



Фиг. 3.

твора Treuille de Beaulieu. Передъ тѣмъ, чтобъ привинтить кронштейнъ *r* (фиг. 1) со всѣмъ приборомъ къ станинѣ копра и пока игла свободно двигается во все стороны вокругъ центра *o*, мы отъ руки заставляемъ ее чертить по всѣмъ мѣстамъ чаши, регулируя положеніе послѣдней винтами *и, и, и* и закрѣпляя ее, когда игла чертитъ во всѣхъ мѣстахъ чаши съ постояннымъ нажимомъ. Приспособленіе Treuille de Beaulieu обезпечиваетъ возможность, не сбивая регулировки, быстро отнимать чашу и быстро ее устанавливать на

оправкѣ однимъ движеніемъ съ сохраненіемъ каждый разъ безъ качки центральности установки, сохраненіемъ однихъ и тѣхъ же разстояній и поворота на одинъ и тотъ же постоянный уголъ около осн оправки. Сторона стальной чаши k , обращенная къ иглѣ, расточена по сферѣ съ центромъ, по возможности совпадающимъ съ центромъ шарика o и его подшипника e и отполирована. На пересѣченіи чаши съ ея осью при изготовленіи на токарномъ станкѣ сдѣлана кернеромъ едва замѣтная ямочка. Привинчиваемъ слегка кронштейнъ r къ станинѣ копра, наблюдая, чтобъ при этомъ шарикъ i (фиг. 2) взошелъ въ прорѣзь h наковальни a (фиг. 1). Закрѣпляемъ винтами кронштейнъ r , на такой высотѣ, чтобъ жало иглы въ точности попадало въ указанный кернъ. Это доказываетъ, что подшипникъ e находится какъ разъ на высотѣ прорѣзи h наковальни и игла расположилась въ горизонтальной плоскости, когда нашъ динаметръ b находится безъ нагрузки въ погoбъ. Если баба съ вилкой приподнята и не мѣшаетъ, мы можемъ шарикъ i свободно двигать по прорѣзи h рукою. Тогда игла, двигаясь около центра шарика o въ горизонтальной плоскости, будетъ жаломъ j чертить на сферѣ ось абсциссъ (деформацій), въ видѣ дуги большого горизонтальнаго круга (экватора), такъ какъ вся игла при этомъ находится въ плоскости этого круга. Необходимое нажатіе иглы даже при нѣкоторомъ несовпаденіи центра ея движеній съ центромъ шаровой впадины k обезпечивается тѣмъ, что жало j иглы сдѣлано подвижнымъ и подпирается спиральной пружинкой, скрытой въ иглѣ g . Зазоръ вокругъ жала ничтоженъ, качки нѣтъ и пришлось позади задняго срѣза жала просверлить въ иглѣ по радіусу каналчикъ w для сообщенія атмосфернаго давленія, чтобъ жало легко двигалось (фиг. 2). Шарикъ i иглы g можетъ двигаться въ горизонтальной прорѣзи h наковальни a лишь съ самымъ небольшимъ зазоромъ. Опусканіе наковальни тянетъ за собою внизъ этотъ шарикъ i , такъ что на загрунтованной поверхности чаши получается свѣтлая линія, поднимающаяся вертикально вверхъ.

Въ бабѣ *d* (фиг. 1) укрѣплена вертикальная направляющая шпонка. По ней можно перемѣщать вилку *m* съ прорѣзью *n*. Въ этой прорѣзци мы наблюдаемъ четыре участка: 1) нижнее устье; 2) нижній вертикальный участокъ; 3) на цилиндрической части вилки винтовой участокъ и 4) вертикальный верхній участокъ. На вилкѣ *m* нарѣзанъ нониусъ *p* противъ миллиметровой шкалы *q* на бабѣ *d*. Нуль шкалы поставленъ такъ, что когда вилка на немъ установлена и двумя винтами прикрѣплена къ бабѣ, а баба опущена непосредственно на наковальню *a*, прорѣзь вилки сперва устьемъ, потомъ нижнимъ вертикальнымъ участкомъ охватываетъ третій шарикъ *f*, находящійся на иглѣ между шариками *o* и *i*, и останавливается какъ разъ на переходѣ къ винтовому участку прорѣзи вилки, имѣющей постоянный шагъ $14^{\circ}, 185$. Вообще же мы всегда устанавливаемъ посредствомъ нониуса *p* вилку точно на высотѣ, равной высотѣ столбика, который хотимъ испытать, и этимъ обеспечиваемъ, чтобъ винтовой участокъ прорѣзи началъ отклонять иглу въ бокъ какъ разъ въ моментъ прикосновенія бабы къ образцу. Ось винтовой прорѣзи вертикальна и проходитъ черезъ центръ большого шарика *o*.

Когда игла горизонтальна, центръ шарика *f* приходится близъ наружной цилиндрической поверхности вилки. При ея наибольшихъ отклоненіяхъ вверхъ и внизъ шарикъ касается прорѣзи близъ внутренней цилиндрической поверхности вилки. Разстояніе между центрами шариковъ *f* и *o* иглы равно 0,768 сант. Наибольшія отклоненія иглы вправо и влево при переходѣ шарика *f* изъ нижняго вертикальнаго участка въ верхній черезъ винтовой, составляютъ $\pm 20^{\circ}$, между тѣмъ какъ чаша имѣетъ поля въ 8° , чтобъ съ нею жало не соскакивало, и ея центральный уголъ составляетъ $\pm 28^{\circ}$ во все стороны. Прорѣзь вилки обработана боковою поверхностью горизонтальной цилиндрической шарошки, которой діаметръ равенъ діаметру шарика *f* съ самымъ ничтожнымъ припускомъ на зазоръ, чтобъ шарикъ *f* нигдѣ не заземляло. Уменьшающееся разстояніе между бабой и наковальной заставляеть остріе иглы

чертитъ на сферѣ горизонтальную дугу круга слѣва направо.

На страницѣ 8-й мы видѣли, что въ вилкѣ есть мѣсто, гдѣ прямой вертикальный участокъ прорѣзи рѣзко переходитъ въ спиральный съ постояннымъ шагомъ $14^{\circ}, 185$. Игла находится въ покоѣ и конецъ ея направленъ въ начало координатъ диаграммы, пока по шарикѣ f скользить, опускаясь, вертикальный участокъ прорѣзи вилки. Но когда вмѣсто него пишку f начинаетъ направлять спиральный участокъ, игла мгновенно получаетъ горизонтальное движеніе по оси абсциссъ, близкое къ равномерному съ угловой скоростью:

$$w_1 = 377,5 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}} \times \frac{2\pi}{14,185 \text{ сант.}} = 167,2 \text{ 1/сек.} = 9580^{\circ} \text{ въ сек.,}$$

или $n_1 = 160$ оборотовъ въ минуту. Здѣсь $377,5 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$ есть скорость бабы въ моментъ $t=0$ прикосновенія къ наковальнѣ (§ 13). Принято думать, что баба и наковальня, когда между ними ничего не положено, при ударѣ составляютъ какъ бы одно, пока баба не взлетитъ. Мы здѣсь пока можемъ допустить, что на это время относительное движеніе между ними прекращается, что сразу прекращается и горизонтальное перемѣщеніе иглы. Въ то же мгновеніе динамометръ начинаетъ сжиматься и въ траекторіи жала иглы происходитъ крутой изгибъ и тогда угловая скорость перемѣщенія иглы вверхъ при вычерчиваніи любой ординаты сѣтки казалось бы. составляетъ сразу:

$$w_2 = \frac{377,5 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}}{1,218 \text{ сант.}} = 309,93 \text{ 1/сек.} = 17761^{\circ} \text{ въ секунду,}$$

или $n_2 = 296$ оборотовъ въ минуту (здѣсь 1,218 есть разстояніе между центрами шариковъ o и i ; фиг. 2). На самомъ же дѣлѣ скорость наковальни слѣдуетъ закону § 14. Если на наковальню поставленъ образецъ изъ мягкаго матеріала, разстояніе между бабой и наковальной уменьшается во время удара, игла отходитъ вправо. Сочетаніе обоихъ движеній, вертикальнаго (стр. 5) и горизонтальнаго и даетъ на сферѣ

искомую кривую зависимости между усилиями и деформациями во время удара въ косоугольныхъ и криволинейныхъ координатахъ (фиг. 4). Въ приборъ еще желательно ввести элементъ времени и измѣрять по крайней мѣрѣ стотысячныя доли секунды.



Фиг. 4.

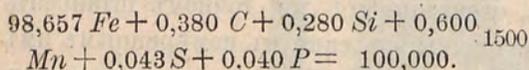
Для этого мы первоначально пробовали примѣнить способъ колебательнаго разряда, иглу не доводить до прикосновенія съ чашей на ничтожную величину и во время опыта испускать изъ нея искры черезъ каждыя 0,00002 секунды. На загрунтованной поверхности чаши мы надѣялись получить діаграмму въ видѣ свѣтлаго пунктира съ точками черезъ каждыя 0,00002 сек. Удачи не послѣдовало, потому что изъ иглы искры разбрасываются впередъ и назадъ и въ стороны и не слѣдуютъ по кратчайшему разстоянiю, ударяясь въ вогнутую поверхность чаши такъ, что пунктиръ не даетъ точной формы искомой кривой, да и сужденiе о времени метнувшихся впередъ, или назадъ искръ получается не вѣрное. Кромѣ того, установка этого способа капризна и зависитъ отъ влажности воздуха. Второй способъ состоитъ изъ опредѣленiя на особомъ хронографѣ время пересѣченiя траекторiею иглы веѣхъ линiй координальной сѣтки, выгравированныхъ на чашѣ и заполненныхъ изолирующимъ веществомъ. Этотъ методъ требуетъ осуществленiя хронографа, записывающаго миллионныя доли секунды. Надъ его разработкою трудимся В. О. Миткевичъ, А. А. Гершунъ и я. Третiй способъ описанъ здѣсь § 24. Наконецъ, четвертый

неожиданный (§ 44) появился попутно, когда о нем не думали.

§ 2. Труба-динамометръ.

Главная часть нашего прибора — труба-динамометръ — требует изслѣдованія, съ котораго теперь и начнемъ.

Приготовлена труба изъ снарядной стали Обуховскаго завода, каленой въ маслѣ. Химическій ея составъ, опредѣленный А. А. Байковымъ, слѣдующій:

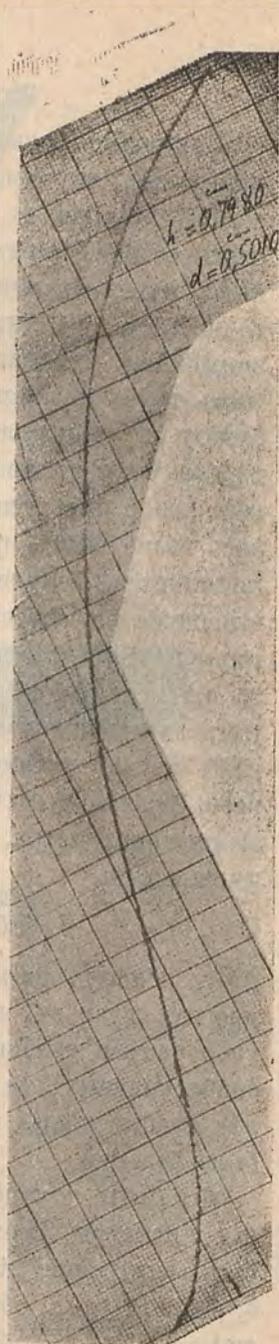


Предѣлъ упругости этой стали (фиг. 5) опредѣлялся проведеніемъ касательной къ діаграммѣ, полученной при сжатіи на моемъ крешерномъ прессѣ ¹⁾ столбика этой стали высотой $h = 0^c,798$, діаметромъ $d = 0^c,501$ и площадью сѣченія $0^c^2 197136$. Касательная расходится съ кривой на высотѣ 1210 kg., соответствующей давленію въ

$$\frac{1210}{0,197136} = 6150 \text{ klg.}$$

на кв. сант. или 6038.10^6 динамъ на кв. сант.

¹⁾ Крешерный прессъ князя Гагарина Артиллерійскій журналъ. 1901 г., № 6.



Фиг. 5.

Размѣры динамометра.

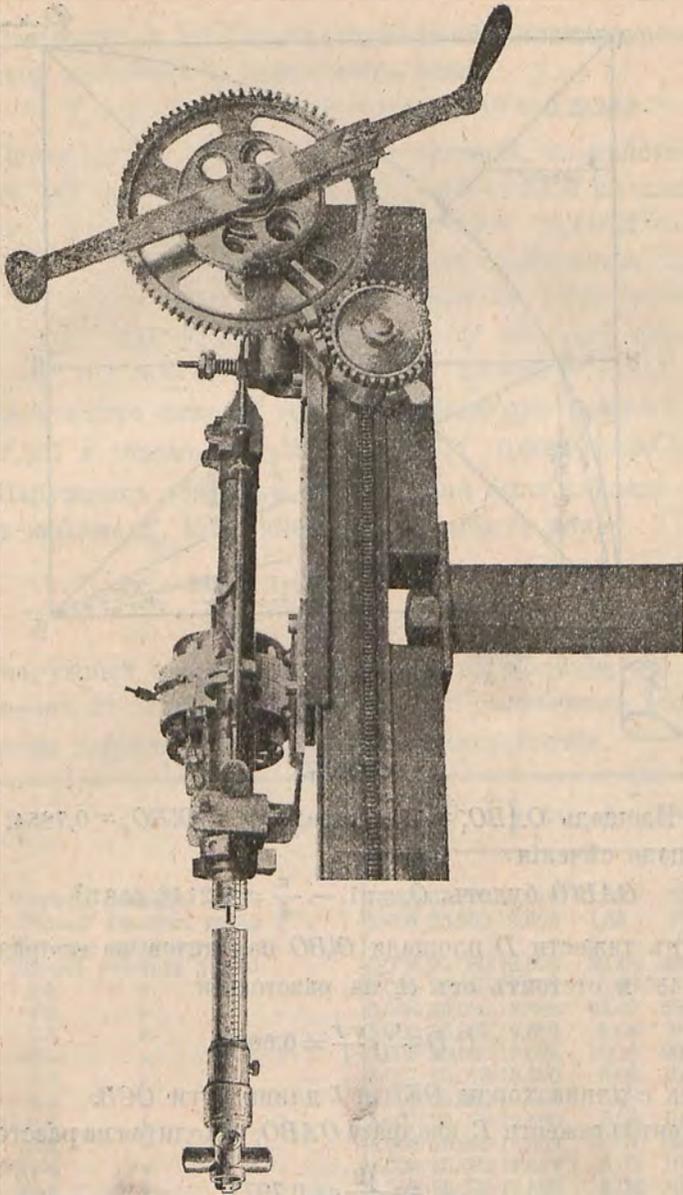
Наружные размѣры черезъ каждые 2" сняты штангенъ-циркулемъ, внутренніе—черезъ каждый дюймъ автографическою звѣздкою В. Н. Михаловскаго ¹⁾ (фиг. 6). Размѣры сняты въ С.П.В. Орудійномъ заводѣ въ двухъ перпендикулярныхъ меридіональныхъ плоскостяхъ для опредѣленія эллиптичности поперечныхъ сѣченій. Общую длину динамометра за неизмѣнимъ длиннаго штангенъ-циркуля я опредѣлилъ, положивъ трубу на листъ безконечной клѣтчатой миллиметровой бумаги и установивъ одинъ ея конецъ при помощи лупы на цѣломъ второстепенномъ дѣленіи бумаги. Отсчетъ съ другого конца при помощи лупы и бумажнаго нониуса оказалось возможнымъ произвести съ точностью до одной десятой миллиметра. Полученную длину 144,09 сант. я умножилъ на отношеніе размѣровъ, отсчитанныхъ на точномъ штангенъ-цикулѣ Société Genevoise 24,939 сант. къ измѣреннымъ имъ 25^с клѣтчатой бумаги. Измѣренія дѣлались штангенномъ въ томъ же продольномъ направленіи бумаги, въ какомъ лежалъ на ней динамометръ, но въ разныхъ мѣстахъ около него. Усадка бумаги оказалась постоянною на всемъ протяженіи динамометра, котораго длина такимъ образомъ опредѣлилась въ

$$\frac{24,939}{25,000} 144,09 = 143,738 \text{ сант.}$$

Этотъ обмѣръ, какъ и предшествующіе, былъ сдѣланъ послѣ многихъ ударовъ, которыми динамометръ былъ нѣсколько укороченъ и утолщенъ. Удары были предѣльные (§ 7) и болѣе сильныхъ не предполагается давать динамометру. Болѣе слабые удары не деформировали его, хотя число ихъ было большое.

Фланцы динамометра имѣютъ высоты по 1^с,000, наружные діаметры верхній $d_1 = 7,988$ сант., нижній $d_2 = 7,986$ сант., внутренніе діаметры верхній $\delta_1 = 4,3815$ сант., нижній $\delta_2 = 4,3613$ сант., объемы верхняго 35,037 см³, нижняго 35,152 см³.

¹⁾ Журналъ комиссіи, назначенной приказомъ по Михайловской Артиллерійской Академіи отъ 13-го мая 1908 г. за № 87.



Фиг. 6.

Закругленія перехода отъ трубы къ фланцамъ обмѣ-
рены по гипсовымъ слѣпкамъ. Ихъ радіусы $r_1 = 0,206$ сант.
и $r_2 = 0,241$. Пока разберемъ для $r = 1$. (Фиг. 7).

Разстояніе f_3 этого центра тяжести отъ цилиндрической наружной поверхности динамометра равно

$$f_3 = 1 - 1,0991 \cos 45^\circ = 1 - 0,77718 = 0,22282.$$

Переходя отъ радіуса, равнаго единицѣ, къ дѣйствительнымъ, мы найдемъ для верхняго закругленія площадь сѣченія $= 0,206 \cdot 0,2146 = 0,009107$; $f = 0,206 \cdot 0,22282 = 0,0459$. Разстояніе центра тяжести F отъ оси динамометра $2,503 + 0,046 = 2,549$. Объемъ закругленія равно $2\pi \cdot 2,549 \cdot 0,009107 = 0,14586$. Для нижняго закругленія площадь сѣченія $= 0,241 \cdot 0,2146 = 0,012464$; $e = 0,241 \cdot 0,22282 = 0,0537$. Разстояніе центра тяжести отъ оси динамометра $= 2,503 + 0,054 = 2,557$ и объемъ закругленія $2\pi \cdot 2,557 \cdot 0,009107 = 0,14631$.

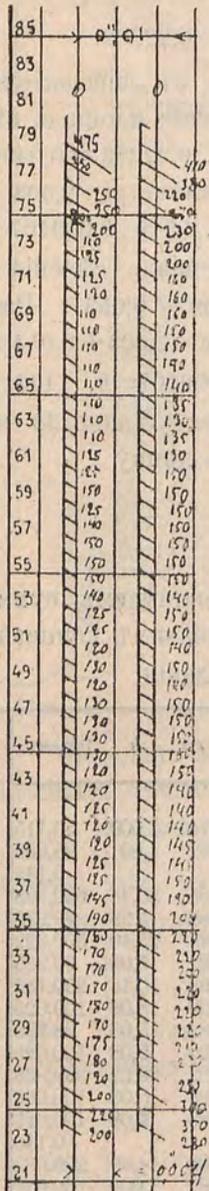
Наружныхъ обмѣровъ трубы нами было сдѣлано 28 черезъ каждые 2". Концевые участки имѣютъ длину

$$\frac{143 - 2 \cdot 1 - 27 \cdot 2,54 \times 2}{2} = 2^\circ 25.$$

За наружный объемъ динамометра мы принимаемъ сумму объемовъ 27 цилиндровъ высотой по 2", прибавимъ концевые участки длиной по 2", фланцы и закругленія.

	D .	D^2 .	$\frac{\pi}{4} D^2$	h	Объемъ.
Верхній фланецъ	7,988	63,808	50,1147	1,000	50,115
Первый участокъ трубы	5,006	25,060	19,682	4,83	95,064
Верхнее закругленіе					0,146
Второй участокъ трубы	5,008	25,080	19,698	30,48	600,395
3-й > >	5,006	25,060	19,682	5,08	99,985
4-й > >	5,008	25,080	19,698	25,40	500,329
5-й > >	5,006	25,060	19,682	5,08	99,985
6-й > >	5,008	25,080	19,698	10,16	200,132
7-й > >	5,007	25,070	19,690	5,08	100,025
8-й > >	5,006	25,060	19,682	5,08	99,985
9-й > >	5,007	25,070	19,690	5,08	100,025
10-й > >	5,006	25,060	19,682	20,32	399,938
11-й > >	5,008	25,080	19,698	5,08	100,066
12-й > >	5,007	25,070	19,690	5,08	100,025
Нижнее закругленіе					0,146
13-й участокъ трубы	5,006	25,060	19,682	14,99	295,033
Нижній фланецъ	7,986	63,675	50,081	1,000	50,081
Итого	—	—	—	143,74	2891,475

На фигурѣ 8 воспроизведена діаграмма звѣздки В. Н.



Фиг. 8.

Михаловскаго внутреннихъ обмѣровъ динамометра черезъ каждый дюймъ въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ меридіальныхъ плоскостяхъ. Для каждого сѣченія къ постоянной величинѣ $4^{\circ},36$ надо прибавлять переменную длину горизонтальной проекціи штриховъ, уменьшенной до натуральной величины на основаніи масштаба, въ которомъ она увеличена. Для каждого сѣченія динамометра мы такимъ образомъ имѣемъ величины двухъ внутреннихъ перпендикулярныхъ діаметровъ. Неравенство этихъ діаметровъ указываетъ на нѣкоторую эллиптичность сѣченія. Намъ нужны площади этихъ сѣченій. Площади эллипсовъ равны площадямъ круговъ, которыхъ радіусы — средняя геометрическая большой и малой полуосей. Наши эллипсы очень близки къ кругамъ, ихъ діаметры нами взяты случайные и вообще болѣе между собой близкіе по размѣрамъ, чѣмъ большая и малыя оси. Въ таблицѣ (стр. 15) обмѣра канала сѣченіе № 2 имѣетъ наиболѣе вытянутую фигуру эллипса. Ось $a = 4,366$ сант. и ось $b = 4,369$ сант. Средняя ихъ геометрическая $d = 4,3674998$, а средняя арифметическая $D = 4,3675000$. Разность $D - d = 0,002$ микрона настолько мала, что мы съ удобствомъ вездѣ въ слѣдующей таблицѣ беремъ за внутренній діаметръ сѣченій трубы среднюю арифметическую изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ ихъ обмѣровъ.

№	d	d ²	$\frac{\pi}{4} d^2$	К а н а л ы.	
				h	Объемъ.
1	4,3815	17,197542	15,077711	0,99	14,927
2	4,3666	19,067196	14,975338	2,26	33,844
3	4,3626	19,032299	14,947914	2,54	37,968
4	4,3617	19,024427	14,941747	2,54	37,952
5	4,3624	19,040534	14,946543	2,54	37,964
6	4,3613	19,020938	14,939007	2,54	37,945
7	4,3590	19,000881	14,923254	2,54	37,905
8	4,3594	19,004368	14,925993	5,08	75,824
9	4,3592	19,002625	14,924624	2,54	37,909
10	4,3590	19,000881	14,923254	20,37	303,240
11	4,3594	19,004368	14,925993	5,08	75,824
12	4,3600	19,009600	14,930102	2,54	37,922
13	4,3594	19,004368	14,925993	2,54	37,912
14	4,3797	19,006984	14,928047	2,54	37,917
15	4,3600	19,009600	14,930102	7,62	113,766
16	4,3597	19,006984	14,928047	2,54	37,917
17	4,3594	19,004368	14,925993	5,08	75,824
18	4,3592	19,002625	14,924624	2,54	37,909
19	4,3595	19,005240	14,926677	2,54	37,914
20	4,3592	19,002625	14,924624	2,54	37,909
21	4,3595	19,005240	14,926677	10,16	151,656
22	4,3592	19,002625	14,924624	5,08	75,818
23	4,3594	19,004368	14,925993	2,54	37,912
24	4,3592	19,002625	14,924624	5,08	75,818
25	4,3594	19,004368	14,925993	5,08	75,824
26	4,3599	19,008728	14,929417	2,54	37,921
27	4,3610	19,018321	14,936951	2,54	37,940
28	4,3603	19,016577	14,935582	2,54	37,936
29	4,3605	19,013960	14,933526	7,62	113,793
30	4,3608	19,016577	14,935582	2,54	37,936
31	4,3605	19,013960	14,933526	2,54	37,931
32	4,3606	19,014832	14,934211	2,54	37,933
33	4,3608	19,016577	14,935582	2,54	37,936
34	4,3592	19,002625	14,924624	2,54	34,909
35	4,3613	19,020938	14,939007	2,54	37,945
36	4,3617	19,024427	14,941747	2,54	37,952
37	4,3613	19,600938	14,939007	3,25	48,552
Средн.	4,3598	19,007854	14,928740	—	—
Итого. . .				143,738	2150,3000849

Разность между наружнымъ объемомъ динамометра (итогъ таблицы на стр. 13) и внутреннимъ (итогъ табл. на стр. 15) даетъ объемъ динамометра = 2891,475—2150,300 = 741,175 куб. сан. Масса его 5838 граммовъ. Плотность его

$$\rho = \frac{5838}{741,175} = 7,8767.$$

§ 3. Неупругія части динамометра.

Чтобы дать динамометру больше устойчивости и сопротивляемости продольному изгибу, мы ему дали большой диаметр и для этого его сдѣлали пустотѣлымъ и тонко-стѣннымъ. Его диаметр инерціи (стр. 23) $4^{\circ},03$ на 64% больше диаметра $2^{\circ},46$ сплошного стержня того же сѣченія (§ 4).

Концы трубы утолщены въ видѣ фланцевъ, изъ которыхъ верхній передаетъ и распредѣляетъ удары, нижній — воспринимаетъ, оба при помощи закругленій, въ которыхъ происходитъ плавный переходъ пружинящей части динамометра къ неупругой. Къ такимъ закругленіямъ съ переменнымъ сѣченіемъ очень трудно прилагать гармоническій анализъ и приходится ихъ мысленно нѣсколько произвольно раздѣлить на двѣ части. Одну причислить къ упругой цилиндрической части — трубѣ, другую — къ недеформирующемуся фланцу. Такъ, если (фиг. 7) мы поставимъ границу между этими двумя частями тамъ, гдѣ диаметр динамометра на 10% радіуса закругленія больше диаметра трубы, мы замѣтимъ, что дѣйствительно въ этомъ мѣстѣ масса закругленія начинаетъ быстро возрастать и что такое расположеніе границы между упругой и незамѣтно пружинящей частью будетъ довольно справедливо. Если къ тому еще замѣтимъ, что все закругленіе въ 5000 разъ меньше динамометра, мы согласимся, что допущенная произвольность въ установкѣ границы мало отразится на результатахъ. Итакъ, мы беремъ границей между упругой и неупругой частями динамометра плоскость HI (фиг. 7), которой положеніе при радіусѣ закругленія $r=1$ опредѣляемъ длиною

$$a = HI = 1 - \cos \alpha = 0,1.$$

Отсюда

$$\alpha = 25^{\circ}30/30'' = 0,4510221 \text{ и } b = \sin \alpha = 0,43589.$$

Площадь сектора

$$q_1 = 0I0_10 = \frac{\alpha}{2} = 0,225511.$$

Центръ тяжести K сектора находится на биссектрисѣ угла α и уголъ

$$0O_1K = \frac{\alpha}{2} = 12^\circ 55' 15''.$$

$$i = 0_1K = \frac{2}{3} \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = 0,6610301.$$

Координатами k будутъ

$$i_{1,x} = OL = 1 - 0_1K \times \cos \frac{\alpha}{2} = 0,3557073 \text{ и } i_{1,y} = KL = \\ = \overline{KO}_1 \sin \frac{\alpha}{2} = 0,1478.$$

У треугольника IOR площадь

$$q_2 = \frac{b(1-a)}{2} = 0,19615.$$

Его центръ тяжести N имѣетъ координатами

$$i_{2,x} = OP = 1 - \frac{2}{3} \frac{q_2}{b} = 0,7 \text{ и } i_{2,y} = PN = b - \frac{2}{3} \frac{q_2}{1-a} = 0,29063.$$

У прямоугольника $OHRO$ площадь $q = 0,43589$. Его центръ тяжести имѣетъ координатами

$$i_{3,x} = OT = 0,5; \quad i_{3,y} = ST = \frac{b}{2} = 0,217945.$$

Абсцисса $i_{4,x} = OV$ центра тяжести G сѣченія упругой части закругленія

$$i_{4,x} = OV = \frac{q_3 i_{3,x} - q_2 i_{2,x} - q_1 i_{1,x}}{q_3 - q_2 - q_1} = 0,0298.$$

Ордината этого центра тяжести будетъ

$$i_{4,y} = VG = \frac{q_3 i_{3,y} - q_2 i_{2,y} - q_1 i_{1,y}}{q_3 - q_2 - q_1} = 0,3280$$

Площадь сѣченія упругой части закругленія

$$q_4 = q_3 - q_2 - q_1 = 0,0142295.$$

Площадь сѣченія неупругой части закругленія будетъ (стр. 12).

$$Q_3 - q_4 = 0,20037.$$

Абсцисса центра тяжести неупругой части закругленія (стр. 12, 13) будетъ при $r = 1$

$$x = \frac{Q_3 f_3 - q_4 i_{4,x}}{Q_3 - q_4} = 0,236527.$$

Переходя теперь къ дѣйствительнымъ радиусамъ закругленій, т. е. полагая $r = r_1 = 0^{\circ},206$ и $r = r_2 = 0^{\circ},241$ (стр. 11), мы найдемъ, что площадь неупругой части верхняго закругленія

$$Q_b = 0,20037 \times 0^{\circ},206 = 0^{\circ},0085029,$$

а для нижняго

$$Q_H = 0,20037 \times 0^{\circ},241 = 0^{\circ},116377.$$

Абсцисса центра тяжести неупругой части верхняго закругленія

$$x_B = 0,206 \cdot 0,236527 = 0,04872$$

нижняго закругленія

$$x_H = 0,241 \cdot 0,236527 = 0,057003.$$

Разстояніе центра тяжести неупругой части верхняго закругленія отъ оси динамометра (стр. 13, 18).

$$R_B = \frac{D_B}{2} + x_B = 2,503 + 0,04872 = 2,552.$$

$$\text{Тоже—нижняго } R_H = \frac{D_H}{2} + x_H = 2,503 + 0,057 = 2,560.$$

Объемъ неупругой части верхняго закругленія:

$$2\pi R_1 Q_1 = 6,223185 \cdot 2,5518 \cdot 0,0085029 = 0,13633 \text{ (A)}$$

Объемъ неупругой части нижняго закругленія:

$$2\pi R_2 Q_2 = 6,223185 \cdot 2,560 \cdot 0,0116377 = 0,187136 \text{ (B)}$$

Верхняя неупругая часть динамометра:

Объем верхняго фланца (стр. 10)	+ 35,037
Слѣдующій цилиндрическій участокъ трубы имѣеть (стр. 13) $\frac{\pi D^2}{4} = 19,682$; $b = 0,43589$ (стр. 16); $r_1 = 0,206$ (стр. 11) $h_1 = (1-b) r_1 = 0,116207$. Его наружный объемъ $\frac{\pi D^2}{4} h_1 =$	+ 2,287
Неупругая часть закругленія вокругъ нея (A стр. 18) =	+ 0,136
Каналь въ этомъ участкѣ: Площадь (стр. 15) 14,975338. Высота $h_1 = 0,116207$ (стр. 19). Объемъ	- 1,740
Объемъ верхней неупругой части динамометра	<u>35,^c720</u>
Масса ея $35,72 \times 7,8767 = 281,356$ грамм.	

Масса наковальни съ каленой плиткой, винтиками и кольцомъ—1870 грамм. Итого масса верхняго неупругаго придатка динамометра $\mu = 2151,4$ грамма.

Нижняя неупругая часть динамометра:

Объемъ нижняго фланца (стр. 10)	+ 35, ^c 152
Ближайшій цилиндрическій участокъ трубы имѣеть (стр. 13) площадь $\frac{\pi D^2}{4} = 19,c682$, $b = 0,43589$ (стр. 16) $r_2 = 0,241$; $h_2 = (1-b) r_2 = 0,135951$. Наружный объемъ этого участка $\frac{\pi D^2}{4} h_2 =$	+ 2,676
Неупругая часть закругленія вокругъ него (B стр. 18)	+ 0,136
Каналь въ этомъ участкѣ. Площадь (стр. 15) 14,939007 Высота $h_2 = 0,135951$. Объемъ	- 2,031
Объемъ нижней неупругой части динамометра	<u>35,^c933</u>
Масса ея $35,933 \cdot 7,8767 = 283,03$ грамма.	

§ 4. Упругая часть динамометра.

Ея длина (стр. 10, 19):

$$l = 143^{\circ}, 737 - 1^{\circ} - 0^{\circ}, 116207 - 0^{\circ}, 135951 - 1^{\circ} = 141^{\circ}, 486;$$

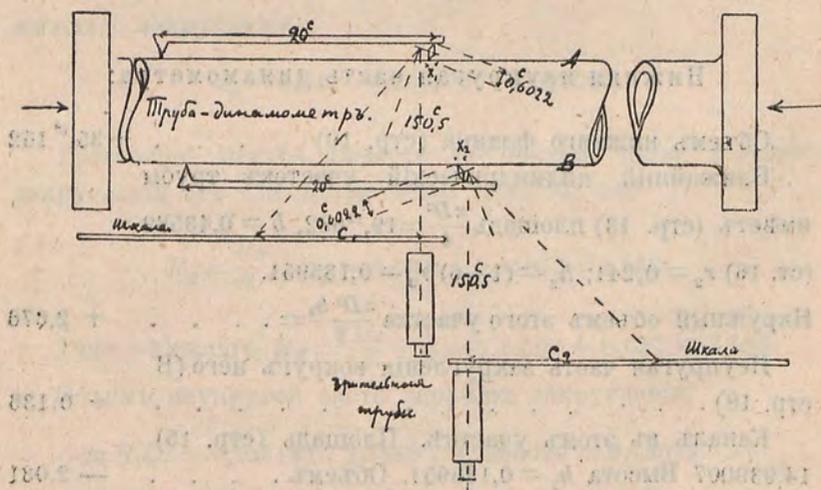
$$\text{Ея объем (стр. 15, 19): } 741^{\circ}, 175 - 35^{\circ}, 720 - 35^{\circ}, 933 = = 669^{\circ}, 522.$$

Ея масса (стр. 15, 19): $M' = 5838 - 281 - 283 = 5274$ гр.

У сплошного стержня, имѣющаго ту же длину l и тотъ же объемъ, средній радиусъ былъ бы $r = \sqrt{\frac{669,522}{\pi l}} = = 1^{\circ}, 2273$, диаметръ былъ бы $2^{\circ}, 455$, а площадь сѣченія $S = 4,73169$ сант.².

§ 5. Коэффициент упругости динамометра.

Во время послѣдовательныхъ обжатій динамометра усиліями въ 1000, 2000, ..., 100000 klg., описанныхъ на стр. 28 были опредѣлены соответственныя сжатія динамометра одновременно на двухъ противоположныхъ производящихъ A и B одного и того же его меридіональнаго сѣченія при помощи зеркальнаго прибора А. Martens ¹⁾, установленнаго какъ



Фиг. 9.

¹⁾ А. Martens, Materialienkunde, § 694.

показано на схемѣ (фиг. 9). Эта установка даетъ увеличеніе деформаци въ 500 разъ, а средняя ариѳметическая изъ деформаций производящихъ *A* и *B* равна суммѣ отчетовъ на шкалахъ *C*₁ и *C*₂, дѣленной на тысячу.

Такимъ образомъ получилась слѣдующая таблица зависимости между усиліями и сжатіями динамометра:

Англ. фунты.	Килогр.	С а н т и м е т р ы.		
		Отсчеты на шкалахъ.		Среднее сжатіе $\lambda = \frac{c_1 + c_2}{1000}$
		Лѣвой <i>c</i> ₁	Правой <i>c</i> ₂	
0	0	0	0	0,0000
400	181,4	0,9	0,7	0,0016
2204,62	1000	2,1	1,6	0,0037
4409,24	2000	3,1	2,5	0,0056
6613,86	3000	3,8	3,2	0,0070
8818,48	4000	5,2	4,5	0,0097
11023,10	5000	6,3	5,5	0,0118
13227,72	6000	7,4	6,5	0,0139
15432,34	7000	8,4	7,6	0,0160
17636,96	8000	9,5	8,6	0,0181
19841,58	9000	10,6	9,7	0,0203
22046,20	10000	11,7	10,7	0,0224

Въ этой зависимости *P* и λ неправильности между 0 и 4000 kg. указываютъ на то, что машина Emery заключала тренія, преодолѣвавшіяся при большихъ усиліяхъ. На участкѣ 4000 — 10.000 klg. законъ Гука проведенъ замѣчательно точно и мы можемъ воспользоваться любымъ наблюдениемъ въ этихъ предѣлахъ для опредѣленія коэффициента упругости динамометра. Подъ грузомъ, котораго масса равна 10.000.000 граммъ, мы на участкѣ въ 20 сант. имѣемъ усадку въ 0,0224 динамометра, котораго среднее сѣченіе равно 4,73169 кв. сант. (стр. 20), такъ что коэффициентъ упругости получается въ техническихъ единицахъ $E = \frac{10000 \text{ klg. } 20 \text{ сант.}}{4,73169 \text{ сант.}^2 \cdot 0,0224} = 1886900$, а единицахъ CGS имѣемъ $E = 1886900000 \cdot 981,85 = 1,8527 \cdot 10^{17}$.

Послѣднее выраженіе E у насъ и пройдетъ по всей книгѣ. Вообще замѣтимъ, что для динамометровъ тотъ матеріалъ лучше, котораго коэффициентъ упругости меньше, а предѣлъ упругости больше; дѣйствительно уравненіе

$$\lambda = \frac{pl}{SE}$$

указываетъ, что деформация λ при нѣкоторой нагрузкѣ p тѣмъ больше, и тѣмъ, значить, въ большемъ масштабѣ пружина измѣряетъ усилія, чѣмъ меньше коэффициентъ упругости матеріала. Съ другой стороны пружина работаетъ тѣмъ въ болѣшихъ предѣлахъ, чѣмъ дальше идетъ законъ пропорціональности ея матеріала, т. е. чѣмъ выше ея предѣлъ упругости. Этимъ двумъ требованіямъ по возможности и удовлетворяетъ (стр. 9, 21) сталь, изъ которой сдѣланъ нашъ динамометръ. Для нагрузки въ 10 тоннъ относительное сжатіе его будетъ $i = \frac{0,6224}{20^c} = 0,00112$. Для той же нагрузки въ 10 тоннъ сжатіе всей упругой части динамометра будетъ:

$$B = li = 141,486 \cdot 0,00112 = 0,158 \text{ (здѣсь } l \text{ см. § 4).}$$

Скорость распространенія продольныхъ колебаній по упругой части динамометра:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,8527 \cdot 10^{12}}{7,8767}} = 484981 \text{ сантиметровъ въ секунду}$$

(Здѣсь E и ρ см. стр. 15, 21).

§ 6. Сжимающее усиліе, отвѣчающее продольному изгибу динамометра.

Если бы динамометръ былъ коротокъ, мы опредѣлили бы упругое его сопротивленіе сжатію, умноживъ его сѣченіе 4,7317 (§ 4) на предѣлъ упругости 6150 (стр. 9) и получили бы силу, равную вѣсу массы въ 29 тоннъ. Но ввиду значительной длины, 141,486 его тонкой упругой части, равной 35 его діаметрамъ инерціи (стр. 23), онъ выдержитъ

несомнѣнно меньше 29 тоннъ сжимающаго усилія. Для того, чтобы опредѣлить безопасную нагрузку мы не имѣемъ никакихъ средствъ кромѣ непосредственнаго испытанія такихъ же (по качеству матеріала, по степени калки, по фигурѣ и по размѣрамъ) динамометровъ продольнымъ изгибомъ. Ни формула Euler'a, ни таблица Ясинскаго ¹⁾ не даютъ надежныхъ результатовъ. Рассмотримъ первую. Ввиду того, что упругая часть динамометра составляетъ одно цѣлое съ толстыми фланцами, изъ которыхъ нижній крѣпко привинченъ къ основанію копра, или прикрѣпленъ къ плитѣ машины Емегу такъ, чтобъ отъ нея не отстать во время давленія, словомъ, „задѣланъ“, а верхній фланецъ подпертъ и можетъ двигаться лишь вдоль по оси динамометра, къ нашему случаю примѣнимъ лишь слѣдующій видъ формулы Euler'a:

$$P_{\text{крит.}} = \frac{4EI\pi^2}{l^2}$$

Здѣсь (§ 4 и стр. 20) $l^2 = 20018,288$; $E = 1,8527 \cdot 10^{12}$. Наименьшее сѣченіе динамометра находится на разстояніи 3-хъ сант. отъ верхняго конца динамометра, гдѣ его наружный діаметръ 5,006, а внутренній 4,3666. Экваторіальный моментъ инерціи этого наименьшаго сѣченія

$$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{0,785398}{16} (5^4,006 - 4^4,3666) = 12,9808$$

$$l = 141^{\circ},486 \text{ (§ 4) и діаметръ инерціи}$$

$$\delta = 2\rho = 2 \sqrt[4]{\frac{4I_x}{\pi}} = 2 \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 12,9808}{\pi}} = 4^{\circ},03. \text{ Отсюда}$$

$$P_{\text{крит.}} = \frac{4EI\pi^2}{l^2} = \frac{4 \cdot 1,8527 \cdot 10^{12} \cdot 12,9808 \cdot 9,8696}{20018,288} = 47428 \times 10^6$$

динамъ, что отвѣчаетъ 46568 килограммамъ массы, т. е. получается величина бѣльшая той, какую выдержать короткій брусокъ, сжатый до предѣла упругости (29 тоннъ стр. 22).

Поэтому въ нашемъ случаѣ формула Euler'a не приложима. Но формула Euler'a имѣетъ то преимущество, что

¹⁾ Собраніе сочиненій Ф. С. Ясинскаго СПб. 1902 г. Томъ I стр. 202.

содержитъ величину E , индивидуальную для каждого куска стали и въ случаяхъ, когда не выходитъ за предѣлы упругости, даетъ полезныя индивидуальныя указанія. Что же касается таблицъ Ясинскаго, онѣ составлены на основаніи опытовъ Vauschinger'a, Tetmajer'a и Considère надъ сплошными образцами литой стали, нашъ же динамометръ — полый и долженъ больше сопротивляться продольному изгибу, чѣмъ сплошной стержень того же сѣченія.

Въ таблицахъ Ясинскаго въ скрытой формѣ фигурируетъ какая то неподвижная постоянная средняя величина коэффициентовъ упругости тѣхъ образцовъ, надъ которыми упомянутые экспериментаторы производили опыты. Нашъ динамометръ съ высокимъ предѣломъ упругости и малымъ коэффициентомъ упругости не подходитъ ни по пустотѣлой формѣ, ни по составу къ сортамъ стали для которыхъ составлены таблицы Ясинскаго. Послѣднія, для имѣющагося въ динамометрѣ отношенія

$$\frac{l}{r_{min}} = \frac{141^{\circ}, 486.2}{5^{\circ}, 006} = 56,5$$

даютъ критическое его напряженіе $2553 \frac{\text{kg.}}{\text{см.}^2}$ что при среднемъ сѣченіи 4,73169 кв. сант., составляетъ усиліе, равное вѣсу массы въ 12 тоннъ при сплошномъ сѣченіи. Между тѣмъ для болѣе прочнаго полаго сѣченія на машинѣ Emery подъ усиліемъ равнымъ вѣсу массы въ 11,5 тоннъ у насъ согнулася за предѣлъ упругости прямой, изъ подъ токарнаго станка динамометръ, изготовленный ранѣе этого по тѣмъ же чертежамъ, но имѣвшій большой экваторіальный моментъ инерціи (именно 13,26 вмѣсто 12,98 стр. 23) и болѣе модуль Young'a (1986100 вмѣсто 188690 стр. 21). Ввиду высокой стоимости этихъ динамометровъ, мы, не смотря на поощреніе, извлекаемое изъ таблицъ Ясинскаго, не рѣшились вести опыты съ новымъ динамометромъ при усиліяхъ, превышающихъ вѣсъ $P = 11291275000$ динъ массы (въ $11\frac{1}{2}$ тоннъ) и нормально придерживаемся максимума въ 10 тоннъ ($P = 9818500000$ динъ).

§ 7. Наибольшая допустимая высота бросанія бабы.

Баба первоначально имѣла массу 10 klg. и вѣсъ 9.818.500 динь. Приспособленіе вилки и удлиненнаго бойка увеличили ея массу до $M = 12.591$ граммовъ, а вѣсъ до $Q = 12.362.473$ динь. Наибольшая высота h , съ которой ее можно бросить безъ вреда для динамометра, когда на немъ нѣтъ образца, поглощающаго энергію бабы, опредѣляется изъ уравненія, выражающаго энергію, потраченную на работу сжатія. Предположимъ, что сжатіе линейно возрастало до i по закону Нюокке ¹⁾. Соответственная работа равна площади треугольника $\frac{Pi}{2}$, гдѣ P натяженіе динамометра, отвѣчающее i . Тогда

$$Qh = \frac{Pi}{2}$$

Здѣсь i опредѣляемъ изъ

$$E = \frac{P}{S} \frac{S}{i} \frac{l}{l}$$

подставляемъ $P = 11291275000$ динь и пользуемся данными § 4 стр. 21, 25. Получается

$$h = \frac{P^2 l}{2E_r Q} = 83,225 \text{ ст.}$$

Отъ повторенныхъ бросаній бабы съ этой высоты нашъ новый динамометръ не страдалъ. Точно также для статическаго натяженія динамометра P , равнаго вѣсу массы въ 10 тоннъ, мы найдемъ, что наибольшая допустимая высота бросанія есть $h = 75$ сант. Опыты подтверждаютъ это заключеніе и мы замѣчаемъ, что высота нулевой, второй и седьмой ординатъ равняется высотѣ параллельнаго круга въ 10 тоннъ (фиг. 4) сѣтки, когда баба въ 12.591 граммъ и падаетъ съ 75 с. Прочія ординаты получаютъ однѣ нѣсколько короче, другія длиннѣе съ наибольшими отступленіями въ $\pm 20\%$ (третья и десятая).

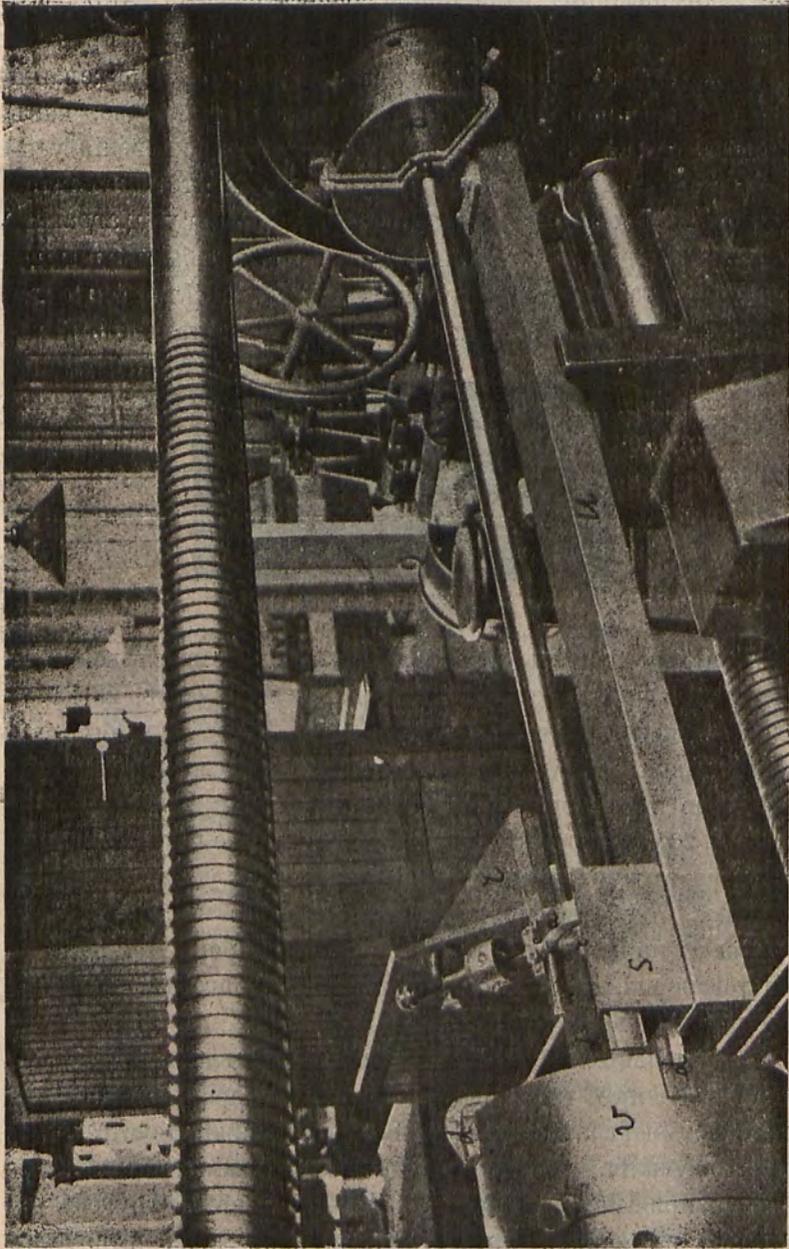
¹⁾ Clebsch—St. Venant. Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris 1883. Note du § 60, Page 480 b.

§ 8. Тарировка прибора.

Тарировка прибора сводится къ нанесенію координатной сѣтки на чашѣ. Для этого на нее пускаютъ каплю офортнаго грунта, именно vernis à resouvir de H. Calmels (150, Boul-d M-t Parnasse à Paris), наклоняютъ чашу въ разныя стороны, даютъ грунту разлиться слоемъ равномерной толщины и засохнуть. По этой поверхности игла превосходно записываетъ всѣ свои движенія. Грунтъ не легко стирается, кислотами не разѣдается, допускаетъ ретушь, осколками не отлетаетъ даже при самыхъ большихъ скоростяхъ движенія иглы и сходить лишь тамъ, гдѣ его спарпали. Сѣтка состоитъ изъ двухъ сонмовъ кривыхъ: 1) ось абсциссъ (экваторъ) и параллельные круги, являющіеся геометрическими мѣстами точекъ, на которыхъ находится игла, когда статическая нагрузка динамометра составляетъ 0,1000,2000...10000 klg. и 2) рядъ ординатъ, т. е. геометрическихъ мѣстъ точекъ, на которыхъ находится игла, когда при различныхъ давленіяхъ величина обжатія образца *C* составляетъ 0, 1, 2...12 миллиметровъ.

§ 9. I. Абциссы.

Для первой тарировки прибора, т. е. нанесенія экватора и параллельныхъ круговъ на чашѣ, мы отдѣляемъ отъ копра приборъ вмѣстѣ съ динамометромъ и ставимъ его въ машину для испытанія матеріаловъ на сжатіе. Въ механической лабораторіи Спб. Политехническаго Института въ то время одна только машина Emegu имѣла для этой цѣли достаточную длину. На фиг. 10 показанъ нашъ приборъ, установленный горизонтально въ этой машинѣ. Нижній фланецъ *Z* динамометра захваченъ трехлапчатый обоймой центрально у неподвижной опорной площадки *t* машины Emegu, а верхній фланецъ съ наковальной *a* движется въ пазахъ коробки *S*, подобныхъ пазамъ копра. Коробка *S* связана съ неподвижной площадкой *t* швеллеромъ *u*. На коробкѣ *S* укрѣпленъ описанный кронштейнъ *r* съ подшипникомъ *e* и иглой *g* перенесеннаго прибора. Подвижная опорная площадка *v* ма-



Фиг. 10.

шины Emeгу охвачена крестовиною съ выступомъ d по срединѣ, замѣняющимъ бабу при плавномъ нажатіи. Этотъ выступъ ходитъ въ тѣхъ же пазахъ коробки S , въ какихъ ходитъ наковальня a и на его верхней площадкѣ при желаніи укрѣпляется вилка m (фиг. 1) совершенно такъ же, какъ на бабѣ, только этой вилки не нужно для тарирования усилій. Если однако вилку m навинтить и давить приборомъ образцы, пока онъ поставленъ въ машину Emeгу, діаграммы получаются (фиг. 11) типа, получаемого на обыкновенныхъ машинахъ статическаго испытанія на сжатіе. Для тарировки усилій мы отнимаемъ вилку отъ прибора и такъ его уста-



Фиг. 11.

навливаемъ, чтобы въ то время, какъ динамометръ вовсе не нагруженъ, черта, которую игла чертитъ по чашкѣ, когда ее ведемъ рукою, проходила черезъ кернъ, т. е. была бы экваторомъ чаши. Потомъ мы машиною Emeгу сжимаемъ трубу продольно послѣдовательно усиліями равными вѣсу массы въ 1000, 2000...10.000 klg. и чертимъ иглою по параллельному кругу на загрунтованной чашкѣ при каждой установившейся нагрузкѣ. Дѣйствіемъ пружинки w игла во время этой тарировки прижимается къ одному срѣзу прорѣзи h (фиг. 1), уничтожая вліяніе мертваго хода, вызваннаго зазоромъ между шарикомъ i и прорѣзью h .

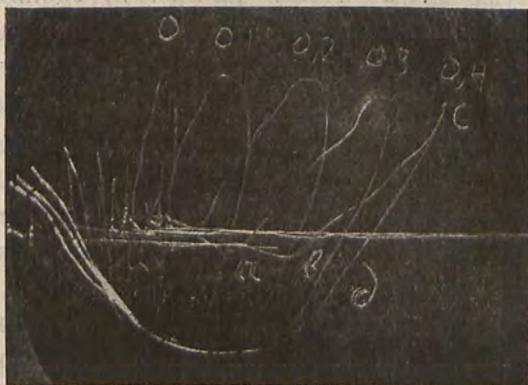
Параллельные круги и экваторъ, протравленные на чашкѣ и переведенные тисненіемъ на свинецъ передъ каждымъ опытомъ, даютъ возможность непосредственно отсчитать статическія усилія, соотвѣтствующія тѣмъ динамическимъ явленіямъ напряженія и инерціи, которыя поверхъ круговъ записались въ данной интересующей насъ діаграммѣ. Какъ мы видѣли, въ машинѣ Emeгу были значительныя тренія

при первоначальномъ смѣщеніи ея главнаго поршня. Трудами А. М. Драгомирова, повидимому, этотъ недостатокъ устраненъ уже послѣ изготовленія мною координатной сѣтки. Передѣлывать сѣтку однако не стоитъ. Разстояніе между девятью параллельными кругами отъ 1 тонны до 10 тоннъ строго равны между собой и составляютъ по 0,0785 сант. въ отдѣльности и 0,7065 сант. въ сложности всѣ девять. Всѣ десять промежутковъ однако, вмѣсто 0,785 сант., составляютъ 0,882 сант., такъ что первое дѣленіе болѣе слѣдуемаго на 0,097 сант. и на эту величину слѣдовало бы сблизить экваторъ съ первымъ параллельнымъ кругомъ, когда машина Емегу приведена въ порядокъ. Что въ такомъ случаѣ для десяти промежутковъ число 0,785 сант. вѣрнѣе, чѣмъ 0,882 сант., видно и изъ слѣдующаго. При помощи прибора Martens'a (стр. 20) деформация трубы-динамометра при обжатіи 10 тоннами опредѣлилась въ $B=0,15846$ сант. Здѣсь $B=l\sin\alpha$, гдѣ l (разстояніе между шариками i и o) равно $1^{\circ},218$, откуда $\alpha = \arcsin \frac{B}{l} = 7^{\circ}30' = 0,1309$. Разстояніе $L=0j$ (фиг. 2) въ иглѣ = 6,02 сант. даетъ, наконецъ, разстояніе между экваторомъ и параллельнымъ кругомъ $D=\alpha L=0,788$ сант., что гораздо ближе къ 0,785 сант., чѣмъ къ 0,882 сант. Последнему бы отвѣчало не дѣйствительное $B=0,15846$, а $B=0,1784$ сант. Зная, что болѣе разстояніе между двумя нижними кругами по сравненію съ разстояніями между остальными явилось слѣдствіемъ неурегулированности машины Емегу и имѣя возможность это учесть во всякое время, я оставилъ сѣтку безъ исправленія, предпочитая направить работу на болѣе важные предметы.

§ 10. II. Ординаты.

Для возможности непосредственнаго отсчета деформаций въ любой точкѣ діаграммы необходимо произвести другого рода тарировку прибора и получить на чашѣ рядъ ординатъ, разстояніе между которыми отвѣчало бы послѣдовательнымъ сжатіямъ образца на 1, 2...12 миллиметровъ. На фиг. 12 представленъ первый неудачный шагъ къ этому, показавшій,

что наша игла была слишком длинна (10 сант.) и термически неудовлетворительно обработана¹⁾. На фиг. 12 пре-



Фиг. 12.

увеличенно видно получение ряда ординат координатной сетки. На фиг. 4 ординаты показаны в том виде, в каком онѣ служатъ.

Нулевая ордината. Ставимъ вилку на нуль (стр. 6) и бросаемъ бабу въ 12591 грамм. съ 75 сант. (стр. 25) непосредственно на каленую наковальню. При этомъ игла автоматически чертитъ нулевую ординату OO , имѣющую свою особую форму, опредѣленные извилины, наклонъ, точку пересѣченія съ осью абсциссъ (начало координатъ) и длину. Затѣмъ траекторія иглы возвращается къ началу. Для получения первой, второй и т. д. ординатъ, мы опускаемъ вилку въ точности на одинъ, два и т. д. миллиметра и повторяемъ удары въ тѣхъ же условіяхъ. Всего лучше мы прослѣдимъ на фотографіи 12 четвертую ординату, для которой вилка была опущена на 0,4 сант. Остріе иглы, находившееся въ началѣ координатъ, проходитъ по оси абсциссъ путь oa , соответствующій послѣднему миллиметру свободного полета бабы. Въ моментъ ея прикосновенія къ нако-

¹⁾ Иглу пришлось утолстить, сколько позволяло мѣсто, а затѣмъ, къ сожалѣнію, укоротить до 6,28 сант. и уменьшить этимъ площадь диаграммы въ 3 раза.

вальнѣ происходитъ трудно объяснимое опусканіе *b* (при нормальной иглѣ слѣды *b* еще замѣтны), затѣмъ остріе чертитъ вверху ординату *bc* четвертаго миллиметра. Вслѣдъ затѣмъ сжатый динамометръ вытягивается и подбрасываетъ бабу, которая благодаря приспособленію Amsler'a, зацѣпляется около верхней точки своего взлета. Самъ динамометръ продолжаетъ вибрировать затухающими колебаніями, такъ что жало иглы чертитъ на чашѣ волну *cdo*, приближаясь къ началу координатъ по мѣрѣ того, какъ баба поднимается вмѣстѣ съ вилкой. Намъ полезенъ лишь участокъ *bc*, участки же *oab* и *cdo* на фиг. 4 мы тщательно закрываемъ грунтомъ посредствомъ тоненькой кисточки. Ординаты отличаются другъ отъ друга послѣдовательнымъ измѣненіемъ формы, образуя сонмъ, имѣющій общій характеръ и одну общую причину, скрытую въ совокупности особенностей частей механизма. Мы принимаемъ, что онѣ поглощаютъ всѣ погрѣшности прибора, такъ что идя по параллельному кругу отъ интересующей насъ точки какой-нибудь диаграммы, полученной на такой сѣткѣ, до пересѣченія съ нулевой ординатой, мы узнаемъ полное динамическое сжатіе образца (упругое и остающееся) въ то время, когда онъ подвергался такому то усилію. Полученную на загрунтованной чашѣ сѣтку *f* (фиг. 3) мы ретушируемъ, чтобы сталь была обнажена только въ мѣстахъ, которыя должны быть протравлены и окружаемъ нацарапанную сѣтку валикомъ изъ сплава желтаго воска съ венеціанскимъ скипидаромъ. Валикъ хорошо прилипаетъ кольцомъ и въ его предѣлахъ мы наливаемъ въ чашу 2% растворъ азотной кислоты, которому даемъ дѣйствовать въ теченіи 3-хъ часовъ. Наша чаша *k* снаружи ограничена цилиндрической поверхностью *a*, которую она на шпонкѣ *b* входитъ въ полный цилиндръ *c*. Въ этотъ цилиндръ такимъ же образомъ входитъ поршень *d* съ плоскимъ срѣзомъ. Въ Экспедиціи заготовленія Государственныхъ бумагъ на этотъ срѣзъ нарастили шаровой сегментъ *e* изъ чистаго никкеля, на поверхности котораго гальванопластически воспроизведенъ негативный оттискъ *g*, служащій штампомъ-пуансономъ. Передъ каждымъ опытомъ

однимъ движеніемъ снимаютъ чашу *k*, обтягиваютъ полосой луженаго свинца *a*, какой идетъ на бутылочные капсулы, и сверху ставятъ пуансонъ *d*, имѣющій на нижній сферической выпуклости никкелевый гальванопластическій слѣпокъ съ чаши. Чашу, листъ и пуансонъ охватываютъ стальной направляющей трубой *c* и становятъ подъ прессъ *h*. Усиліемъ равнымъ вѣсу массы въ 5 тоннъ на свинцѣ выдавливаютъ отпечатокъ координатной сѣтки и, снявъ пуансонъ и направляющую, однимъ движеніемъ устанавливаютъ чашу со свинцовымъ листомъ на мѣсто, покрывъ свинецъ грунтомъ передъ каждымъ опытомъ. Тогда діаграмму опыта мы получаемъ на загрунтованной сѣткѣ, по которой мы отсчитываемъ координаты интересующихъ насъ точекъ.

Снятая съ чаши свинцовая горизонтальная полоска образуетъ долю сферы съ вертикальнымъ угломъ растворенія въ 11° въ ширину. Если изъ нея вырѣзать поперекъ кусочекъ, содержащій въ обыкновенныхъ случаяхъ, напр., испытанія образца стали всю интересующую насъ часть діаграммы, получается по направленію длины полоски (экватора) кусочекъ градусовъ въ 5. Его легко расправить, рассмотреть, обмѣрить и увеличить фотографически при надобности.

Нельзя, однако, согласиться съ тѣмъ, что сѣтка поглощаетъ все погрѣшности прибора (стр. 31). Элементъ времени усложняетъ дѣло. Если поставить на наковальню столбикъ мягкой красной мѣди, можно, не достигая 10 тонной параллели на чашѣ, производить удары съ предѣльной высоты копра 4-хъ метровъ и наблюсти утроеніе продолжительности удара.

Ударъ по вязкому веществу продолжается дольше, чѣмъ по твердому и время 0,0002 сек., въ теченіи котораго записанное приборомъ (фиг. 1) усиліе возрастаетъ, напр., отъ 0 до 7,35 тоннъ при ударѣ бабы съ высоты 75 сант. о каленую поверхность голой наковальни втрое меньше времени 0,0006 сек. того же возрастанія усилія при ея ударѣ съ высоты 4 метровъ по свѣжему крешерному столбику изъ красной мѣди. Приведенныя числа получены при участіи кривыхъ *k* фиг. 27 и 29. Замѣчательно, что когда на нако-

вальню клались весьма однообразные мѣдныя крещерные столбики образецъ какъ бы поглащаль разнообразіа въ вибраціяхъ прибора, индивидуальныя отступленія ординатъ отъ средней получались незамѣтныя и діаграммы становились между собой тождественныя какъ на барабанѣ Morin'a, такъ и на чашѣ.

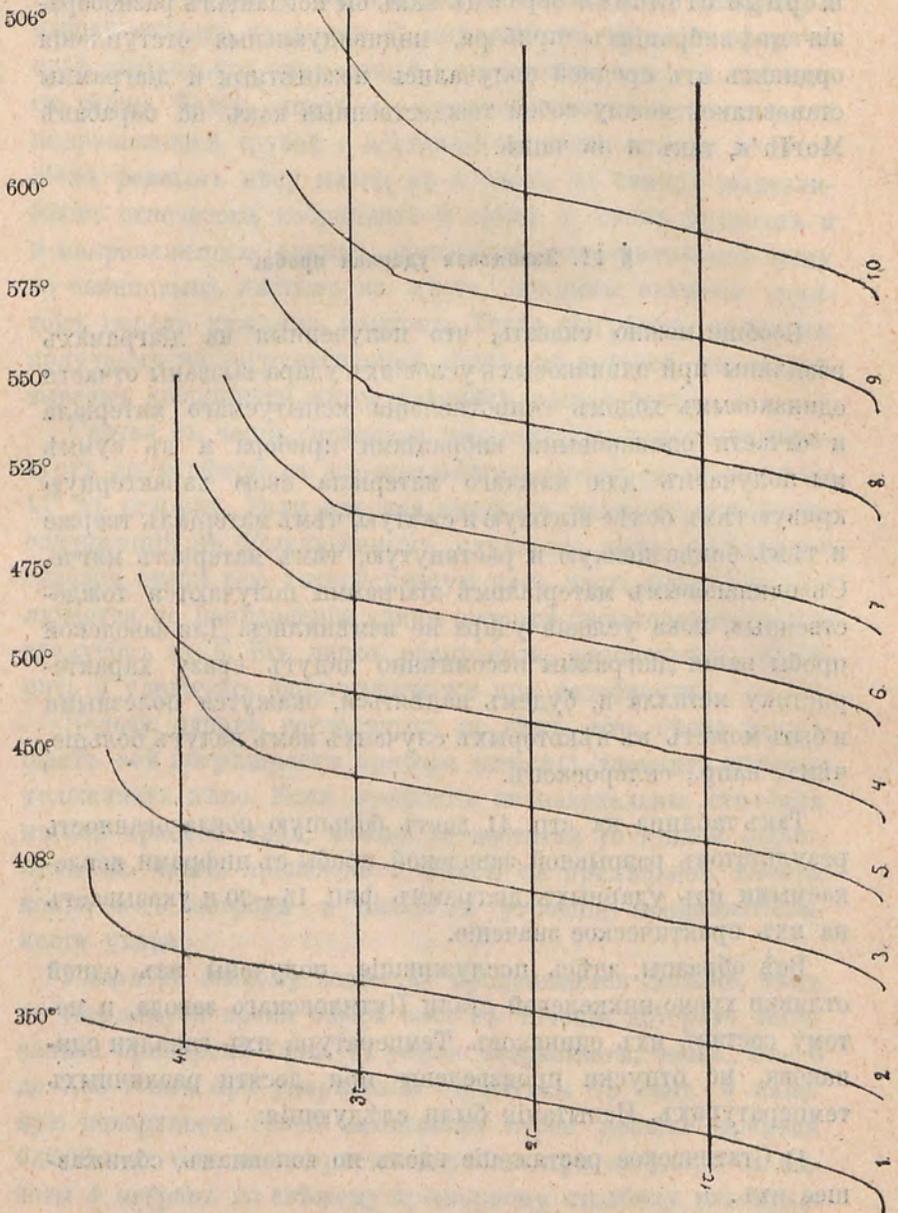
§ 11. Заводская ударная проба.

Вообще можно сказать, что полученныя на діаграмахъ извилины при одинаковыхъ условіяхъ удара вызваны отчасти одинаковымъ ходомъ сопротивленія испытываемаго матеріала и отчасти одинаковыми вибраціями прибора и въ суммѣ мы получаемъ для каждаго матеріала свою характерную кривую тѣмъ болѣе высокую и сжатую, чѣмъ матеріаль тверже и тѣмъ болѣе низкую и растянутую, чѣмъ матеріаль мягче. Съ одинаковымъ матеріаломъ діаграммы получаются тождественныя, пока условія удара не измѣнились. Для заводской пробы наши діаграммы несомнѣнно дадутъ сразу характеристику металла и, будемъ надѣяться, окажутся полезными и быть можетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ намъ дадутъ больше, чѣмъ, напр., склероскопъ.

Такъ таблица на стр. 41 даетъ большую согласованность результатовъ разрывной заводской пробы съ цифрами, извлекаемыми изъ ударныхъ діаграммъ фиг. 15—20 и указываетъ на ихъ практическое значеніе.

Всѣ образцы, здѣсь послужившіе, получены изъ одной отливки хромо-никкелевой стали Путиловскаго завода, и потому составъ ихъ одинаковъ. Температура ихъ закалки одинакова, но отпуски произведены при десяти различныхъ температурахъ. Испытанія были слѣдующія:

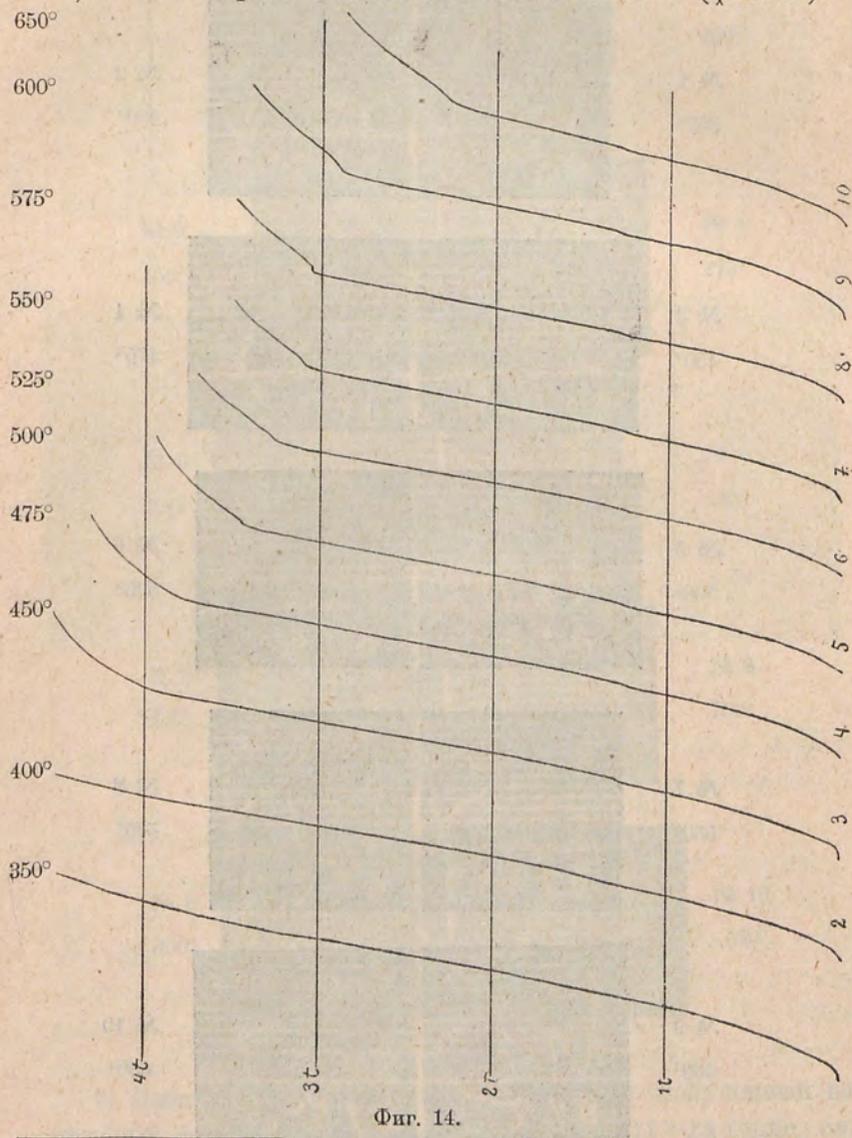
- 1) Статическое растяженіе вдоль по волокнамъ, сближавшее ихъ.
- 2) Статическое растяженіе поперекъ волоконъ, расторгавшее ихъ.



Фиг. 13.

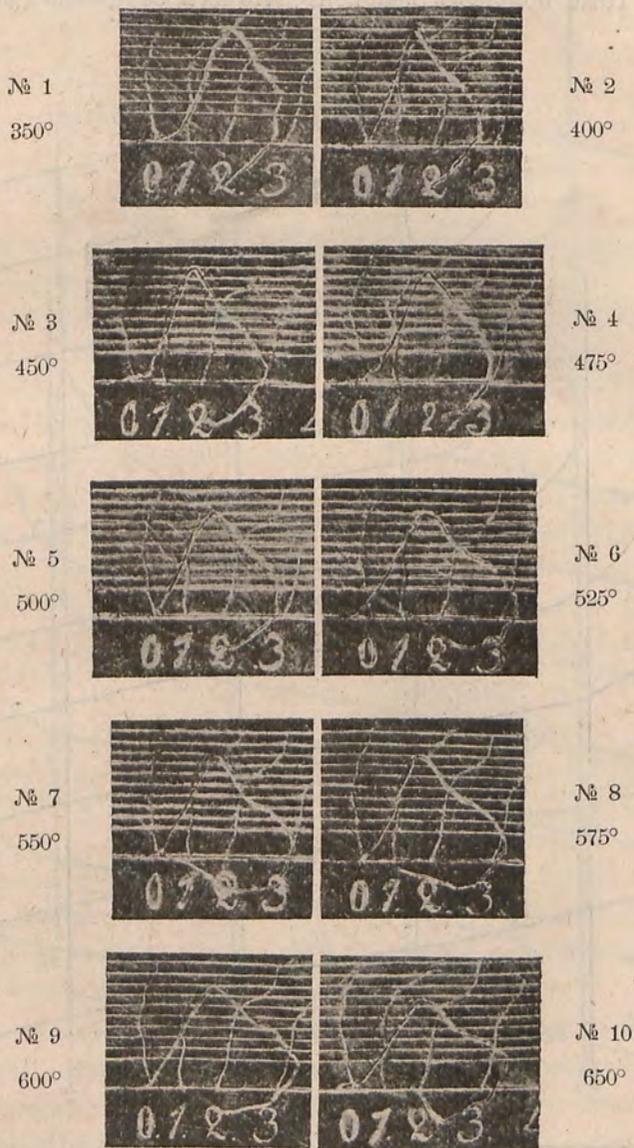
3) Сжатіе образцовъ $d=6$ m/m, $d=9$ m/m на моемъ статическомъ прессѣ¹⁾ усиліями, направленными вдоль волоконъ и расторгавшемъ ихъ (фиг. 13).

4) Тоже поперекъ волоконъ, что ихъ сближало (фиг. 14).



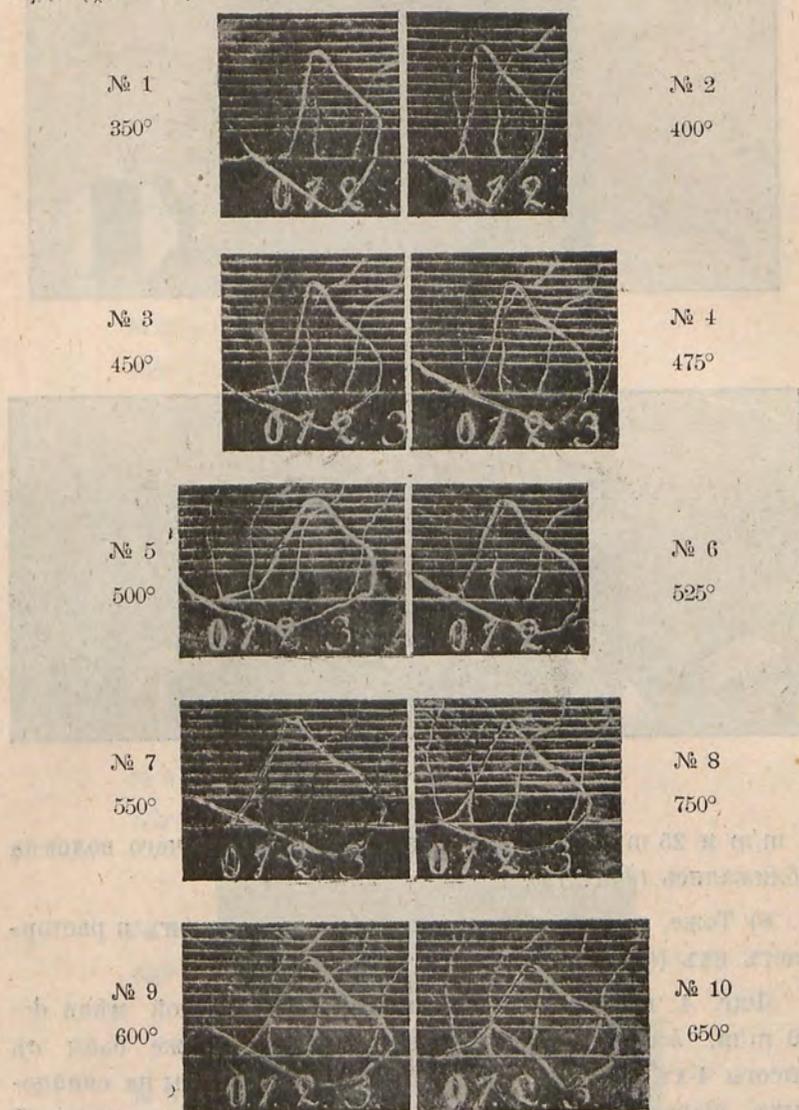
¹⁾ Congrès de Bruxelles 1906. Prince André Gagarine. Rapport A 16f.

5) Сжимающий удар бабы въ 12591 граммъ, брошенной съ высоты 75 сант. на образцы $d=6$ м/м, вдоль волоконъ, которыя отъ этого расторгаются (фиг. 15).



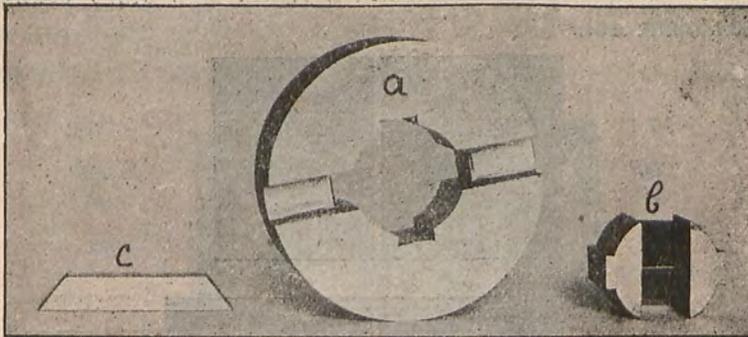
Фиг. 15.

6) Тоже поперекъ волоконъ, которыя отъ этого сближаются (Фиг. 16).

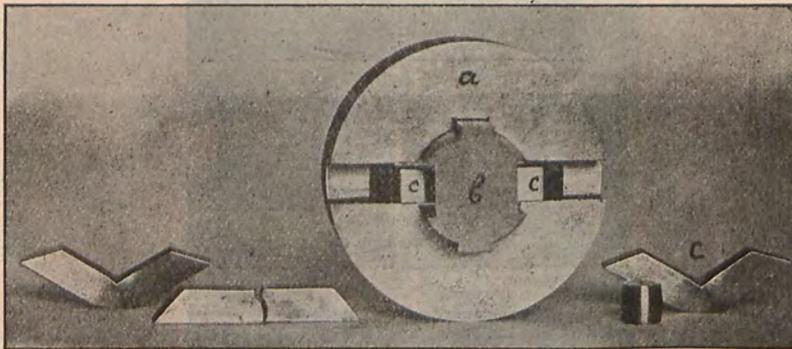


Фиг. 16.

7) Изгибающій ударъ той же мощности, полученный на приборѣ фиг. 1 при участіи прибора фиг. 17—18 (опис. см. стр.185) и направленный поперекъ волоконъ образца *C* (6 mm ×



Фиг. 17.



Фиг. 18.

6 м/м и 25 м/м между опорами), вследствие чего волокна сближались (фиг. 19).

8) Тоже, но удар направлен вдоль волоконъ и расторгаетъ ихъ (фиг. 20).

Фиг. 4 получена сжатіемъ образца красной мѣди $d=10$ м/м, $h=15$ м/м вследствие паденія той же бабы съ высоты 4-хъ метровъ. Всѣ діаграммы получены на свинцовыхъ діаграмныхъ бланкахъ съ нанесенной координатной сѣткой, гдѣ усилія въ тоннахъ показаны горизонтальными линиями, а деформациі въ миллиметрахъ отсчитываются ординатами. Результаты собраны въ таблицѣ (стр. 41) со слѣдующими обозначеніями:

№ 1

350°



№ 2

400°



№ 3

450°



№ 4

475°



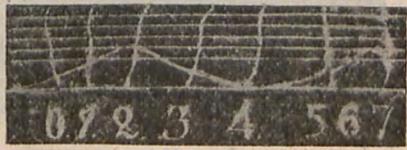
№ 5

500°



№ 6

525°



№ 7

550°

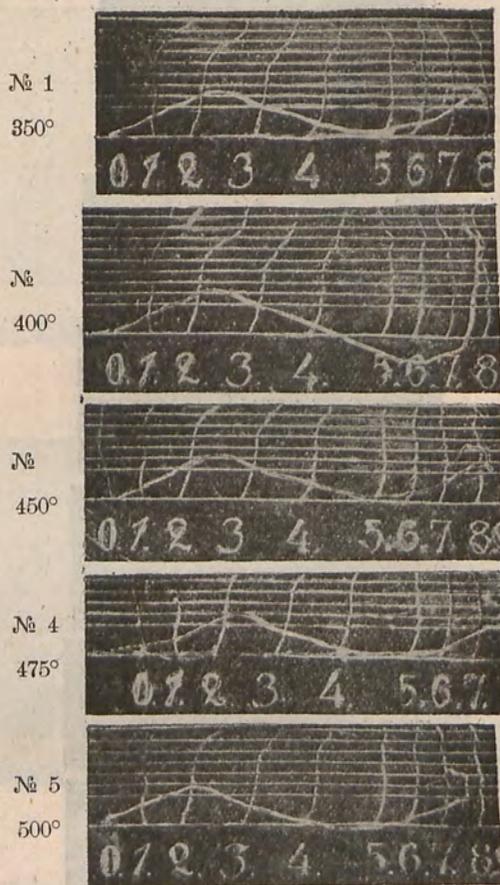


№ 8

575°



Фиг. 19.

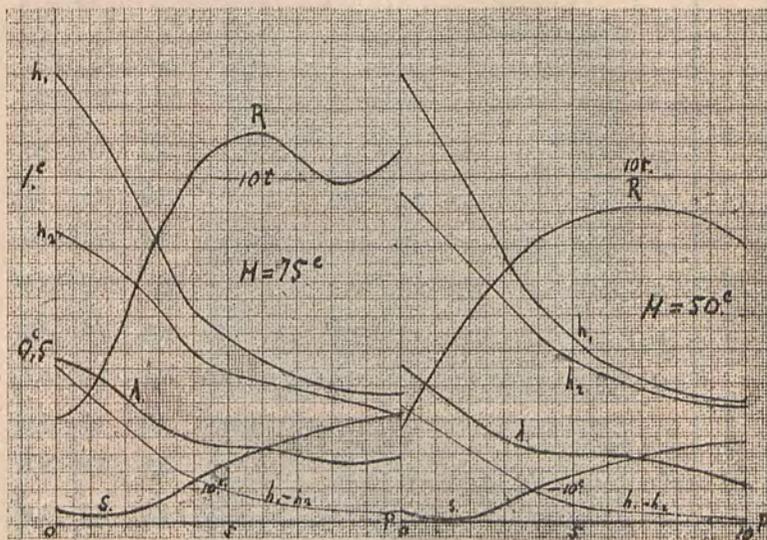


Фиг. 20.

N —номеръ стали, T —температура отпуска въ градусахъ Цельсія, E и e предѣлы упругости въ kgs на кв. сант. во время статическаго растяженія и сжатія; R разрывающее усилие при растяженіи (единицы тѣ же); A и S —соотвѣтственное продольное удлиненіе и поперечное сжатіе въ $\%$, C и F —наибольшія усилія во время сжимающаго и изгибающаго удара въ тоннахъ; c_1 и f_1 соотвѣтственныя сжатіе и стрѣла прогиба въ mm, c_2 и f_2 —максимумы тѣхъ же величинъ, т. е. окончательныхъ упругихъ и остающихся деформаций.

	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	<i>T</i>	350°	400°	450°	475°	500°	525°	550°	575°	600°	650°
Сближеніе волоконъ.	<i>E</i>	149	141	136	126	117	111	100	103	96	80
	<i>R</i>	159	156	139	127	119	114	111	108	104	87
	<i>A</i>	6,7	6,7	7,7	8,5	10,8	11,6	10,0	14,9	11,1	19,6
	<i>S</i>	25,0	29,0	35,5	36,5	45,2	48,7	45,2	53,1	49,8	62,3
	<i>l</i>	>177	>177	138	133	122	116	109	108	102	80
	<i>C</i>	8,2	8,6	8,1	8,2	7,9	7,8	8,0	7,1	7,6	6,7
	<i>c</i> ₁	0,7	0,2	0,8	0,7	1,8	0,9	1,0	1,3	1,3	1,6
	<i>c</i> ₂	2,3	1,9	2,4	2,8	3,3	2,8	3,1	3,1	3,2	3,6
	<i>F</i>	3,1	2,9	2,8	2,4	2,0	2,0	2,0	2,0	2,1	1,9
	<i>f</i> ₁	2,1	2,8	2,2	2,7	2,7	2,1	2,0	2,2	2,4	2,6
	<i>f</i> ₂	7,6	7,0	6,8	7,8	7,8	7,9	7,1	7,6	7,8	8,4
	Распорженіе волоконъ.	<i>E</i>	147	140	133	126	120	112	105	98	95
<i>R</i>		158	146	137	128	122	116	109	102	100	86
<i>A</i>		1,8	4,1	8,1	7,7	8,8	10,6	12,3	13,9	12,4	18,6
<i>S</i>		4,7	9,2	16,6	33,0	30,4	36,2	42,8	50,9	42,8	57,3
<i>l</i>		>177	143	122	120	118	111	108	103	95	74
<i>C</i>		9,0	9,0	7,9	8,6	8,0	8,1	8,0	7,9	7,8	6,4
<i>C</i> ₁		1,0	0,7	0,8	1,0	1,0	1,1	1,0	1,0	1,2	1,8
<i>C</i> ₂		2,8	2,7	2,9	3,0	2,9	3,2	3,0	3,1	3,2	3,5
<i>F</i>		3,2	2,1	2,8	3,0	2,3	2,2	2,2	2,3	2,0	1,9
<i>f</i> ₁		1,6	2,9	2,2	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,2	2,3
<i>f</i> ₂		4,6	7,7	8,0	8,6	8,2	8,0	8,0	8,2	7,7	7,8

На фиг. 21 и 22 показаны результаты другихъ опытовъ, исполненныхъ на приборѣ фиг. 1 при изученіи вліянія предварительнаго обжатія h_1 (усиліемъ P) крешерныхъ столбиковъ



Фиг. 21 и 22.

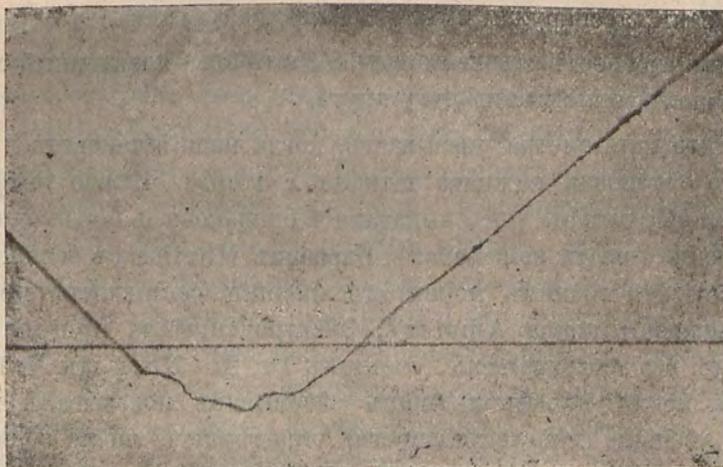
на ихъ сопротивленіе R удару, на величину h_2 ихъ окончательнаго обжатія (дожатіе λ) и на взлетъ бабы S послѣ удара (масштабъ для S взять во сто разъ меньше, чѣмъ для λ).

Итакъ, пружинный приборъ (фиг. 1) годенъ для заводской пробы, ибо даетъ зависимость между усиліями и деформациями. Но къ сожалѣнію сюда примѣшиваются вибраціи динамометра. Постараемся ихъ изучить. Быть можетъ тогда мы ихъ учтемъ, исключимъ и возстановимъ истинную искомую зависимость. Начнемъ свое изученіе съ опыта.

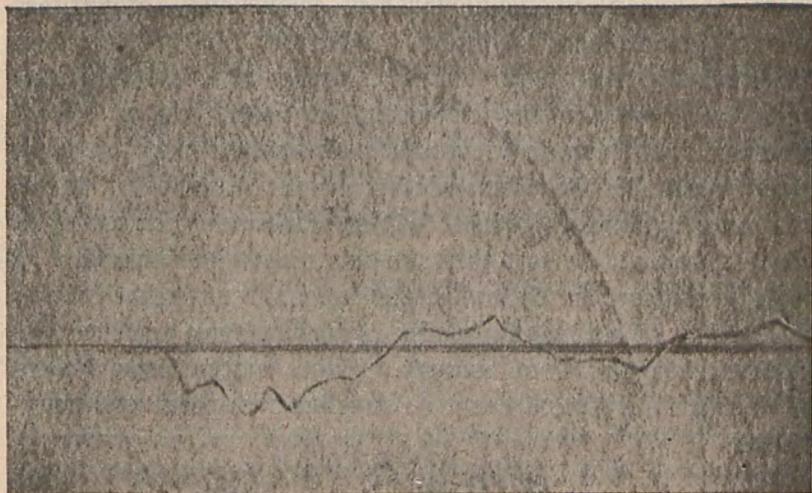
§ 12. Опыты при участіи барабана Морин'а.

Нашъ приборъ фиг. 1 отвѣчаетъ обычному требованію отъ испытательныхъ машинъ и даетъ зависимость между усиліями и деформациями, не вводя элемента времени, котораго обыкновенно не спрашиваютъ отъ статическихъ машинъ. Намъ время теперь однако важно для разбора поднятаго вопроса и для этого мы во время одного какого-либо удара одновременно производимъ автоматическихъ три разнородныхъ записи. Такъ въ случаѣ, когда образца нѣтъ 1) на

чашѣ k (фиг. 1) жало иглы пишетъ нулевую ординату (фиг. 4); 2) на барабанѣ x Морин'а баба перомъ y чертитъ свою траекторію (фиг. 23); 3) на томъ же барабанѣ пониже наковальня перомъ z одновременно записываетъ свои колебанія фиг. 24.



Фиг. 23.



Фиг. 24.

Разстояніе между осями абсциссъ послѣднихъ двухъ записей для насъ безразлично. Важно, чтобъ на одной вертикали записи бабы и динамометра отвѣчали одному времени. Поэтому важно, чтобы оба острія штифтовъ были строго на одной вертикали. Въ виду этого трубка z (фиг. 1), вставленная туго въ наковальню, высверлена съ эксцентриситетомъ въ 0,05 сант., а снаружи имѣетъ грани, какъ гайка.

При поворотѣ ключемъ трубки, штифтъ, вдавленный въ ея каналъ, описываетъ дугу круга.

Нить катетометра указываетъ, когда надо остановиться и когда установка нижняго штифта z готова. Важно также, чтобы оба штифта y и z выдавались одинаково и могли одновременно писать на барабанѣ. Барабанъ Morin'a съ большой массой и большимъ моментомъ инерціи составляетъ принадлежность копра Amsler'a. Электродвигатель приводитъ его въ быстрое вращеніе, счетчикъ Dr. Th. Horn въ Лейпцигѣ послѣ провѣрки (нашъ экземпляръ показывалъ на 2,8% больше дѣйствительности) опредѣляетъ число оборотовъ барабана, а два реостата даютъ возможность установить любое число оборотовъ на довольно продолжительное время. Скорость вращенія барабана должна быть достаточно велика, чтобы абсциссы, пропорціональныя временамъ, отсчитывались въ достаточно крупномъ масштабѣ. Но эта же скорость должна быть достаточно мала, чтобы пересѣченія траекторій съ осью абсциссъ происходили подъ углами, достаточными для точности отсчетовъ разстояній между точками пересѣченій. На барабанѣ мы натягиваемъ „свинцовую“ индикаторную бумагу. Опустивъ бабу на наковальню, мы отъ руки поворачиваемъ барабанъ такъ, чтобы штифтъ, находящійся на бабѣ, начертилъ на бумагѣ ось абсциссъ, и поднимаемъ бабу на 75 сант. Пускаемъ барабанъ съ подобранною удобною скоростью n оборотовъ въ минуту. Длина окружности бумаги на барабанѣ $c = 31,05$ сант. и линейная скорость его получается

$$v = \frac{nc}{60} = \frac{n31,05}{60} = 0,5174 n \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$$

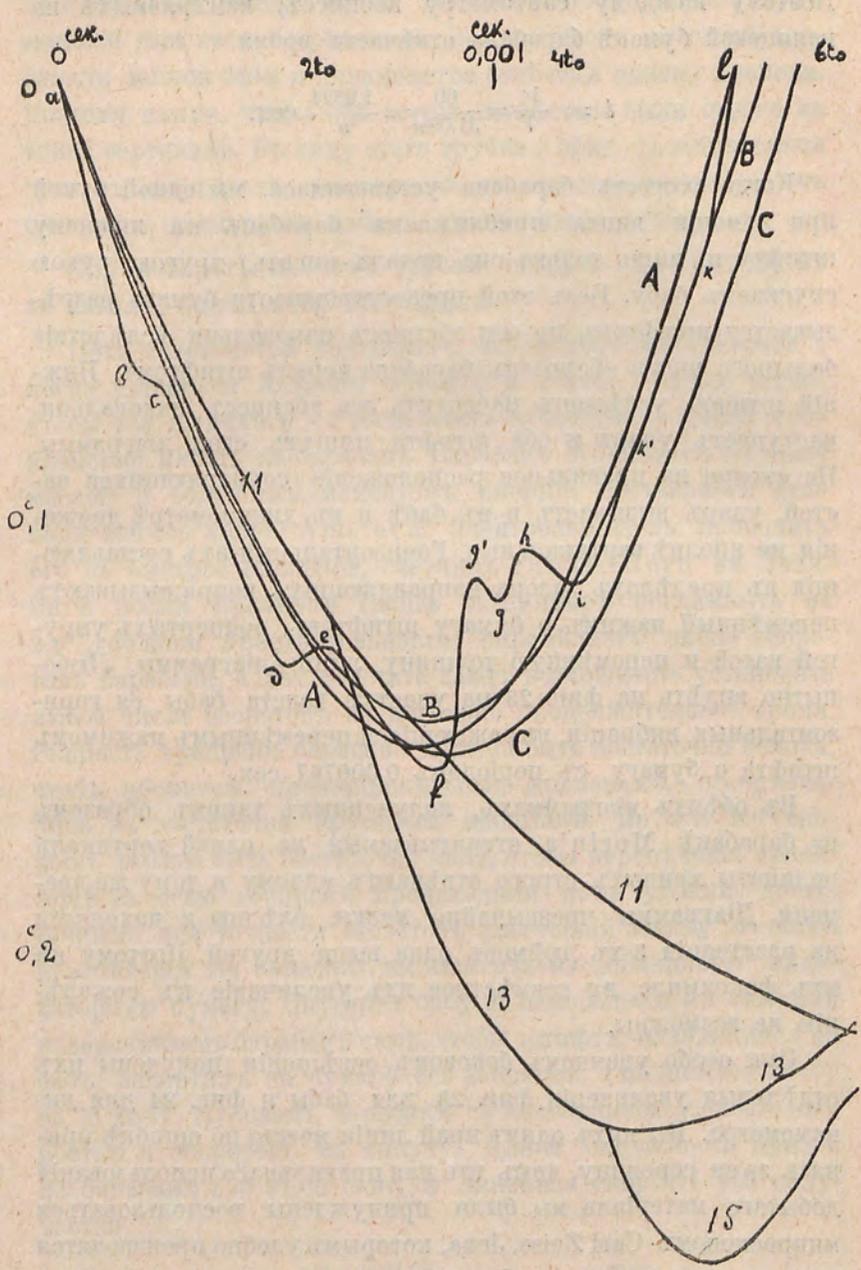
Поэтому каждому сантиметру абсциссъ, измѣряемыхъ на глянцевой бумагѣ барабана отвѣчаетъ время

$$t = \frac{1^c}{V} = \frac{60}{31,05n} = \frac{1,9324}{n} \text{ сек.}$$

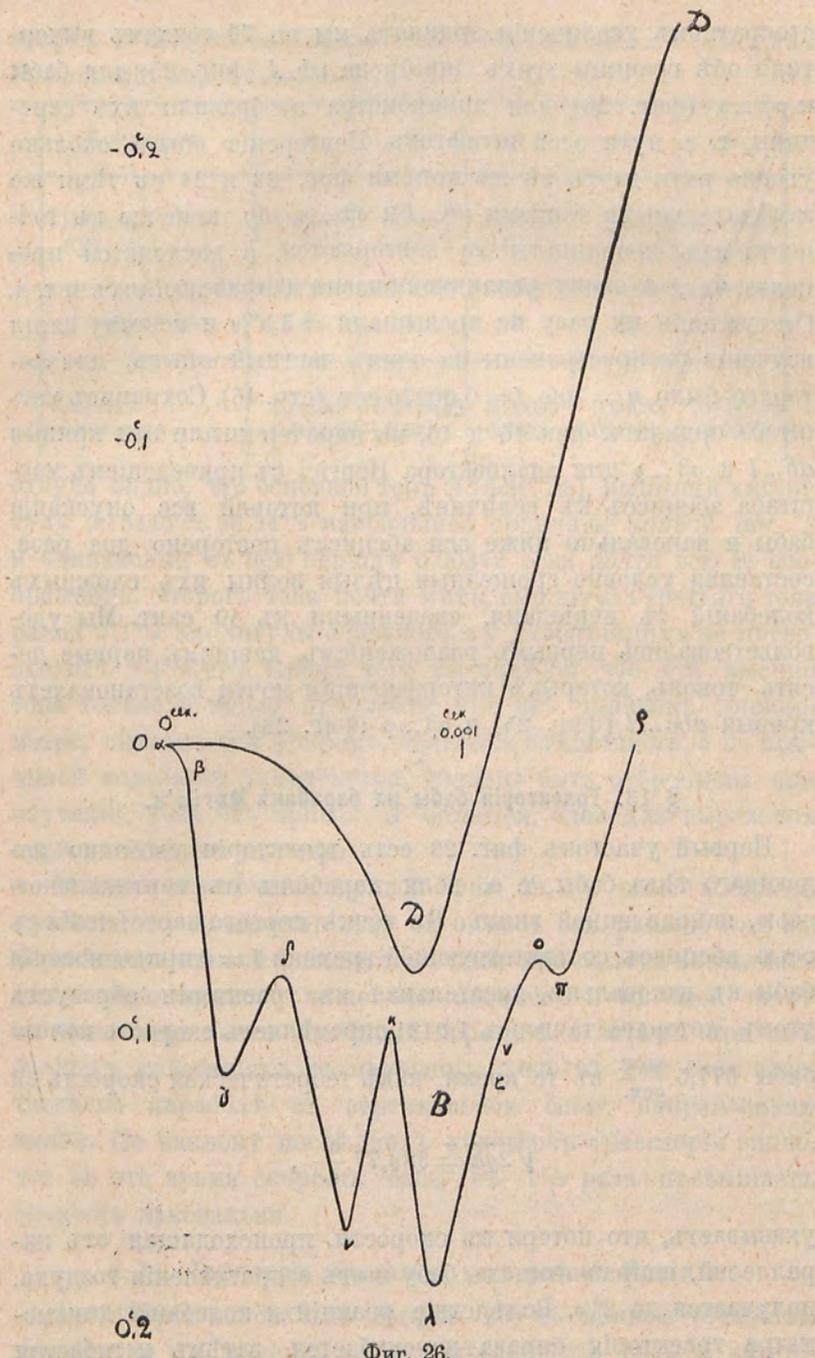
Когда скорость барабана установилась, мы одной рукой при помощи винта приближаемъ барабанъ къ нижнему штифту и, лишь только онъ началъ писать, другою рукою спускаемъ бабу. Безъ этой предосторожности бумага разрѣзывается штифтомъ по оси абсциссъ наковальни вѣлѣдствие большого числа оборотовъ барабана передъ штифтомъ. Нижний штифтъ успѣваетъ начертить ось абсциссъ наковальни, наступаетъ ударъ и оба штифта пишутъ свои діаграммы. Не смотря на правильное расположеніе соударяющихся частей, ударъ вызываетъ и въ бабѣ и въ динамометрѣ движенія не вполне вертикальныя. Горизонтальныя ихъ составляющія въ предѣлахъ зазора направляющихъ копра вызываютъ переменный нажимъ о бумагу штифтовъ, подпертыхъ упругой ватой и переменную толщину линіи діаграммы. Любопытно видѣть на фиг. 23 на участкѣ взлета бабы ея горизонтальныя вибраціи, выражающіяся переменнымъ нажимомъ штифта о бумагу, съ періодомъ 0,000767 сек.

Въ обѣихъ діаграммахъ, полученныхъ такимъ образомъ на барабанѣ Mopin'a отсчитываемыя на одной вертикали ординаты кривыхъ строго отвѣчаютъ одному и тому же времени. Діаграммы чрезвычайно мелки, блѣдны и находятся на разстояніи 3-хъ дюймовъ одна выше другой. Поэтому ни ихъ факсимиле, ни совмѣстное ихъ увеличеніе къ сожалѣнію не возможны.

При особо удачномъ боковомъ освѣщеніи получены ихъ отдѣльныя увеличенія фиг. 23 для бабы и фиг. 24 для динамометра. Въ нихъ одинъ край линіи можно по ошибкѣ принять за ея середину, такъ что для правильнаго использованія добытаго матеріала мы были принуждены воспользоваться микроскопомъ Carl Zeiss, Jena, которымъ удобно производятся отсчеты координатъ замѣчательныхъ точекъ съ точностью до микрона и въ масштабѣ 0,0001 сек. въ сантиметрѣ и при



Фиг. 25.



Фиг. 26.

стократномъ увеличеніи ординатъ мы по 79 точкамъ вычертили обѣ границы этихъ линій на $ab...l$ (фиг. 25) для бабы и $\alpha\beta...p$ (фиг. 26) для динамометра изобразили ихъ середины, т. е. пути осей штифтовъ. Повтореніе опыта сколько угодно разъ даетъ тѣ же кривыя фиг. 23 и 24 съ тѣми же замѣчательными точками $ab...l$ и $\alpha\beta...p$, но конечно въ точности ихъ координаты не повторяются, а расходятся процента на ± 3 ввиду различной смазки направляющихъ и т. д. Отступленія ни разу не превышали $= 3,5^0\%$ и поэтому наши изученія распространены на одинъ частный опытъ, для котораго было $n = 700$; $t = 0,00276$ сек. (стр. 45). Сохранивъ масштабъ ординатъ фиг. 15 и 16, мы перечерчивали эти кривыя $ab...l$ и $\alpha\beta...p$ для анализатора Ненрісі съ приведеніемъ масштаба абсциссъ къ величинѣ, при которой все опусканіе бабы и наковальни ниже оси абсциссъ повторено два раза, составляя условно сращенныя цѣлыя волны ихъ сложныхъ колебаній съ періодами, сведенными къ 40 сант. Мы удовольствовались первымъ разложеніемъ, давшимъ первые десять тоновъ, которыхъ интерференція почти возстановляетъ кривыя $abc...l$ (фиг. 25) и $\alpha\beta...p$ (фиг. 26).

§ 13. Траекторія бабы на барабанѣ Morin'a.

Первый участокъ фиг. 23 есть траекторія свободно падающаго тѣла бабы, т. е. доля параболы съ вертикальною осью, направленной внизъ. Въ точкѣ перваго пересѣченія съ осью абсциссъ, соотвѣтствующей времени $t = 0$ прикосновенія бабы къ наковальнѣ, касательная къ траекторіи образуетъ уголъ, котораго тангенсъ 1,0421 опредѣляетъ скорость полета бабы $377,5 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$ въ то время, какъ теоретическая скорость ея

$$\sqrt{2gh} = 383,77 \frac{\text{с.}}{\text{с.}},$$

указываетъ, что потеря въ скорости, происходящая отъ параллелей, направляющихъ бабу и отъ сопротивленія воздуха, получается до 2⁰%. Вслѣдствіе реакціи и колебаній динамометра траекторія справа перегибается, затѣмъ изгибается

вверхъ и получаетъ отраженныя вибраціи $abc \dots l$ (фиг. 25).
Разложеніе анализаторомъ даетъ:

Номеръ тона.	1	2	3	4	5
Періодъ	0,00312	0,00156	0,00104	0,00078	0,000624
Амплитуда	0,15415	0,00172	0,01107	-0,00629	0,035766

Номеръ тона.	6	7	8	9	10
Періодъ	0,00052	0,000445	0,00039	0,00035	0,000312
Амплитуда	-0,000028	-0,041	0,0034	0,0068	-0,0013

откуда видно, что основной тонъ A (фиг. 25), имѣющій амплитуду $0,15415 = 96,34\%$ наибольшей ординаты кривой $abc \dots l$ и одинаковый съ нею періодъ $0,00312$ сек., почти всю ее изображаетъ, второго тона почти нѣтъ, амплитуда третьяго тона равна $7,1\%$ амплитуды основного, а у дальнѣйшихъ не превосходитъ $4,4\%$ его. Кромѣ того мы видѣли, что эти высшіе тона только и могли произойти что отъ толчковъ динамометра, вызванныхъ ударомъ, являются слѣдствіемъ, а не причиной колебаній динамометра, должны быть отброшены при изученіи, такъ что кривая A остается одна для выраженія первоначальнаго явленія.

Второе пересѣченіе кривой фиг. 23 съ осью абсциссъ происходитъ приблизительно на $0,00001$ сек. раньше того же пересѣченія кривой фиг. 24, т. е. баба при взлетѣ оставляетъ наковальню немного ниже оси абсциссъ и въ этой точкѣ ея траекторія даетъ послѣдній перегибъ и затѣмъ при свободныхъ колебаніяхъ съ періодомъ $0,000767$ сек. баба взлетаетъ по параболѣ съ вертикальною осью, направленною внизъ. По наклону послѣднихъ участковъ траекторіи видно, что въ это время скорость бабы въ $1\frac{1}{2}$ раза превышаетъ скорость наковальни.

§ 14. Траекторія наковальни на барабанѣ Morin'a.

Траекторія наковальни B (фиг. 26) съ полною точностью начинается въ моментъ $t=0$ прикосновенія бабы и катето-

метръ Société Genevoise указываетъ, что точки a фиг. 25 и α фиг. 26 находятся строго на одной вертикали. Въ точкѣ β скорость наковальни, опустившейся на 0,0125 сант. нагоняетъ $\left(377,5 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}\right)$ и обгоняетъ скорость бабы, достигая 925,95 $\frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$ и развивая въ теченіи 0,00008 сек. ускореніе до 115,74 километровъ въ секунду². При этомъ шарикъ i иглы, движущейся вмѣстѣ съ наковальней и отстоящій отъ центра шарика o на разстояніи 1,218 сант., доставляетъ иглѣ угловое ускореніе $\omega = 9502463 \frac{1}{\text{сек.}^2}$, или болѣе полутора миллионъ оборотовъ въ секунду². Въ точкѣ x (фиг. 26) ускореніе значительно больше. Разложеніе траекторіи наковальни анализаторомъ даетъ:

Номеръ тона.	1	2	3	4	5
Періодъ . . .	0,00312	0,00156	0,00104	0,00078	0,000624
Амплитуда . . .	0,04814	0,001925	0,00531	0,01165	0,009292

Номеръ тона.	6	7	8	9	10
Періодъ	0,00032	0,000445	0,00039	0,00035	0,000312
Амплитуда . . .	-0,00933	0,0025	0,00334	-0,0188	-0,011403

Въ то время, какъ амплитуда основного тона траекторіи бабы составляла 96,34% наибольшей ординаты этой траекторіи, здѣсь амплитуда основного тона траекторіи наковальни составляетъ лишь 26,31% наибольшей ординаты траекторіи и вліяніе высшихъ тоновъ значительно. Ихъ амплитуды доходятъ (см. девятый тонъ) до 0,01188 сант., т. е. почти до половины амплитуды основной синусоиды, тогда какъ амплитуда вызванныхъ ими высшихъ тоновъ колебанія бабы не превосходятъ 7% основного тона. Интерференція высшихъ тоновъ траекторіи наковальни даетъ ординаты (напр. $\lambda = 0,1755$ сант.), болѣшя вызванныхъ ими въ траекторіи бабы ($f = 0,1600$ сант.). Розмахи наковальни вверхъ (см. δ и x

фиг. 26) отдаляютъ бабу на величину, значительно бóльшую 0,0125 сант. ихъ общей наибольшей деформаци, оказавшейся достаточною, чтобы наковальня пріобрѣла и обогнала скорость бабы. Это доказываетъ, что наковальня нѣсколько разъ ударяетъ по бабѣ снизу вверхъ. Судя по кривой *B* фиг. 26 толчки происходятъ на пути между парами точекъ γ и δ , ϵ и ζ и между μ и ν черезъ времена около 0,0004 сек.

Мы видимъ, что при аналитическомъ разсмотрѣніи вопроса мы должны отказаться отъ принятого до сихъ поръ всеѣми положенія, что существуетъ промежутокъ времени, въ теченіи котораго баба и динамометръ составляютъ систему, имѣющую общую скорость, общую траекторію и общую величину опусканія. Мы наоборотъ видимъ, что ихъ скорости, величины опусканія и траекторіи все время отдѣльныя и что зависимости между ними сложны и аналитически не изслѣдованы.

Траекторія наковальни возвращается къ оси абсциссъ на 0,00001 сек. послѣ траекторіи бабы. Послѣ пересѣченія оси абсциссъ траекторія наковальни представляется въ видѣ волнъ затухающихъ весьма сложныхъ колебаній.

§ 15. Приближенный способъ *St. Venant* опредѣленія траекторіи бабы и наковальни.

Мы видѣли, что происходитъ въ дѣйствительности съ бабой и наковальной. Посмотримъ теперь насколько близко сюда подошли аналитическіе пути *St. Venant*, *Love*, *Fourier*, *Sarreau & Vielle* и *A. H. Крылова*.

На страницѣ 25 мы нашли массу бабы . . . $M=12591$ гр.
 На страницѣ 19 массу наковальни $\mu=2151,4$ „
 и въ § 4 массу упругой части динамометра . $M'=5373,2$ „

Скорость, съ которой баба приходитъ въ соприкосновеніе съ наковальной, $V_0=377,5$ (стр. 48). Количество движенія до удара равно количеству движенія тотчасъ послѣ удара. Допустимъ приближенно, что въ этотъ моментъ осѣданіе различныхъ точекъ динамометра пропорціонально ихъ разстоя-

нію отъ закрѣпленнаго конца и что скорость V бабы равна скорости наковальни. Мы получимъ

$$MV_0 = MV + \mu V + V \int_0^l \rho s \frac{z^2}{l^2} dz = V \left(M + \mu + \frac{\rho s l}{3} \right) = \\ = \left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) V;$$

откуда

$$V = \frac{V_0}{1 + \frac{\mu}{M} + \frac{M'}{3M}} = 288 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$$

Съ этой скоростью (мы здѣсь предполагаемъ) верхній конецъ упругой части динамометра мгновенно выводится внизъ изъ положенія равновѣсія. Далѣе никакія внѣшнія силы болѣе на него не дѣйствуютъ и онъ начинаетъ свои свободныя колебанія, которыя для первой полуволны B (фиг. 25) происходятъ при „приклеенной“ бабѣ.

Располагаемъ начало координатъ въ нижнемъ концѣ упругой части динамометра и направляемъ вдоль по немъ вверхъ ось z . Сжатіе всего динамометра и ускореніе силы тяжести, направленныя внизъ, будемъ поэтому сопровождать знакомъ —. Сила нажатія бабы

$$\left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) \frac{d^2 W}{dt^2} \text{ и вѣсъ } - \left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) g,$$

направленные внизъ, равны силѣ упругости

$$P = - \frac{E s w}{l},$$

направленной вверхъ и получаемой изъ

$$E = \frac{P}{\frac{s}{w}}.$$

Итакъ

$$\left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - g \right) + \frac{W s E}{l} = 0.$$

¹⁾ Lord Rayleigh, Theory of Sound I. Page 250.

Подставляя

$$Sl\rho = M' = 5273,2, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 484981 \text{ (§ 4 и стр. 22).}$$

$$\frac{M'}{M + \frac{M'}{3}} = \frac{5273,2}{12591 + 2151,4 + \frac{5273,2}{3}} = 0,3195853 = \frac{1}{m}$$

и „частоту“ (выражение Lord'a Rayleigh)

$$k = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{m}} = 1937,7 \frac{1}{\text{сек.}},$$

означающую число колебаній въ 2π секундъ, мы получимъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2w}{dt^2} + k^2w = g$$

По сравненію съ ускореніемъ $\frac{d^2w}{dt^2}$, доходящимъ до 116 километровъ въ секунду² (стр. 50), мы вполне можемъ здѣсь и во всѣхъ дальнѣйшихъ методахъ принять правую часть уравненія за нуль.

Тогда мы будемъ здѣсь имѣть уравненіе

$$\frac{d^2w}{dt^2} + k^2w = 0,$$

котораго общій интегралъ напишемъ ввидѣ уравненія

$$w = A \sin kt + B \cos kt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

съ одной парой тригонометрическихъ членовъ вмѣсто ряда ихъ. При $t = 0$ мы перемѣщенія еще не имѣемъ и здѣсь

$$(w)_{t=0} = 0.$$

и начальная скорость (стр. 52)

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = V = 288$$

и (1) даетъ $0 = B$, а производная (1) даетъ

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = V = 288 = AK,$$

откуда амплитуда

$$A = \frac{V}{k} = 0,1486 \text{ сант.}$$

меньше дѣйствительной амплитуды бабы на 3,6%.

Уравнение (1) теперь превратилось въ

$$W = A \sin kt = 0,1486 \sin 1937,7 t.$$

Когда t равно четверти періода колебаній, т. е. когда

$$t = \frac{\tau}{4},$$

мы имѣемъ

$$\sin kt = \sin \frac{k\tau}{4} = 1$$

и фаза

$$\frac{k\tau}{4} = \frac{\pi}{2},$$

дастъ періодъ

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 0,00324 \text{ сек.}$$

который больше дѣйствительнаго на 3,93%.

Усиліе P (стр. 52), которымъ динамометръ статически уравниваетъ вѣшную силу, вызвавшую деформацию $w = A = 0,1486$ сант. получается въ динахъ

$$P = \frac{Esw}{l} = 92 \cdot 10^8 \text{ (§ 4, стр. 21 и 53),}$$

а въ единицахъ массы $\frac{P}{g} = 9,4$ тоннамъ. Кривая B (фиг. 25) выражаетъ по St. Venant законъ свободного колебанія динамометра съ придѣланной наковальной и какъ-бы проросшей бабой. Эта кривая очень близка къ кривой A основнаго тона дѣйствительной траекторіи бабы, ея амплитуда составляетъ 96,3%, а періодъ 103,8% дѣйствительной A . Съ траекторіей динамометра кривая St. Venant'a не имѣетъ ничего общаго.

Строго математическія рѣшенія задачи свободныхъ продольныхъ колебаній.

§ 16. Полученіе основнаго уравненія Navier 1823 г. ¹⁾. Представимъ себѣ, что баба, долетѣвъ до динамометра, продолжаетъ опускаться и что ея переменное нажатіе встрѣчаетъ упругое противодѣйствіе динамометра, которое въ одномъ сѣченіи a назовемъ p , а въ другомъ сѣченіи b , находящемся на безконечно маломъ разстояніи dz отъ перваго, будетъ,

$$p + dp = p + \frac{dp}{dz} dz.$$

Разность между усилиями въ b и a по D'Alembert равна массѣ отрѣзка между этими сѣченіями, умноженной на его ускореніе t . е.

$$p + \frac{dp}{dz} dz - p = \rho s dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

гдѣ ρ плотность, s сѣченіе, w перемѣщеніе и dw сжатіе отрѣзка. По сокращеніи мы получимъ

$$\frac{dp}{dz} = \rho s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots \dots \dots (2)$$

Съ другой стороны

$$E = \frac{P}{\frac{s}{dw}} \text{ даетъ } p = Es \frac{dw}{dz},$$

откуда

$$\frac{dp}{dz} = Es \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

подставленное въ (2) даетъ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots \dots \dots (3)$$

Подставимъ сюда (стр. 22) $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 484981$

¹⁾ Clebsch. St. Venant. Théorie de l'élasticité des corps solides Paris 1883.

выраженіе скорости распространения продольныхъ колебаній въ динамометрѣ и мы получимъ уравненіе его свободныхъ колебаній

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} (4)$$

По поводу этого уравненія Routh ¹⁾ указываетъ, что хотя въ немъ пренебрегается скорость, съ какою во время удара происходитъ поперечное расширеніе динамометра ²⁾, но по изслѣдованіямъ Chree эта скорость ничтожна и поскольку законъ Гука справедливъ, уравненіе (4) не приближенное, а вполнѣ точное для сѣченій не слишкомъ близкихъ къ мѣсту закрѣпленія. Какъ мы увидимъ далѣе (способъ Fourier) съ этимъ можно согласиться для основного тона траекторіи бабы на барабанѣ Morin'a, но не для динамометра.

§ 17. Рѣшеніе посредствомъ прерывистыхъ функцій (Назовемъ его способомъ Love ³⁾).

Общее рѣшеніе свободныхъ колебаній (3) напишемъ видѣ

$$w = f(at - z) + F(at + z) (5)$$

гдѣ a скорость распространения продольныхъ колебаній въ динамометрѣ. Составимъ граничныя условія.

1. Love ставитъ начало координатъ въ точкѣ, въ которой ось динамометра встрѣчаетъ верхнее сѣченіе упругой его

¹⁾ Edward John Routh. Dynamics of a System of Rigid Bodies, II § 612. Нѣмецкій переводъ 1898 стр. 465 и шестое англійское изданіе 1905 стр. 413.

²⁾ Lord Rayleigh. Theory of Sound, § 157 стр. 257.

³⁾ Love. "A treatise on the mathematical Theory of elasticity II, chapter XVII, §§ 274—277, 1893.

Edward John Routh, Ibidem II §§ 612—615.

Boussinesq. Application des potentiels.

St. Venant Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris 1883 стр. 480.

Pearson: «Elastic researches of Barré de St. Venant, articles 389—341 и 401—407.

части во время покоя, когда баба не касается наковальни и направляет вниз положительные z . Это дѣлается для получения удобнаго вида предстоящаго уравненія (6). Первое граничное условіе заключается въ томъ, что нижній конецъ упругой части динамометра никогда не колеблется, т. е. въ $z=l$ при всякомъ t имѣемъ

$$(w)_{z=l} = f(at-l) + F(at+l) = 0.$$

Перенеся здѣсь постоянное l подъ знаками функций, мы найдемъ первое условіе

$$F(at) = -f(at-2l)$$

Подставивъ его въ общее рѣшеніе (4) мы получимъ

$$w = f(at-r) - f(at+z-2l) (6)$$

2. Love разсматриваетъ идеальный случай горизонтальнаго удара по динамометру безъ собственной массы и безъ неупругой головки наковальни.

Отъ вертикальнаго направленія удара появляется членъ g (стр. 53), которымъ мы опять пренебрегаемъ, словомъ мы не будемъ дѣлать различія между вертикальнымъ и горизонтальнымъ ударами.

Массы мы введемъ тѣже (стр. 51) что и у St. Venant'a и этимъ введемъ поправку на наковальню и на массу динамометра, черезъ P мы обозначимъ переменное нажатіе на верхній отрѣзокъ $z=0$ динамометра, черезъ w соответственное переменное перемѣщеніе этого отрѣзка и черезъ dw соответственное переменное линейное сжатіе этого отрѣзка. Переменная сила нажатія, равная произведенію массы на ускореніе будетъ для всякаго $t > 0$:

$$P = \left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

направлена внизъ, въ положительную сторону. Въ динамометрѣ относительное сжатіе верхняго отрѣзка, имѣющаго высоту dz , равно

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0}$$

Противодѣйствіе динамометра, направленное вверхъ, въ отрицательную сторону, по закону Гука будетъ

$$P = -Es \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0}$$

откуда

$$\left(M + \mu + \frac{M'}{3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -Es \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} \dots \dots (7)$$

Подставляя

$$sl \rho = M' (\S 4); E = a^2 \rho \text{ (стр. 22)}$$

и

$$\frac{1}{m} = \frac{M'}{M + \mu + \frac{M'}{3}} = 0,319585 \text{ (стр. 53),}$$

мы получимъ какъ второе граничное условіе для (5), что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{a^2}{ml} \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0} \dots \dots (8)$$

Чтобы связать уравненія (6) и (8), обозначимъ

$$at - z = \varphi; \quad at + z - 2l = \psi$$

и продифференцируемъ (6) одинъ разъ по z :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{df}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = f'(at - z)(-1) + f'(at + z - 2l)(+1)$$

и подставимъ $\frac{\partial w}{\partial z}$ въ правую часть уравненія (8).

Затѣмъ продифференцируемъ (6) два раза по t , для чего воспользуемся тѣми же обозначеніями φ и ψ , подставимъ $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ въ лѣвую часть уравненія (8) и, положивъ $z = 0$, получимъ

$$a^2 f''(at - 0) - a^2 f''(at - 0 - 2l) = -\frac{a^2}{ml} [f'(at - 0) - f'(at + 0 - 2l)]$$

$$\text{или } f''(at) + \frac{1}{ml} f'(at) = f''(at - 2l) - \frac{1}{ml} f'(at - 2l) \dots \dots (9)$$

дифференціальное уравненіе, въ которое введены условія закрѣпленія именно: нижній конецъ неподвиженъ (6), а въ колебанія верхняго введены обусловливающіе ихъ элементы

a , m и l (8). Введемъ теперь начальныя условія. При $t=0$ имѣемъ

$$f'(at) = \frac{V}{a}; \quad f(at) = 0.$$

Назовемъ черезъ t_0 продолжительность распространения колебаній отъ одного конца динамометра до другого. Тогда

$$t_0 = \frac{l}{a} = 0,0002917 \text{ сек. (}\S 4 \text{ и стр. 22).}$$

Когда $0 < t < 2t_0$ отрицательное время $-2t_0 + t$ отвѣчаетъ пройденному продольными колебаніями пути

$$at - 2l = at - 2at_0 = -(2t_0 - t) a.$$

Этому времени $-2t_0 + t$, предшествующему удару, отвѣчаетъ покой, почему для него

$$f'(at - 2l) = 0 \quad \text{и} \quad f(at - 2l) = 0.$$

Проинтегрируемъ (9) въ предѣлахъ отъ 0 до t , положивъ для краткости $at = \zeta$. Получимъ:

$$f'(\zeta) - \frac{V}{a} + \frac{1}{ml} f(at) - \frac{1}{ml} \cdot 0 = f'(\zeta - 2l) - 0 - \\ - \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) + \frac{1}{ml} \cdot 0$$

или

$$f'(\zeta) + \frac{1}{ml} f(\zeta) = \frac{v}{a} + f'(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) \quad \dots \quad (10)$$

линейное дифференціальное уравненіе типа

$$y' + Xy + X_1 = 0,$$

котораго рѣшеніе

$$y = -e^{-\int X dx} \int e^{\int X dx} X_1 dx.$$

$$\text{Здѣсь } x = \zeta; \quad X = \frac{1}{ml}; \quad \int X d\zeta = \frac{\zeta}{ml}$$

$$X_1 = -\frac{V}{a} - f'(\zeta - 2l) + \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l)$$

$$f(\zeta) = -e^{-\frac{\zeta}{ml}} \int \frac{\zeta}{ml} \left[-\frac{V}{ml} - f'(\zeta - 2l) + \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) \right] d\zeta.$$

Такъ какъ $f'(\zeta - 2l) = f(\zeta - 2l) = 0$, это уравненіе сводится къ

$$f(\zeta) = \frac{V}{a} e^{-\frac{\zeta}{ml}} \int e^{\frac{\zeta}{ml}} d\zeta =$$

$$= \frac{V}{a} e^{-\frac{\zeta}{ml}} \left(e^{\frac{\zeta}{ml}} \cdot ml - 1 \right) = \frac{V}{a} ml \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) =$$

$$f(\zeta) = \frac{V}{a} ml \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) \dots \dots \dots (11)$$

$$f'(\zeta) = \frac{V}{a} e^{-\frac{\zeta}{ml}} \dots \dots \dots (12)$$

Теперь возьмемъ слѣдующій періодъ времени, когда t растётъ отъ $2t_0 = 0,000583$ сек. до $4t_0 = 0,001167$ сек. Въ это время разстояніе ζ удовлетворяетъ неравенству $2at_0 - 2b < at = \zeta < 4at_0 = 4l$, или $2l < \zeta < 4l$ и въ уравненіи (10) лѣвая часть соотвѣтствуетъ времени t . Изъ нея, какъ изъ линейнаго дифференціального уравненія, мы опредѣляемъ f интегрированіемъ, а правая соотвѣтствуетъ времени, для котораго мы изъ (11) и (12) уже нашли f и f' . Такимъ образомъ мы имѣемъ для $2l < \zeta < 4l$

$$f(\zeta) = ml \frac{V}{a} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) + ml \frac{V}{a} \left[-1 + \left(1 + 2 \frac{\zeta - 2l}{ml} \right) e^{-\frac{-(\zeta - 2l)}{ml}} \right] \quad (13)$$

$$f'(\zeta) = \frac{V}{a} e^{-\frac{\zeta}{ml}} + \frac{V}{a} \left(1 - 2 \frac{\zeta - 2l}{ml} \right) e^{-\frac{-(\zeta - 2l)}{ml}} \dots \quad (14)$$

Для $4l < \zeta < 6l$

$$f(\zeta) = ml \frac{V}{a} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) + ml \frac{V}{a} \left[-1 + \left(1 + 2 \frac{\zeta - 2l}{ml} \right) e^{-\frac{-(\zeta - 2l)}{ml}} \right] +$$

$$+ ml \frac{V}{a} \left[1 - \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\zeta - 4l}{ml} \right)^2 \right\} e^{-\frac{-(\zeta - 4l)}{ml}} \right] \dots \quad (15)$$

$$f'(\zeta) = \frac{V}{a} e^{-\frac{\zeta}{ml}} + \frac{V}{a} \left(1 - 2 \frac{\zeta - 2l}{ml} \right) e^{-\frac{-(\zeta - 2l)}{ml}} +$$

$$+ \frac{V}{a} \left[1 - 4 \frac{\zeta - 4l}{ml} + 2 \left(\frac{\zeta - 4l}{ml} \right)^2 \right] e^{-\frac{-(\zeta - 4l)}{ml}} \dots \quad (16)$$

и т. д. Эти уравненія, полученные одни изъ другихъ: (15) и (16) изъ (13) и (14), а (13) и (14), изъ (11) и (12) и т. д.

Love называетъ continuing equations, а St. Venant: „equations promotrices“ стр. 480 м.

Пользуясь уравненіями (11) (13) (15) мы вычислили величину $f(z)$ свободного колебанія динамометра съ придѣланной наковальной и какъ бы приросшей бабой для ряда временъ и связали ихъ кривыми 11, 13, 15 (фиг. 25), расходящимися какъ съ полученными изъ опыта, такъ и полученными аналитически. Мгновеніе $t=0$ отдѣляетъ время, когда было

$$w = 0; f(at) = 0; \frac{dw}{dt} = 0; f'(at) = \frac{df(at)}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dw}{dt} = 0$$

отъ времени, когда еще не успѣло произойти никакое перемѣщеніе и еще продолжается $w=0$ и $f(at)=0$, но прикосновеніе уже имѣло мѣсто, ударъ начался и для верхняго сѣченія $z=0$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{z=0; t=0} = V = 288 \text{ сант./сек.}$$

Уравненіе движенія (7) мы составляли, приравнивая два выраженія P (стр. 57 и 58) относящихся къ одному и тому же времени.

Посмотримъ, удастся ли это сдѣлать для времени $t=0$. Для $t=0$ первое выраженіе даетъ намъ

$$|P| = M'm \left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)_{t=0} = 0,$$

а второе даетъ:

$$|P| = Es \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = Es \frac{V}{a} = 529 \cdot 10^7 \text{ динъ (стр. 58, 20, 21, 22)}$$

что соотвѣтствуетъ 5,39 тоннамъ массы. Такое нарушеніе сплошности и скачекъ отъ $P=0$ къ 5 тоннамъ при одномъ и томъ же $t=0$ уже давно занимаетъ литературу вопроса. Въ этой литературѣ указывается на необходимость опытомъ провѣрить, возможно ли примѣнять дифференціальное уравненіе (9) къ предвычисленіямъ новыхъ частныхъ случаевъ.

Morgan¹⁾ приводитъ исторію спора между D'A Lambert'омъ и Lagrange'омъ по этому вопросу и выясняетъ, въ чемъ его трудность. Lagrange²⁾ указываетъ, что можно избѣжать употребленіе прерывистыхъ функцій съ ихъ нарушеніями сплошности, если динамометръ считать невѣсомымъ, а въ вѣсѣ бабы ввести сдѣланную нами поправку (стр. 58). Poisson въ *Traité de Mécanique* дѣлаетъ другія предположенія.

Теперь прерывистыя функціи находятся во всеобщемъ употребленіи. Недоразумѣніе разрѣшается на опытѣ участкомъ $\alpha\beta$ (фиг. 26), гдѣ виденъ продолжающійся 0,00008 сек. законъ не доходящаго до предѣла упругости сминанія соударяющихся частей. Сминаніе вызываетъ плавный ростъ P отъ O до 5,4 тоннъ и затѣмъ заставляетъ площадку динамометра уйти отъ бабы и двигаться внизъ значительно быстрѣе ея.

§ 18. Рѣшеніе въ видѣ сходящагося ряда гармоническихъ выраженій (Назовемъ его „способомъ Fourier“).

По формѣ этотъ методъ совершенно отличается отъ предѣидущаго, по существу же онъ основывается на той же формулѣ (4), условія въ него вводятся тѣ же самыя и допущенія дѣлаются одни и тѣ же. Наконецъ, ходъ вычисленія хотя и слѣдуетъ по другому пути, но держится тѣхъ же директивъ. Тѣмъ не менѣе результаты получаются не схожіе съ Love, они ближе ихъ къ дѣйствительности (см. фиг. 29).

Перемѣщенія поперечныхъ сѣченій динамометра во время его продольныхъ колебаній зависятъ отъ высоты разсматриваемаго сѣченія и отъ времени. Оказывается удобнымъ давать общему интегралу уравненія (4), выражающему перемѣщенія сѣченій, видъ суммы произведеній двухъ тригонометрическихъ функцій, изъ которыхъ одна Z_i выражаетъ зависимость свободныхъ колебаній отъ разсматриваемаго

¹⁾ De Morgan. *Differential calculus* XXI стр. 727.

²⁾ Lagrange. *Mécanique analytique*, II стр. 385.

сѣченія, а другая T_i — отъ разсматриваемаго момента Колебанія обыкновенно получаютъ сложные и въ нихъ интерферируютъ синусоиды различной амплитуды и длины волны. Мы разсматриваемъ эти составляющія волны порознь и номеруемъ ихъ; i есть ихъ порядковый номеръ. Итакъ, мы общему интегралу (4) даемъ видъ:

$$w = \Sigma T_i Z_i^{-1}) \dots \dots \dots (17)$$

такъ что

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \Sigma Z_i \frac{d^2 T_i}{dt^2} \text{ и } \frac{d^2 w}{dz^2} = \Sigma T_i \frac{d^2 Z_i}{dz^2}$$

и уравненію (4) мы можемъ дать видъ

$$\Sigma Z_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} = a^2 \Sigma T_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} \dots \dots \dots (18)$$

Это общее уравненіе имѣетъ мѣсто для каждаго тона и потому мы можемъ написать:

$$Z_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} = a^2 T_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} \dots \dots \dots (19)$$

Если мы обѣ части (19) раздѣлимъ на Z_i а T_i ; получимъ:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} \frac{T_i}{Z_i}$$

и увидимъ, что лѣвая часть — функція только времени — всегда равна правой — функціи только мѣста. Такое уравненіе можетъ существовать только когда обѣ

1) Чтобы (17) было измѣренія l , необходимо: 1) чтобы въ $T_i = A_i \tau_i$ постоянный коэффициентъ A_i былъ измѣренія $l^{1/4} t^{\varphi_A}$, а переменная τ_i была бы измѣренія t^{φ_τ} и необходимо 2) чтобы въ $Z_i = B_i \zeta_i$ постоянный коэффициентъ B_i былъ бы измѣренія $l^{1/4} t^{\varphi_B}$, а переменная ζ_i была бы измѣренія l^{φ_ζ} . Величины θ и φ должны отвѣчать условіямъ

$$\theta_A + \theta_B = 1 - \theta_\zeta; \varphi_A + \varphi_B = -\varphi_\zeta$$

и лишь тогда $w = \Sigma Z_i T_i = \Sigma A_i \tau_i B_i \zeta_i$ оказывается измѣренія l .

части обозначаютъ величину, не зависящую ни отъ z ни отъ t и которую мы назовемъ $\pm k^2$. Легко доказать, что $+k^2$ даетъ лѣвой части значеніе кубической параболы, быстро возрастающей до безконечности, а правую сводить къ нулю, вызывая разрывъ динамометра. Поэтому остается принять

$$\frac{\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}}{a^2 T_i} = \frac{\frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2}}{Z_i} = -k^2$$

откуда уравненіе (19) намъ представляется разбитымъ на два:

$$\frac{d^2 Z_i}{dz^2} + k_i^2 Z_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\frac{d^2 T_i}{dt^2} + a^2 k_i^2 T_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Подставляемъ $T_i = e^{rt}$, откуда $\frac{d^2 T_i}{dt^2} = r^2 e^{rt}$ въ (21)

$$r^2 e^{rt} + a^2 k_i^2 e^{rt} = 0; \quad r^2 + a^2 k_i^2 = 0;$$

$$r_1 = ak_i \sqrt{-1}; \quad r_2 = -ak_i \sqrt{-1}.$$

Рѣшенія:

$$(T_i)_1 = e^{ak_i t \sqrt{-1}}, \quad (T_i)_2 = e^{-ak_i t \sqrt{-1}}$$

мы по Euler'у замѣняемъ комбинаціе этихъ рѣшеній, въ которой $\sqrt{-1}$ исчезаетъ, именно

$$\frac{e^{ak_i t \sqrt{-1}} + e^{-ak_i t \sqrt{-1}}}{2} = \cos ak_i t;$$

$$\frac{e^{ak_i t \sqrt{-1}} - e^{-ak_i t \sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin ak_i t.$$

Тогда общій интегралъ (21) пріобрѣтаетъ видъ

$$T_i = A_i \cos ak_i t + B_i \sin ak_i t \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

или, положивъ $A_i = \mathcal{A}_i \cos \alpha_i$; $B_i = -\mathcal{A}_i \sin \alpha_i$, мы ему дадимъ видъ

$$T_i = \mathcal{A}_i \cos \alpha_i \cos ak_i t - \mathcal{A}_i \sin \alpha_i \sin ak_i t \quad . \quad . \quad (23)$$

$$T_i = \mathcal{A}_i \cos (ak_i t + \alpha_i) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Въ случаѣ $t=0$, (22) намъ даетъ: $O=A_i=\mathcal{A}_i \cos \alpha_i$, откуда (22) и (23) превращаются въ

$$T_i = B_i \sin ak_i t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\text{и } T_i = -\mathcal{A}_i \sin \alpha_i \sin ak_i t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Въ случаяхъ, когда коэффициенты B_i или $-\mathcal{A}_i$ можно считать равными единицѣ, мы имѣемъ

$$T_i = \sin ak_i t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$T_i = \sin \alpha_i \sin ak_i t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Точно такія же дѣйствія надъ (20) намъ даютъ

$$Z_i = F_i \cos k_i z + D_i \sin k_i z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Подстановка

$$F_i = B_i \cos \beta_i; \quad D_i = -B_i \sin \beta_i$$

даетъ

$$Z_i = B_i \cos \beta_i \cos k_i z - B_i \sin \beta_i \sin k_i z \quad . \quad . \quad (30)$$

$$Z_i = B_i \cos (k_i z + \beta_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Въ случаѣ $z=0$; (29) намъ даетъ $O = F_i = B_i \cos \beta_i$; откуда (29) и (30) превращаются въ

$$Z_i = D_i \sin k_i z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$Z_i = -B_i \sin k_i z \sin \beta_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

и въ случаяхъ, когда коэффициенты D_i или B_i можно считать за единицу, уравненіе (32) и (33) превращаются въ:

$$Z_i = \sin k_i z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\text{или } Z_i = \sin k_i z \sin \beta_i \quad ^1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

¹⁾ Измѣренія T_i и \mathcal{A}_i можно обозначать черезъ $l^b \mathcal{A}_i$. Тогда измѣренія Z_i и B_i будетъ $l^{1-b} t^{-c}$ и измѣреніе w останется l . Измѣреніе k_i есть l^{-1} и измѣреніе ak есть t^{-1} . Произведеніе $\mathcal{A}_i B_i$ имѣетъ измѣреніе l .

Теперь уравнение (17) мы можем представить въ видѣ произведенія выражений (24) и (31)

$$w = \sum_{i=0}^{i=\infty} \mathcal{A}_i B_i \cos(k_i z + \beta_i) \cos(ak_i t + \alpha_i). \quad (36)$$

Введемъ въ него тѣ самыя условія (стр. 56 и 57), какія ставили при рѣшеніи вопроса посредствомъ прерывистыхъ функцій, именно, что

1) нижнее сѣченіе динамометра никогда не колеблется. Если мы въ его центрѣ поставимъ начало координатъ и въ (36) назовемъ $\mathcal{A}_i B_i = C_i$, то это условіе выразится тѣмъ, что при $z=0$ мы имѣемъ для всякаго t

$$w = 0 = \sum C_i \cos \beta_i \cos(ak_i t + \alpha_i).$$

Это можетъ имѣть мѣсто при $\cos \beta_i = 0$; $\beta_i = \pm \frac{\pi}{2}$ привсякомъ i , откуда

$$\sin \beta_i = 1; \cos(k_i z + \beta_i) = \sin k_i z,$$

затѣмъ (30) даетъ

$$Z_i = B_i \sin k_i z \quad (37)$$

и (36) превращается въ

$$w = \sum C_i \sin(k_i z) \cos(ak_i t + \alpha_i) \quad (38)$$

2) Второе условіе (7) мы, въ виду перемѣщенія начала координатъ въ нижнее сѣченіе упругой части динамометра, напишемъ такъ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{-a^2}{ml} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=l} \quad (39)$$

Здѣсь m см. стр. 53, a см. стр. 22; l см. стр. 20.

Свяжемъ уравненія (38) и (39), дифференцируя первое два раза по t для лѣвой стороны (39) и одинъ разъ по z для правой. Положивъ $z=l$, мы получимъ послѣ сокращеній, что на вершинѣ динамометра

$$-\sum k_i \sin(k_i l) \cos(ak_i t + \alpha_i) = \frac{-1}{ml} \sum \cos(k_i l) \cos(ak_i t + \alpha_i)$$

Отсюда

$$k_i l \operatorname{tg}(k_i l) = \frac{1}{m} = 0,319585 \text{ (стр. 43)}. \quad (40)$$

$$\text{Назовемъ } k_i l = \theta_i. \quad (41)$$

Корни уравнения (40) будутъ

$\theta_1 = 0,5367 = 30^{\circ}45'$	$\theta_1^2 = 0,2880$	$\frac{1}{\theta_1} = 1,863$
$\theta_2 = 3,2399 = 185^{\circ}38'$	$\theta_2^2 = 10,4970$	$\frac{1}{\theta_2} = 0,309$
$\theta_3 = 6,3335 = 365^{\circ}53'$	$\theta_3^2 = 40,1132$	$\frac{1}{\theta_3} = 0,158$
$\theta_4 = 9,4588 = 541^{\circ}57'$	$\theta_4^2 = 89,4689$	$\frac{1}{\theta_4} = 0,106$
$\theta_5 = 12,5917 = 721^{\circ}27'$	$\theta_5^2 = 158,5509$	$\frac{1}{\theta_5} = 0,079$
$\sin \theta_1 = 0,511293$	$\sin 2\theta_1 = 0,878817$	
$\sin \theta_2 = -0,098162$	$\sin 2\theta_2 = 0,195376$	
$\sin \theta_3 = 0,050303$	$\sin 2\theta_3 = 0,100477$	
$\sin \theta_4 = -0,034027$	$\sin 2\theta_4 = 0,068015$	
$\sin \theta_5 = 0,025305$	$\sin 2\theta_5 = 0,050593$	

Подставимъ (40) и (41) въ (34) и (22)

$$Z_i = \sin k_i z = \sin \frac{k_i l}{l} z = \sin \frac{\theta_i z}{l}$$

$$T_i = A_i \cos ak_i t + B_i \sin ak_i t = A \cos \frac{a\theta_i t}{l} + B_i \sin \frac{a\theta_i t}{l}$$

$$(17) \text{ даетъ } w = \Sigma T_i Z_i = \Sigma A_i \cos \frac{a\theta_i t}{l} \sin \frac{\theta_i z}{l} + \\ + \Sigma B_i \sin \frac{a\theta_i t}{l} \sin \frac{\theta_i z}{l} \quad (42)$$

Вмѣсто (32) мы воспользовались уравненіемъ (34) и D_i вошелъ въ (42) въ составъ A_i и B_i , которые мы въ новомъ видѣ и опредѣлимъ, замѣтивъ, что при $t=0$ (42) превращается въ

$$(w)_{t=0} = \Sigma A_i \sin \frac{\theta_i z}{l} \quad (43)$$

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Нѣкоторыя замѣчанія о крешерахъ и индикаторахъ (87). Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. Май. 1909.

откуда

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{t=0} = \Sigma A_i \frac{\theta_i}{l} \cos \frac{\theta_i z}{l}.$$

Умноживъ это на $\cos \frac{\theta_n z}{l}$ мы найдемъ

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{t=0} \cos \frac{\theta_n z}{l} = \Sigma A_i \frac{\theta_i}{l} \cos \frac{\theta_i z}{l} \cos \frac{\theta_n z}{l}.$$

Интеграль этого выраженія въ предѣлахъ отъ 0 до l даетъ

$$\int_0^l \left(\frac{dw}{dz}\right)_{t=0} \cos \frac{\theta_n z}{l} dz = \Sigma A_i \int_0^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \cos \frac{\theta_n z}{l} dz$$

Poisson'омъ ¹⁾ приводится доказательство того, что здѣсь

$$\int_0^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \cos \frac{\theta_n z}{l} dz = 0$$

за исключеніемъ случая $i=n$, когда

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos^2 \frac{\theta_i z}{l} dz &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2\theta_i z}{l}\right) dz = \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{2\theta_i z}{l}}{\frac{2\theta_i}{l}} \right]_0^l = \\ &= \frac{l}{2} + \frac{l}{4\theta_i} \sin 2\theta_i = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2\theta_i} \sin 2\theta_i\right) = \\ &= \frac{l}{4\theta_i} (2\theta_i + \sin 2\theta_i) (44) \end{aligned}$$

такъ что

$$\int_0^l \left(\frac{dw}{dz}\right)_{t=0} \cos \frac{\theta_n z}{l} dz = \Sigma A_i \frac{\theta_i}{l} \frac{2\theta_i + \sin 2\theta_i}{4\theta_i} = \Sigma A_i \frac{2\theta_i + \sin 2\theta_i}{4},$$

¹⁾ Poisson. „Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différens problèmes“ Journal de l'Ecole Polytechnique. Cahier № 18, § 32, Page 481.

откуда

$$A_i = \Sigma \frac{4}{2\theta_i + \sin 2\theta_i} \int_0^l \left(\frac{dw}{dz} \right)_{t=0} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz \dots (45)$$

Въ начальный моментъ $t = 0$ динамометръ еще не началъ деформироваться, такъ что для всѣхъ его точекъ $w = 0$ $\frac{dw}{dz} = 0$ и $A_i = 0$. Воспользуемся здѣсь ксати формулой (45), чтобъ вывести изъ нея величину (47), которая намъ впослѣдствіи пригодится. Мы вообще знаемъ величину w въ моментъ $t = 0$ (въ нашемъ случаѣ $(w)_{t=0} = 0$), а разъ мы ее знаемъ, можемъ ее выразить въ видѣ:

$$(w)_{t=0} = \frac{z}{n}$$

откуда

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{t=0} = \frac{1}{n} \dots (46)$$

Здѣсь n соотвѣтственно подобранное постоянное число можетъ быть очень большое. Подставимъ ¹⁾ (46) въ (45) Получимъ:

$$\begin{aligned} A_i &= \Sigma \frac{4}{2\theta_i + \sin 2\theta_i} \int_0^l \left(\frac{dw}{dz} \right)_{t=0} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = \\ &= \Sigma \frac{4}{n} \frac{1}{(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^l \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = \\ &= \frac{4l}{n\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \left[\sin \frac{\theta_i z}{l} \right]_0^l = \frac{4l \sin \theta_i}{n\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)}. \text{ Поэтому (43) даетъ} \\ (w)_{t=0} = \frac{z}{n} &= \sum A_i \sin \frac{\theta_i z}{l} = \frac{4l}{n} \sum_1^{\infty} \frac{\sin \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \sin \frac{\theta_i z}{l} \end{aligned}$$

При $z=l$ мы имѣемъ

$$(w)_{t=0} = \frac{l}{n} = \Sigma \frac{4l}{n} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)}.$$

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Ibidem.

Отсюда, сокращая, мы найдемъ для вершины динамометра независимо отъ величины n

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} = \frac{1}{4} \cdot \dots \dots \dots (47)$$

Что имѣло мѣсто при всякомъ n остается вѣрнымъ и при $n = \infty$ (нашъ случай), такъ какъ въ (47) n сократилось.

Для нашего случая $\theta_i = 0,5367$ (стр. 67) и поэтому мы найдемъ, что первый членъ (47) будетъ:

$$\frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} = 0,2493987,$$

т.-е. почти равенъ $\frac{1}{4}$

Сумма всѣхъ остальныхъ членовъ бесконечнаго ряда (47) равна 0,0006013 составляетъ $\frac{1}{4}$ % перваго члена и можетъ быть нами отброшена. Чтобы найти B_i въ (42), возьмемъ производную (42) по t

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & - \sum A_i \frac{\theta_i a}{l} \sin \frac{\theta_i at}{l} \sin \frac{\theta_i z}{l} + \\ & + \sum B_i \frac{\theta_i a}{l} \cos \frac{\theta_i at}{l} \sin \frac{\theta_i z}{l} \dots \dots \dots (48) \end{aligned}$$

При $t=0$ этого превратится въ

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)_{t=0} = \sum \frac{\theta_i a}{l} B_i \sin \frac{\theta_i z}{l}.$$

Производная этого выраженія по z будетъ:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right)_{t=0} = \sum B_i \frac{\theta_i a}{l} \frac{\theta_i}{l} \cos \frac{\theta_i z}{l} = \sum B_i \frac{a \theta_i^2}{l^2} \cos \frac{\theta_i z}{l}.$$

Если мы объ части этого выраженія умножимъ на

$$\cos \frac{\theta_n z}{l}$$

и возьмемъ отъ него опредѣленный интегралъ отъ 0 до l , мы получимъ:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right)_{t=0} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = \Sigma B_i \frac{a \theta_i^2}{l^2} \int_0^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz =$$

(и на основаніи уравненія (44) найдемъ):

$$= B_i \frac{a \theta_i^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\theta_i z}{l} dz = B_i \frac{a \theta_i l}{4l} (2\theta_i + \sin 2\theta_i), \text{ откуда}$$

$$B_i = \frac{4l}{a} \frac{1}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right)_{t=0} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz . . . (49)$$

Здѣсь $\frac{d^2 w}{dt dz}$ выражаетъ скорость.

Послѣ всей тонкости приведенныхъ соображеній и выкладокъ мы принуждены теперь сдѣлать ни на чемъ не основанное несправедливое грубое допущеніе, что скорость колебаній пропорціональна разстоянію разсматриваемаго сѣченія отъ основанія динамометра, т.-е. мы допускаемъ, что въ моментъ удара

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)}{\partial z} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{t=0} = \frac{V}{l} = \frac{288}{141,486} = 2,035 \text{ 1/сек.} = C_0,$$

постоянной, когда на самомъ дѣлѣ по стержню идутъ сильныя волны. Тогда (49) даетъ

$$B_i = \frac{4}{a} \frac{V}{l} \frac{l^2}{\theta_i^2} \frac{\sin \theta_i}{(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} =$$

$$= 0,33602925 \frac{\sin \theta_i}{\theta_i^2 (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} (50)$$

(40) и (50) даютъ

$$B_1 = 0,30558; B_2 = 0,00471; B_3 = 0,00003 \quad B_4 = 0,0000076;$$

$$B_5 = 0,0000002.$$

Имѣя теперь A_i и B_i , вставимъ ихъ выраженія (45) и (50) въ (42) для случая $z=l$, для котораго (42) принимаетъ видъ:

$$w = B_1 \sin \frac{a \theta_1 t}{l} \sin \theta_1 + B_2 \sin \frac{a \theta_2 t}{l} \sin \theta_2 + \dots \text{ или}$$

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + \dots \dots \dots (51)$$

Въ первой строчкѣ слѣдующей таблички выписаны вычисленные по этому методу періоды составляющихъ волнь, а во второй строчкѣ ихъ амплитуды.

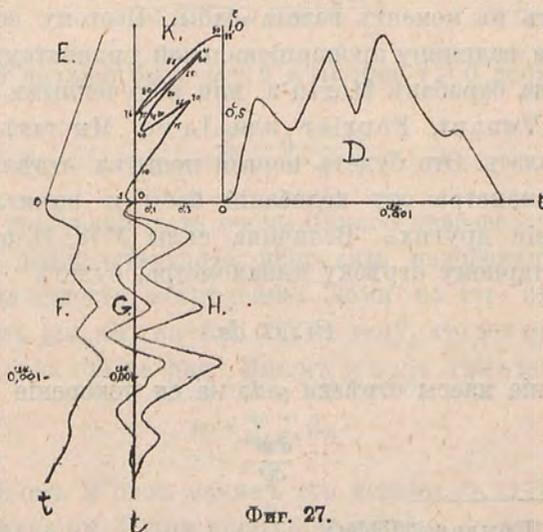
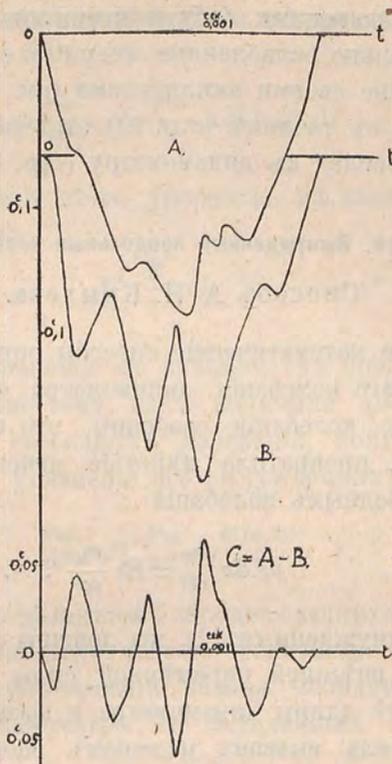
i	1	2	3	4	5
$\tau_i = \frac{2\pi l}{a\theta_i}$ секундъ . .	0,003415	0,000566	0,000289	0,000194	0,000146
$W_{i \text{ макс.}}^{\text{сант.}} = B_i \sin \theta_i$. .	0,1561	0,00046	0,0000015	0,0000002	0,000000004

На фигурѣ 25 показана синусоида C , для которой $i=1$. По амплитудѣ своей она ближе другихъ кривыхъ подходит къ истинной траекторіи бабы (разница въ 1,26%), несмотря на неудовлетворившее насъ вынужденное допущеніе

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (\text{стр. 71}),$$

послужившее для вычисления этой амплитуды

Отступленіе періода $\tau_i = 0,003415$ сек. отъ истиннаго 0,00312 составляетъ замѣтную величину въ 9,45%, но для вычисления этого періода не потребовалось указанное допущеніе. Итакъ, мы наблюдаемъ (хотя и не беремся это объяснить), что основной тонъ C фиг. 25, вычисленный для свободнаго колебанія динамометра съ придѣланной наковальной и „приросшей“ бабой, замѣчательно совпадаетъ съ основнымъ тономъ A дѣйствительной траекторіи a в с... l бабы. Высшіе тона динамометра, которые, согласно вышеприведенной таблицѣ имѣли бы ничтожныя амплитуды, если бы были сроднены съ бабой, имѣютъ амплитуды очень большія. Ихъ интерференція вызываетъ сложную волну B (фиг. 26 и 27) съ большими



Фиг. 27.

размахами, толкающими бабу и дающими ей высшіе тона, хотя и значительно ослабленные инерціею ея большой массы, но превышающіе своими амплитудами (см. стр. 49) приводимыя величины въ таблицѣ (стр. 72), отвѣчающей допущенію, что баба „прirosла“ къ динамометру (стр. 54 и 61).

§ 19. Вынужденныя продольныя колебанія.

Способъ А. Н. Крылова.

Предыдущіе математическіе способы опредѣленія элементовъ продольнаго колебанія динамометра созданы въ предположеніи, что колебанія свободны, что въ моментъ $t = 0$ внѣшняя сила прекратила дѣйствіе мгновенно. Для того, чтобъ отъ свободныхъ колебаній

$$\rho s dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Es \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots \dots \dots (3)$$

перейти къ вынужденнымъ ¹⁾, мы должны знать вынуждающія колебанія внѣшней перемѣнной силы $F(z, t)$, отнесенной къ единицѣ длины динамометра и вызывающей его колебанія. Эта сила вызвана паденіемъ бабы. Сила вначалѣ равна нулю, потомъ несомнѣнно возрастаетъ, уменьшается и исчезаетъ въ моментъ взлета бабы. Поэтому естественно принять ея величину пропорціональной ординатамъ траекторіи бабы на барабанѣ Morin'a, или полученнымъ по способамъ St. Venant, Fourier или Love. Мы такъ и попробуемъ сдѣлать. Это будетъ первая попытка отдѣлить колебанія динамометра отъ колебаній бабы и вычислить однѣ на основаніи другихъ. Величина силы $F(z, t)$, отнесенной къ элементарному отрѣзку динамометра, будетъ

$$F(z, t) dz.$$

Произведеніе массы отрѣзка $\rho s dz$ на ея ускореніе

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Ibidem.

подъ дѣйствиемъ силъ внутреннихъ и внѣшнихъ равно суммѣ этихъ силъ, т. е.

$$\rho s dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Es \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F(z, t) dz$$

Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на массу частицъ и помня (стр. 22), что

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} = a$$

скорости распространенія въ динамометрѣ продольныхъ колебаній, мы, подобно тому, какъ получили дифференціальное уравненіе (4) свободныхъ колебаній, получимъ теперь дифференціальное уравненіе его вынужденныхъ колебаній

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{F(z, t)}{\rho s} \dots \dots \dots (52)$$

находящихся подъ дѣйствиемъ продолжающихся внѣшнихъ силъ. Это уравненіе надо связать условіями: 1) что $w = 0$ при $z = 0$; 2) при перенесеніи начала координатъ изъ свободного конца динамометра въ задѣланный, уравненіе (8) превратится въ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{a^2}{ml} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=l}$$

3) при $t = 0$ должно быть $w = 0$ и 4) при $t = 0$ должно быть

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Последнее требованіе есть очень цѣнное нововведеніе А. Н. Крылова, долженствующее исправить недоразумѣніе нарушенія сплошности, встрѣченное нами на стр. 61, и приблизить насъ (см. OD на фиг. 26) къ тому, что мы имѣемъ на опытѣ (см. $\alpha\beta$ на той же фиг.). Ищемъ w подъ тѣмъ же видомъ

$$w = \sum T_i Z_i,$$

что въ § 18-омъ и подъ какимъ его искали въ (17) и полагаемъ, что функціи Z_i при новыхъ условіяхъ остались преж-

нія (29) — (35), (37) и только функціи T_i уже болѣе не (22) — (28), а новыя. На основаніи (37) и (41) мы имѣемъ

$$w = \sum_1^{\infty} T_i Z_i = \sum_1^{\infty} B_i T_i \sin \Theta_i \frac{z}{l} \dots \dots \dots (53)$$

Функцію

$$\frac{F(z, t)}{\rho s}$$

представимъ въ видѣ ряда

$$\frac{F(z, t)}{\rho s} = \sum_1^{\infty} \frac{f_i(t) Z_i}{B_i} = \sum_1^{\infty} \frac{f_i(t) B_i}{B_i} \sin k_i z = \sum_1^{\infty} f_i(t) \sin \frac{\Theta_i z}{l} \quad (54)$$

гдѣ

$$k_i = \frac{\Theta_i}{l} \quad (41)$$

Возьмемъ производную ур. (54) по z . Получимъ

$$\frac{1}{\rho s} \frac{dF(z, t)}{dz} = \sum_1^{\infty} f_i(t) \frac{\Theta_i}{l} \cos \frac{\Theta_i z}{l}$$

Умноживъ обѣ стороны этого уравненія на

$$\cos \Theta_n \frac{z}{l},$$

мы получимъ:

$$\frac{1}{\rho s} \frac{dF(z, t)}{dz} \cos \frac{\Theta_n z}{l} = \sum_1^{\infty} f_i(t) \frac{\Theta_i}{l} \cos \frac{\Theta_i z}{l} \cos \frac{\Theta_n z}{l}$$

Интеграль этого выраженія въ предѣлахъ отъ 0 до l будетъ

$$\frac{1}{\rho s} \int_0^l \frac{dF(z, t)}{dz} \cos \frac{\Theta_n z}{l} dz = \sum_1^{\infty} f_i(t) \frac{\Theta_i}{l} \int_0^l \cos \frac{\Theta_i z}{l} \cos \frac{\Theta_n z}{l} dz$$

На основаніи разсужденій стр. 68 мы видимъ, что правая часть этого уравненія представляетъ рядъ, въ которомъ всѣ

$$\int_0^l \cos \frac{\Theta_i z}{l} \cos \frac{\Theta_n z}{l} dz$$

равны нулю за исключеніемъ случая, когда $i = n$.

Тогда:

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\Theta_i z}{l} dz = \frac{1}{2} \int_0^l (1 + \cos \frac{2\Theta_i z}{l}) dz = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{2\Theta_i z}{l}}{\frac{2\Theta_i}{l}} \right]_0^l =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{l}{4\Theta_i} \sin 2\Theta_i = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2\Theta_i} \sin 2\Theta_i \right) = \frac{l(2\Theta_i + \sin 2\Theta_i)}{4\Theta_i}$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{1}{\rho s} \int_0^l \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cos \frac{\Theta_i z}{l} dz = f_i(t) \frac{\Theta_i}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\Theta_i z}{l} dz =$$

$$= f_i(t) \frac{\Theta_i l (2\Theta_i + \sin 2\Theta_i)}{4\Theta_i}$$

и наконецъ

$$f_i(t) = \frac{4}{\rho s} \frac{1}{2\Theta_i + \sin 2\Theta_i} \int_0^l \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cos \frac{\Theta_i z}{l} dz \quad (55)$$

(20) дасть

$$\frac{d^2 Z_i}{dz^2} = -k_i^2 Z_i$$

Продифференцируемъ (53) два раза по t и два раза по z :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_1^{\infty} \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} Z_i; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \sum_1^{\infty} T_i; \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial z^2} = -\sum_1^{\infty} k_i^2 T_i Z_i$$

Уравнения (52) и (54) даютъ теперь:

$$\sum_1^{\infty} \frac{d^2 T_i}{dt^2} Z_i + a^2 \sum_1^{\infty} k_i^2 T_i Z_i = \sum_1^{\infty} \left(\frac{d^2 T_i}{dt^2} Z_i + k_i^2 a^2 Z_i T_i \right) =$$

$$= \frac{F(z, t)}{\rho s} = \sum_1^{\infty} \frac{f_i(t) Z_i}{B_i}$$

Такое уравнение возможно, когда оно имѣетъ мѣсто для каждаго i , т. е. когда

$$\frac{d^2 T_i}{dt^2} Z_i + k_i a^2 Z_i T_i = \frac{f_i(t)}{B_i} Z_i$$

или по (41) когда

$$\frac{d^2 T_i}{dt^2} + \frac{\Theta_i^2}{l^2} a^2 T_i = \frac{f_i(t)}{B_i} \dots \dots \dots (56)$$

§ 20.

Далѣ идемъ по слѣдамъ Sarrau et Vielle ¹⁾. На страницѣ 387 цитируемой книги приведены опытомъ добытыя кривыя сжатія неупругихъ крешерныхъ столбиковъ красной мѣди подъ дѣйствіемъ различныхъ быстро дѣйствующихъ силъ. Тяжело видѣть, что авторы затруднились воспользоваться своими цѣнными кривыми, а принуждены были взять отсюда болѣе или менѣе прямой участокъ, для котораго зависимость между усилиями и деформациями можетъ быть принята за линейную. Пружины, слѣдуя до предѣла упругости линейному закону Hooke'a, даютъ больше основанія пользоваться выводомъ Sarrau и Vielle'a. Этимъ и объясняется, что имъ для времени возрастанія надавливанія воспользовался А. Н. Крыловъ съ меньшимъ основаніемъ, чѣмъ сами авторы, хотя на первый взглядъ кажется страннымъ, какъ можетъ одинъ и тотъ же выводъ служить основаніемъ для изученія совершенно различныхъ явленій: 1) сопротивленія неупругаго крешернаго столбика, не имѣющему потенціала, надавливанію на его верхній срѣзъ и 2) сопротивленія вибрирующей индикаторной пружины, имѣющему потенціалъ, надавливанію, распространенному по всей ея длинѣ. Исходимъ изъ уравненія (56). Общій интегралъ этого уравненія съ послѣднимъ членомъ получится, если мы прибавимъ частное его рѣшеніе къ общему интегралу того же уравненія, но безъ послѣдняго члена, т. е. къ общему интегралу уравненія

$$\frac{d^2 T_i}{dt^2} + \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} T_i = 0 \dots \dots \dots (57)$$

¹⁾ Sarrau et Vielle. Etude sur l'emploi des manomètres à écrasement pour la mesure des pressions développées par les substances explosibles. Mémorial des Poudres et Salpêtres. Paris. 1882—1883, tome I page 425.

который имѣеть видъ:

$$T_i = C_1 \cos \frac{\Theta_i}{l} at + C_2 \sin \frac{\Theta_i}{l} at \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Для (57) C_1 и C_2 произвольныя постоянныя. Но для (56) онѣ искомыя функціи отъ t . Изъ (58) мы найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} = & -C_1 \frac{\Theta_i a}{l} \sin \frac{\Theta_i at}{l} + C_2 \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} + \cos \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_1}{dt} + \\ & + \sin \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_2}{dt} \end{aligned}$$

До сихъ поръ C_1 и C_2 были связаны однимъ условіемъ (58) и потому для полученія частнаго рѣшенія (56) мы можемъ ихъ по Lagrange подчинить второму условію, чтобы было:

$$\cos \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_1}{dt} + \sin \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_2}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Тогда останется

$$\frac{dT_i}{dt} = -C_1 \frac{\Theta_i a}{l} \sin \frac{\Theta_i at}{l} + C_2 \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

изъ котораго

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_i}{dt^2} = & -C_1 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \cos \frac{\Theta_i at}{l} - C_2 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \sin \frac{\Theta_i at}{l} - \frac{dC_1}{dt} \frac{\Theta_i a}{l} \sin \frac{\Theta_i at}{l} + \\ & + \frac{dC_2}{dt} \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} \end{aligned}$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ (58) подставимъ въ (56)

$$\begin{aligned} \frac{f_i(t)}{B_i} = & -C_1 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \cos \frac{\Theta_i at}{l} - C_2 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \sin \frac{\Theta_i at}{l} - \\ & - \frac{dC_1}{dt} \frac{\Theta_i a}{l} \sin \frac{\Theta_i at}{l} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} + C_1 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \cos \frac{\Theta_i at}{l} + \\ & + C_2 \frac{\Theta_i^2 a^2}{l^2} \sin \frac{\Theta_i at}{l} = -\frac{\Theta_i a}{l} \sin \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_1}{dt} + \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_2}{dt} \quad (61) \end{aligned}$$

Вставимъ сюда получаемое изъ (59)

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{\sin \frac{\Theta_i at}{l}}{\cos \frac{\Theta_i at}{l}} \frac{dC_2}{dt}$$

и получимъ

$$\frac{\Theta_i a}{l} \frac{\sin^2 \frac{\Theta_i at}{l}}{\cos \frac{\Theta_i at}{l}} \frac{dC_2}{dt} + \frac{\Theta_i a}{l} \cos \frac{\Theta_i at}{l} \frac{dC_2}{dt} = \frac{f_i(t)}{B_i}$$

Здѣсь

$$\sin^2 \frac{\Theta_i at}{l} + \cos^2 \frac{\Theta_i at}{l} = 1.$$

и поэтому

$$\frac{\Theta_i a}{l} \frac{dC_2}{dt} = \frac{f_i(t)}{B_i} \cos \frac{\Theta_i at}{l}$$

Отсюда

$$dC_2 = \frac{l}{\Theta_i a} \frac{f_i(t)}{B_i} \cos \frac{\Theta_i at}{l} dt$$

$$\text{и } C_2 = \frac{l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_i(x) \cos \frac{\Theta_i ax}{l} dx$$

Здѣсь x переменная по времени, имѣющая исчезнуть, когда опредѣленные интегралы будутъ взяты. Но пока мы разматриваемъ x , какъ переменную, мы считаемъ t за постоянную. Подобнымъ образомъ найдемъ

$$C_1 = \frac{l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_1(x) \sin \frac{\Theta_i ax}{l} dx.$$

Подставляемъ

$$C_1 \text{ и } C_2 \text{ въ (58),}$$

въ которомъ вводимъ

$$\cos \frac{\Theta_i at}{l} \text{ и } \sin \frac{\Theta_i at}{l}$$

подъ знаки интеграловъ и получаемъ частное рѣшеніе (56)

$$T_i = \frac{-l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_1(x) \sin \frac{\Theta_i ax}{l} \cos \frac{\Theta_i ax}{l} dx +$$

$$+ \frac{l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_1(x) \cos \frac{\Theta_i a x}{l} \sin \frac{\Theta_i a x}{l} dx$$

или

$$T_i = \frac{l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_i(x) \sin \frac{\Theta_i a}{l} (t-x) dx . . . (62)$$

Полное рѣшеніе (56) будетъ сумма (58) и (62), гдѣ C_1 и C_2 постоянныя. Оно будетъ:

$$T_i = \frac{l}{a \Theta_i B_i} \int_0^t f_i(x) \sin \frac{\Theta_i a}{l} (t-x) dx + C_1 \cos \frac{\Theta_i a t}{l} + \\ + C_2 \sin \frac{\Theta_i a t}{l} (63)$$

Если мы желаемъ, чтобы полный интеграль T_i и его производная

$$\frac{dT_i}{dt}$$

отвѣчали начальнымъ условіямъ

$$(T_i)_{t=0} = 0 \text{ и } \left(\frac{dT_i}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

мы должны имъ подчинить постоянныя C_1 и C_2 . Ясно, что при $t=0$, (62) даетъ $(T_i)_{t=0} = 0$ и $\left(\frac{dT_i}{dt} \right)_{t=0} = 0$. Поэтому (63) даетъ

$$C_1 = (T_i)_{t=0} = 0 \text{ и}$$

$$C_2 = \frac{l}{\Theta_i a} \left(\frac{dT_i}{dt} \right)_{t=0} = 0,$$

такъ что полный интеграль (56), имѣющій общее выраженіе

$$T_i = (T_i)_{t=0} \cos \frac{\Theta_i a}{l} t + \left(\frac{dT_i}{dt} \right)_{t=0} \sin \frac{\Theta_i a t}{l} +$$

$$+ \frac{l}{\Theta_i a B_i} \int_0^t f_i(x) \sin \frac{\Theta_i a}{l} (t-x) dx \dots (64)$$

въ нашемъ частномъ случаѣ становится

$$T_i = T_i \dots (65)$$

Подставимъ (62) въ (53) и получимъ

$$w = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\Theta_i a} \sin \Theta_i \frac{z}{l} \int_0^t f_i(x) \sin \frac{\Theta_i a}{l} (t-x) dx \dots (66)$$

§ 21.

Возвратимся къ Крылову. До сихъ поръ мы принимали, что внѣшняя сила $F(z, t)$ равномерно распредѣлилась по всей длинѣ динамометра отъ l до o . Но намъ чаще приходится ее сосредоточивать на вершинѣ и для того, чтобы подойти къ разсмотрѣнію этого случая, мы теперь допустимъ, что она прилагается уже не на всемъ пространствѣ отъ l до o , а лишь на верхнемъ участкѣ отъ l до $l-d$ и представляется намъ въ удобномъ видѣ произведенія двухъ конечныхъ функцій (одна отъ времени, другая отъ разстоянія).

Затѣмъ на участкахъ отъ $l-d$ до o въ одну сторону и отъ l до ∞ въ другую внѣшняя сила вовсе не прилагается. Иначе говоря допустимъ, что $[F(z, t)]_0^{l-d} = 0$;

$$[F(z, t)]_{l-d}^l = \varphi(z) f(t) \dots (67)$$

$$[F(z, t)]_l^{\infty} = 0;$$

(67) даетъ

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} f(t),$$

откуда

$$\int_0^l \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cos \frac{\Theta_i z}{l} dz = f(t) \int_{l-d}^l \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \cos \frac{\Theta_i z}{l} dz \dots (68)$$

Здѣсь

$$\int_{l-d}^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \frac{d\varphi(z)}{dz} dz = \left[\cos \frac{\theta_i z}{l} \varphi(z) \right]_{l-d}^l + \frac{\theta_i}{l} \int_{l-d}^l \varphi(z) \sin \frac{\theta_i z}{l} dz$$

Первый членъ правой части здѣсь равенъ нулю, потому что $f(l-d) = f(l) = 0$ на границахъ, между которыми внѣшняя сила прилагается. Такимъ образомъ остается

$$\int_{l-d}^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \frac{d\varphi(z)}{dz} dz = \frac{\theta_i}{l} \int_{l-d}^l \varphi(z) \sin \frac{\theta_i z}{l} dz \quad . \quad . \quad (69)$$

Здѣсь во второй части подынтегральное выражение интегрируемъ по частямъ, полагая въ общей формулѣ

$$\int_{l-d}^l u dv = (uv)_{l-d}^l - \int_{l-d}^l v du,$$

что

$$u = \sin \frac{\theta_i z}{l}; \quad v = \int_{l-d}^z \varphi(z) dz$$

гдѣ $l-d < z < l$.

Получаемъ

$$\begin{aligned} \int_{l-d}^l \varphi(z) \sin \frac{\theta_i z}{l} dz &= \left[\left\{ \int_{l-d}^z \varphi(z) dz \right\} \sin \frac{\theta_i z}{l} \right]_{l-d}^l - \\ &- \frac{\theta_i}{l} \int_{l-d}^l \left[\int_{l-d}^z \varphi(z) dz \right] \cos \frac{\theta_i z}{l} dz \quad . \quad . \quad . \quad (70) \end{aligned}$$

Здѣсь

$$\int_{l-d}^z \varphi(z) dz < \int_{l-d}^l \varphi(z) dz,$$

потому что $z < l$.

Выраженіе

$$\int_{l-d}^l \varphi(z) dz$$

представляетъ собою нѣкоторую положительную площадь.

Въ уравненіи (67) мы при $f(t)$ можемъ подобрать постоянный множитель такъ, чтобы другая составляющая (67) $\varphi(z)$ давала

$$\int_{l-d}^l \varphi(z) dz = s$$

площадь сѣченія динамометра. Тогда будемъ имѣть

$$F = nsf(t) \dots \dots \dots (71)$$

и найдемъ что

$$\int_{l-d}^s \varphi(z) dz < s$$

и поэтому мы въ двойномъ интегралѣ (70) имѣемъ:

$$\int_{l-d}^l dz \int_{l-d}^s \varphi(z) dz < s \int_{l-d}^l dz = sd$$

Тѣмъ болѣе будетъ имѣть мѣсто:

$$\int_{l-d}^l \left[\int_{l-d}^s \varphi(z) dz \right] \cos \frac{\theta_i z}{l} dz < sd.$$

Когда мы, стремясь къ сосредоточенію силы $F(z, t)$, длину d , по которой она распределѣна, уменьшаемъ въ предѣлѣ до нуля, мы получаемъ:

$$\int_{l-d}^l \left[\int_{l-d}^s \varphi(z) dz \right] \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = 0,$$

такъ что въ (70) второй членъ отпадаетъ и (70) обращается въ:

$$\int_{l-d}^l \varphi(z) \sin \frac{\theta_i z}{l} dz = \left[\int_{l-d}^s \varphi(z) dz \right] \sin \frac{\theta_i z}{l} \Big|_{l-d}^l = \left[\int_{l-d}^l \varphi(z) dz \right] \sin \frac{\theta_i l}{l} - \left\{ \int_{l-d}^{l-d} \varphi(z) dz \right\} \sin \frac{\theta_i(l-d)}{l} = \left[\int_{l-d}^l \varphi(z) dz \right] \sin \theta_i = s \sin \theta_i \quad (72)$$

Имѣя (72), идемъ теперь обратно:

(69) даетъ въ предѣлѣ при $d=0$:

$$\int_{l-d}^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} dz = \frac{\theta_i}{l} \int_{l-d}^l \varphi(z) \sin \frac{\theta_i z}{l} dz = \frac{\theta_i}{l} s \sin \theta_i$$

Уравненіе (40) даетъ намъ при всякомъ i :

$$\theta_i \sin \theta_i = \frac{\cos \theta_i}{m},$$

откуда въ предѣлѣ, когда $d=0$, мы имѣемъ

$$\int_{l-d}^l \cos \frac{\theta_i z}{l} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} dz = \frac{s}{ml} \cos \theta_i,$$

Продолжая идти назадъ, мы изъ (68) находимъ:

$$\int_0^l \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = f(t) \int_{l-d}^l \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = f(t) \frac{s}{ml} \cos \theta_i,$$

Затѣмъ (55) намъ даетъ

$$f_i(t) = \frac{4}{sp} \frac{1}{2\theta_i + \sin 2\theta_i} \int_0^l \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cos \frac{\theta_i z}{l} dz = \frac{4}{p} \frac{f(t) \cos \theta_i}{ml 2\theta_i + \sin 2\theta_i},$$

связь между $f_i(t)$ и $f(t)$, выражающими зависимость внѣшней силы $F(z, t)$ отъ времени, при чемъ всѣ $f_i(t)$ касаются случая распределенія этой внѣшней силы по всей длинѣ динамометра, а $f(t)$ касается случая ея сосредоточія на его верхнемъ концѣ, для котораго $z=l$. Вставимъ эту связь въ (62) и для усилія, сосредоточеннаго въ $z=l$, мы получимъ

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{l}{a\theta_i} \int_0^l \frac{f_i(x)}{B_i} \sin \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx = \\ &= \frac{4}{apm B_i \theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^l f(x) \sin \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx \end{aligned}$$

и наконецъ $z=l$ превратить (53) въ:

$$w = \sum_1^{\infty} B_i T_i \sin \theta_i = \\ = \frac{4}{a^2 m} \sum_1^{\infty} \frac{\cos \theta_i \sin \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^t f(x) \sin \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx . . (73)$$

Интегрируя по частямъ, будемъ имѣть

$$\int_0^t f(x) \sin \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx = \left[\frac{f(x) \cos \left\{ \frac{\theta_i a}{l} (t-x) \right\}}{\frac{\theta_i a}{l}} \right]_0^t - \\ - \frac{l}{a\theta_i} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} \cos \frac{a\theta_i}{l} \cdot (t-x) dx.$$

При нижнемъ предѣлѣ первый членъ правой части равенъ нулю въ тѣхъ случаяхъ, когда $f(0)=0$. При верхнемъ предѣлѣ $\cos 0=1$, такъ что

$$\int_0^t f(x) \sin \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx = \frac{l}{a\theta_i} f(t) - \\ - \frac{l}{a\theta_i} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} \cos \left[\frac{a\theta_i}{l} (t-x) \right] dx . . . (74)$$

Подставивъ въ (73)

$$\frac{\cos \theta_i}{m\theta_i} = \sin \theta_i \quad (40) \text{ и } (74),$$

мы найдемъ:

$$w = \frac{4l}{a^2 p} f(t) \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} - \\ - \frac{4l}{a^2 p} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} \cos \left[\frac{a\theta_i}{l} (t-x) \right] dx . (75)$$

Вставимъ сюда

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3) \text{ и } (49)$$

и получимъ:

$$w = F + \mathcal{E} = \frac{l}{E} f(t) - \frac{4l}{E} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + 2\sin 2\theta_i)} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} \cos \left[\frac{\alpha\theta_i}{l} (t-x) \right] dx \quad (76)^1$$

Если бы не было вибрацій, намъ

$$E = \frac{f(t)}{\frac{w}{l}} = \frac{l f(t)}{w}$$

дало бы статическое

$$w = F = \frac{l f(t)}{E}$$

т. е. первый членъ (76).

Итакъ, въ (76) опусканіе w динамометра разбилось на два члена, изъ которыхъ первый F представляетъ собой статическое уравновѣшиваніе усилий $f(t)$ въ какой-нибудь моментъ t , а второй \mathcal{E} изображаетъ динамическое отступленіе ординатъ колебаній отъ статическихъ ординатъ F , отвѣчающихъ этой переменнѣй нагрузкѣ $f(t)$.

§ 22. Предположеніе, что внѣшняя сила пропорціонона опусканію бабы.

Но какому закону слѣдуетъ сила $f(t)$? Намъ необходимо задаться этимъ закономъ $f(t)$, чтобъ идти дальше (см. стр. 74). Пока мы съ другими предполагаемъ, что динамометръ касается бабы все время удара, что между ними разстояніе постоянно равно нулю между моментами удара и взлета, мы не можемъ ничѣмъ другимъ руководиться, какъ предположеніемъ, что внѣшняя сила надавливанія бабы пропорціонона ординатамъ ея опусканія, а эти ординаты мы нашли равными ординатамъ свободныхъ колебаній динамометра (стр. 72, способъ Fourier) основнымъ тономъ, для которыхъ мы имѣли $A_i = 0,1561$ и $\tau_i = \frac{2\pi l}{\alpha\theta_i} = 0,003415$ сек. Итакъ, мы въ своемъ распоряженіи имѣемъ только (71)

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Ditto (95).

$$F = nsf(t) = NA_1 \frac{\sin 2\pi t}{\tau}$$

и изъ стр. 21

$$E = \frac{\frac{F}{s}}{\frac{y}{l}} = \frac{\frac{nsf(t)}{s}}{\frac{A_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1}}{l}} = \frac{\frac{NA \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1}}{s}}{\frac{A_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1}}{l}} = \frac{Nl}{s}$$

откуда коэффициентъ пропорціональности

$$N = \frac{sE}{l} = 6,196 \cdot 10^{10} \frac{\text{дин.}}{\text{сан.}}$$

и при фазѣ

$$\frac{2\pi t}{\tau_1} = \frac{\pi}{2}$$

мы найдемъ наибольшую величину надавливанія

$$F = kA_1 = \frac{sE}{l} A_1 = 9,672 \cdot 10^9$$

динамъ, т.-е. вѣсу 9,85 тоннъ массы ~ 10 тоннамъ. Для времени отъ 0 до $\frac{\tau_1}{2} = 0,0017075$ сек. мы допускаемъ

$$f(t) = \frac{E}{l} A \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} \dots \dots \dots (77)$$

Для времени t производная (77) будетъ

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{EA 2\pi}{l\tau_1} \cos 2\pi \frac{t}{\tau_1} \dots \dots \dots (78)$$

Подставивъ (77) и (78) въ (76) мы получимъ

$$\begin{aligned} w &= F + \mathcal{E} = \frac{l}{E} f(t) - \\ &- \frac{4l}{E} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} \cos \left[\frac{a\theta_i}{l} (t-x) \right] dx = \\ &= A \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \\ &- \frac{8A\pi}{\tau_1} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \int_0^t \cos 2\pi \frac{x}{\tau_1} \cos \frac{a\theta_i}{l} (t-x) dx \dots \dots \dots (79) \end{aligned}$$

Положивъ здѣсь

$$\frac{2\pi}{\tau_1} = p; \quad \frac{a\theta_i}{l} = -q; \quad -qt = r,$$

получимъ

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos px \cos(qx+r) dx &= \left\{ \frac{\sin[(p-q)x+qt]}{2(p-q)} + \frac{\sin[(p+q)x-qt]}{2(p+q)} \right\}_0^t = \\ &= \frac{\sin pt - \sin qt}{2(p-q)} + \frac{\sin pt + \sin qt}{2(p+q)} = \frac{p \sin pt - q \sin qt}{p^2 - q^2} = \\ &= \frac{\frac{2\pi}{\tau_1} \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \frac{a\theta_i}{l} \sin \frac{a\theta_i}{l} t}{\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{a\theta_i}{l}\right)^2} \end{aligned}$$

Теперь (79) становится:

$$\begin{aligned} w = F + \mathcal{E} = F + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \dots = A \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \\ - \frac{8A\pi}{\tau_1} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \cdot \frac{\frac{2\pi}{\tau_1} \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \frac{a\theta_i}{l} \sin \frac{a\theta_i}{l} t}{\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{a\theta_i}{l}\right)^2}. \quad (80) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ мы получили частное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (52). По (65) оно есть общее.

Вообще послѣдняя дробь получаетъ опредѣленные значенія, но когда, какъ въ нашемъ случаѣ, періоды вынуждающихъ и вынужденныхъ колебаній равны, т. е. когда $\tau_i = \frac{2\pi l}{a\theta_i}$ она получаетъ видъ неопредѣленности. Ея дѣйствительное значеніе равно значенію ея производной, взятой при временномъ допущеніи, что переменная t постоянна, а постоянная $\theta_i = 0,5367$ (стр. 67) переменная.

Производная дроби

$$\frac{\frac{2\pi}{\tau_1} \sin 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \frac{a\theta_1}{l} \sin \frac{a\theta_1}{l} t}{\left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{a\theta_1}{l}\right)^2}$$

будетъ

$$\frac{-\frac{a}{l} \sin \frac{a\theta_1}{l} t - \frac{a\theta_1^2}{l^2} t \cos \frac{a\theta_1}{l} t}{-2 \frac{a^2 \theta_1}{l^2}} = \frac{\sin \frac{a\theta_1}{l} t + \frac{a\theta_1}{l} t \cos \frac{a\theta_1}{l} t}{\frac{2a\theta_1}{l}}$$

Теперь ур. (80) приобретает видъ:

$$\begin{aligned}
 w = F + \mathcal{E} = F + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \dots = A \sin \frac{a\theta_1}{l} t - \\
 - 2A \frac{\sin^2 \theta_1}{\theta_1(2\theta_1 + \sin 2\theta_1)} \cdot \left(\sin \frac{a\theta_1}{l} t + \frac{a\theta_1 t}{l} \cos \frac{a\theta_1}{l} t \right) \\
 - 4A \frac{a\theta_1}{l} \sum_2^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \frac{\frac{a\theta_1}{l} \sin \frac{a\theta_1}{l} t - \frac{a\theta_1}{l} \sin \frac{a\theta_1 t}{l}}{\left(\frac{a\theta_1}{l}\right)^2 - \left(\frac{a\theta_i}{l}\right)^2} \quad (81)
 \end{aligned}$$

по которому мы и опредѣлимъ траекторію, какую на барабанѣ Morin'а долженъ былъ бы вычертить динамометръ, если бы мы исходили изъ вѣрныхъ предположеній (см. *D* фиг. 26). Здѣсь касательная въ началѣ координатъ при $t=0$ горизонтальна потому, что $\frac{dw}{dt}=0$. Дѣйствительно, возьмемъ производную (80) и мы получимъ

$$\frac{dw}{dt} = A \frac{2\pi}{\tau_1} \cos 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \frac{8A\pi}{\tau_1} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i \left\{ \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 \cos 2\pi \frac{t}{\tau_1} - \left(\frac{a\theta_i}{l}\right)^2 \cos \frac{a\theta_i}{l} t \right\}}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i) \left\{ \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{a\theta_i}{l}\right)^2 \right\}}$$

При $t=0$ числитель послѣдней дроби равенъ знаменателю и на основаніи (47) получается

$$\frac{dw}{dt} = \frac{8\pi A}{\tau_1} \left[\frac{1}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} \right] = 0.$$

Въ нашемъ случаѣ послѣдній членъ (81) даетъ для $i=2$ амплитуду колебаній меньше полумикрона, а для $i=3, 4, 5$ совершенно ничтожныя величины. Такимъ образомъ *D* (фиг. 26) можемъ считать за изображеніе уравненія:

$$\begin{aligned}
 w = F + \mathcal{E}_1 = A \sin \frac{a\theta_1}{l} t - 2A \frac{\sin^2 \theta_1}{\theta_1(2\theta_1 + \sin 2\theta_1)} \left(\sin \frac{a\theta_1}{l} t + \right. \\
 \left. + \frac{a\theta_1 t}{l} \cos \frac{a\theta_1}{l} t \right).
 \end{aligned}$$

Кстати рассмотрим приближенную формулу, получаемую Крыловым изъ (79)

$$\mathcal{E} = -\frac{8A\pi}{\tau_1} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \Theta_i}{\Theta_i(2\Theta_i + \sin 2\Theta_i)} \cos \frac{2\pi t_1}{\tau_1} \int_0^t \cos \frac{a\Theta_i}{l} (t-x) dx.$$

Здѣсь t_1 есть надлежаще подобранное среднее между 0 и t , а

$$\int_0^t \cos \frac{a\Theta_i}{l} (t-x) dx = \left(\frac{\sin \frac{a\Theta_i}{l} (t-x)}{\frac{a\Theta_i}{l}} \right)_0^t = \frac{\sin \frac{a\Theta_i t}{l}}{\frac{a\Theta_i}{l}} < \\ < \frac{-1}{\frac{a\Theta_i}{l}} = -\frac{l}{a\Theta_i}.$$

Для $i=1$ на длинѣ участка $\frac{\tau_1}{2} = \pi$ оси абсциссъ величина $\sin \frac{a\Theta_1 t}{l}$ колеблется отъ 0 до 1 около средней величины $\frac{2}{\pi} = 0,637$ и среднее отношеніе частей неравенства отъ допущенія

$$\sin \frac{a\Theta_1 t}{l} = 1$$

будеть

$$\frac{1-0,637}{0,637} = 0,57.$$

Для $i > 1$ среднее отношеніе частей неравенства отъ допущенія

$$\sin \frac{a\Theta_i t}{l} = 1$$

значительно больше

Такъ при $i=5$ уголъ

$$\frac{a\Theta_5 t}{l} \text{ для } t = \frac{\tau_1}{4} = 0,0008538 \text{ сек.}$$

въ нашемъ случаѣ равенъ 11 окружностямъ $+131^{\circ}37'$ и средняя ордината площади, охватываемой соответственнымъ участкомъ синусоиды, близка къ 0,047, а допущеніе

$$\sin \frac{a\theta_i t}{l} = 1.$$

дѣлаетъ правую часть неравенства больше лѣвой въ $21\frac{1}{4}$ раза. Последнее неравенство даетъ:

$$\mathcal{E} < \frac{1}{\theta_i} \frac{8A\pi l}{a\tau_1} \cos \frac{2\pi t_1}{\tau_1} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 \theta_i}{\theta_i (2\theta_i + \sin 2\theta_i)}.$$

Если мы здѣсь замѣнимъ $\frac{1}{\theta_i}$ величиною $\frac{1}{\theta_1}$, наше неравенство усугубится, въ нашемъ случаѣ для $i=5$ (стр 67) въ $23\frac{1}{2}$ раза. Обѣ причины дѣлаютъ правую часть неравенства больше лѣвой въ 500 разъ. Въ заключеніе подставимъ (47) и $\tau_1 = \frac{2\pi l}{a\theta_1}$ и мы получимъ

$$\mathcal{E} < \frac{2\pi Al}{a\tau_1 \theta_1} \cos \frac{2\pi t_1}{\tau_1} = A \cos \frac{a\theta_1}{l} t_1.$$

Если мы подставимъ сюда предѣльные значенія $0 < t_1 < t$, мы получимъ для $t_1 = 0$ сек. что $\mathcal{E} < 0,1561$, что несомнѣнно, такъ какъ для этого времени $\mathcal{E} = 0$. Для $t_1 = t$ мы получаемъ

$$F + \mathcal{E} < A \left(\sin \frac{a\theta_1 t}{l} + \cos \frac{a\theta_1 t}{l} \right).$$

Такъ какъ последнее выраженіе колеблется между 0,1561 и 0,2207, а максимумъ точной кривой Крылева не превосходитъ 0,0782, то несомнѣнно, что и это неравенство справедливо, но и даетъ мало.

§ 23. Смѣшанныя колебанія.

Мы видимъ, какъ кривая D фиг. 26 далека отъ дѣйствительной кривой B колебаній динамометра. Причиною тому—единственная, имѣвшаяся въ рукахъ анализа кривая C фиг. 25, которой ординаты по Нooke'у мы приняли пропорціональными вышней силѣ $f(t)$. Отсюда мы видимъ, что законъ, которому слѣдуетъ $f(t)$, не выражается кривой C фиг. 25.

Намъ остается исходить изъ опыта, чтобы провѣрить, даютъ ли формулы (73) и (76) дѣйствительность, т. е. кривую *B* фиг. 26. На фиг. 25, 26 и 27 кривыя *A* и *B* выражаютъ дѣйствительную траекторію бабы и динамометра на барабанѣ Морин'а, кривая *C* фиг. 27 выражаетъ разность между ними. Ни прикосновенія, ни тѣмъ болѣе нажатія не происходитъ между бабой и динамометромъ во времена, отвѣчающія верхнимъ участкамъ кривой *C* и только въ то время, когда чертятся ея участки, находящіеся ниже оси абсциссъ, происходитъ то самое нажатіе, которое является вышшею силою, вынуждающею колебанія динамометра. Опять по Нooke'у примемъ эту силу пропорціональной ординатамъ нижнихъ участковъ кривой *C* фиг. 27, а коэффициентъ пропорціональности *N* не возьмемъ (стр. 88) въ $6,196 \cdot 10^{10} \frac{\text{динъ}}{\text{сант.}}$, а подберемъ послѣ изъ опыта.

Напомнимъ постоянныя:

$l = 141^c,486$	стр.
$\rho = 7,8767$	20
$a = 484981$	15
$E = 1,8527 \cdot 10^{12}$	22
$\frac{1}{m} = 0,3196$	21
$\frac{4}{\text{атр}} = 0^7,1 \cdot 3,345.$	53
	86

Вмѣсто добытыхъ аналитически величинъ θ_1 (стр. 67), B_1 (стр. 71), періода τ_1 и амплитуды (стр. 72), мы изойдемъ изъ опытомъ добытой кривой *A* (фиг. 25) основного тона траекторіи бабы и примемъ эту синусоиду за основной тонъ свободныхъ колебаній динамометра. Ея періодъ $\tau_1 = 0,00312$ сек. даетъ намъ опытовый $\theta_1 = \frac{2\pi l}{a\tau_1} = 0,5874 = 33^\circ 39' 20''$, ея амплитуда $B_1 \sin \theta_1 = 0,15415$ сант. даетъ опытовый $B_1 = 0,27807$. Въ формулѣ (73) назовемъ величину

$$\frac{4}{\text{атр}} \frac{\cos \theta_i \sin \theta_i}{\theta_i(2\theta_i + \sin 2\theta_i)} = A_i.$$

Разсматривая нижніе участки кривой C_1 мы видимъ, что можемъ, не удаляясь замѣтно отъ истины, счесть ограничивающія ихъ кривыя принадлежащими къ одному изъ слѣдующихъ четырехъ типовъ: 1) первая четверть синусоиды съ возрастающими ординатами; 2) вторая четверть синусоиды съ убывающими ординатами; 3) наклонная прямая съ возрастающими ординатами и 4) наклонная прямая съ убывающими ординатами. Мы теперь еще не знаемъ величины N и потому пока имѣемъ для $f(t)$ слѣдующія 4 типическихъ выраженія (участокъ n ограниченъ временами t_{n-1} и t_n)

$$1) f_n(t) = C_n N \sin \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad 2) f_n(t) = C_{n-1} N \cos \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}};$$

$$3) f_n(t) = C_n N \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad 4) f_n(t) = - C_{n-1} N \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Здѣсь C_n есть отмѣренное въ сантиметрахъ на кривой C (фиг. 27) максимальное сжатіе на границѣ участка, t_{n-1} и t_n времена, которыми участокъ ограниченъ.

Вставляя величину $f(t)$ въ уравненіе (73), мы для каждаго типа будемъ имѣть въ виду два случая: Первый, когда усиліе даннаго типа еще дѣйствуетъ и вызываетъ вынужденныя колебанія динамометра, иначе говоря, когда $t_{n-1} < t < t_n$, и второй случай, когда даннаго типа усиліе уже миновало и отъ него въ динамометрѣ остались только свободныя колебанія подобно мертвой зыби на морѣ, иначе говоря, когда

$$t_{n-1} < t_n < t.$$

Разсмотримъ поэтому восемь случаевъ, принимая для сокращенія въ (73)

$$C_n N = D_n.$$

Первый случай.

$$f_n(t) = D_n \sin \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, \quad t_{n-1} < t < t_n,$$

При w поставимъ два значка. Первый отнесемъ къ высотѣ тона, второй—къ участку, въ теченіе котораго колебаніе происходитъ.

Мы будемъ имѣть

$$t_{n-1} < x < t.$$

$$\begin{aligned} w_{i,n} &= A_i D_n \int_{t_{n-1}}^t \sin \frac{\pi}{2} \frac{x-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t-x}{l} dx = \\ &= A_i D_n \int_{t_{n-1}}^t \left[\sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \right] \left[\sin a \Theta_i \frac{t}{l} \cos a \Theta_i \frac{x}{l} - \right. \\ &\quad \left. - \sin a \Theta_i \frac{x}{l} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \right] dx = \\ &= A_i D_n \int_{t_{n-1}}^t \left[\sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \cos a \Theta_i \frac{x}{l} - \right. \\ &\quad - \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \cos a \Theta_i \frac{x}{l} - \\ &\quad - \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{x}{l} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} + \\ &\quad \left. + \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{x}{l} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \right] dx = \\ &= A_i D_n \left[\cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^t \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \cos a \Theta_i \frac{x}{l} dx - \right. \\ &\quad - \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^t \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \cos a \Theta_i \frac{x}{l} dx - \\ &\quad - \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^t \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{x}{l} dx + \\ &\quad \left. + \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^t \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{x}{l} dx \right] = \\ &= A_i D_n \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \left(\frac{-\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n-t_{n-1}} + a \Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n-t_{n-1}} + \frac{a \Theta_i}{l} \right)} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\Theta_i}{l} \right)} \Bigg|_{t_{n-1}}^t \\
& - \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\Theta_i \frac{t}{l} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\Theta_i}{l} \right)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\Theta_i}{l} \right)} \right) \Bigg|_{t_{n-1}}^t \\
& - \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\Theta_i \frac{t}{l} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\Theta_i}{l} \right)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\Theta_i}{l} \right)} \right) \Bigg|_{t_{n-1}}^t \\
& + \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\Theta_i \frac{t}{l} \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\Theta_i}{l} \right)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\Theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\Theta_i}{l} \right)} \right) \Bigg|_{t_{n-1}}^t
\end{aligned}$$

(Назовемъ на время для краткости фазы

$$a\Theta_i \frac{t}{l} = a; \quad \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_n - t_{n-1}} = b; \quad \frac{a\Theta_i}{l} = A; \quad \frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} = B.$$

Мы получимъ:

$$\begin{aligned}
 w_{i,n} &= A_i D_n \left\{ \cos b_{n-1} \sin a \left[-\frac{\cos(b+a) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1})}{2(B+A)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1})}{2(B-A)} \right] - \right. \\
 &\quad - \sin b_{n-1} \sin a \left[\frac{\sin(b-a) - \sin(b_{n-1} - a_{n-1})}{2(B-A)} + \frac{\sin(b+a) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1})}{2(B+A)} \right] - \\
 &\quad - \cos b_{n-1} \cos a \left[\frac{\sin(b-a) - \sin(b_{n-1} - a_{n-1})}{2(B-A)} - \frac{\sin(b+a) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1})}{2(B+A)} \right] + \\
 &\quad \left. + \sin b_{n-1} \cos a \left[-\frac{\cos(b+a) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1})}{2(B+A)} + \frac{\cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1})}{2(B-A)} \right] \right\} = \\
 &= \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left\{ -\cos b_{n-1} \sin a \left[\cos(b+a) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] - \right. \\
 &\quad - \sin b_{n-1} \sin a \left[\sin(b+a) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] + \\
 &\quad + \cos b_{n-1} \cos a \left[\sin(b+a) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] - \\
 &\quad \left. - \sin b_{n-1} \cos a \left[\cos(b+a) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] \right\} + \\
 &+ \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left\{ -\cos b_{n-1} \sin a \left[\cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] - \right. \\
 &\quad - \sin b_{n-1} \sin a \left[\sin(b-a) - \sin(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] - \\
 &\quad - \cos b_{n-1} \cos a \left[\sin(b-a) - \sin(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] + \\
 &\quad \left. + \sin b_{n-1} \cos a \left[\cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
 &= \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left\{ -\left[\cos(b+a) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] \sin(a + b_{n-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(a + b_{n-1}) \left[\sin(b+a) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] \right\} + \\
 &+ \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left\{ -\left[\sin(b-a) - \sin(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \cos(b_{n-1} - a) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \sin(b_{n-1} - a) \right\} = \\
 &= \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left\{ -\sin(a + b_{n-1}) \cos(b+a) + \sin(a + b_{n-1}) \cos(b_{n-1} + a_{n-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin(b+a) \cos(a + b_{n-1}) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1}) \cos(a + b_{n-1}) \right\} + \\
 &+ \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left\{ -\sin(b-a) \cos(b_{n-1} - a) + \sin(b_{n-1} - a_{n-1}) \cos(b_{n-1} - a) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin(b_{n-1} - a) \cos(b-a) - \cos(b_{n-1} - a_{n-1}) \sin(b_{n-1} - a) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left[\sin(b - b_{n-1}) + \sin(a - a_{n-1}) \right] - \\
&\quad - \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left[\sin(b - b_{n-1}) - \sin(a - a_{n-1}) \right] = \\
&= \frac{A_i D_n}{2} \left[\frac{\sin(b - b_{n-1}) + \sin(a - a_{n-1})}{B + A} - \frac{\sin(b - b_{n-1}) - \sin(a - a_{n-1})}{B - A} \right] = \\
&= \frac{A_i D_n}{2(B^2 - A^2)} \left\{ (B - A) \left[\sin(b - b_{n-1}) + \sin(a - a_{n-1}) \right] - \right. \\
&\quad \left. - (B + A) \left[\sin(b - b_{n-1}) - \sin(a - a_{n-1}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Подставляя значенія A и B , получимъ

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_i D_n}{2 \left[\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{(t_n - t_{n-1})^2} - \frac{a^2 \Theta_i^2}{l^2} \right]} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a \Theta_i}{l} \right) \left[\sin(b - b_{n-1}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin(a - a_{n-1}) \right] - \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a \Theta_i}{l} \right) \left[\sin(b - b_{n-1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(a - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
&= \frac{4 A_i D_n (t_n - t_{n-1})^2 l^2}{2 [\pi^2 l^2 - a^2 \Theta_i^2 4 (t_n - t_{n-1})^2]} \left\{ \frac{\pi l - 2 a \Theta_i (t_n - t_{n-1})}{2 l (t_n - t_{n-1})} \left[\sin(b - b_{n-1}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin(a - a_{n-1}) \right] - \frac{\pi l + 2 a \Theta_i (t_n - t_{n-1})}{2 l (t_n - t_{n-1})} \left[\sin(b - b_{n-1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(a - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
&= \frac{A_i D_n (t_n - t_{n-1}) l}{[\pi^2 l^2 - a^2 \Theta_i^2 4 (t_n - t_{n-1})^2]} \left\{ [\pi l - 2 a \Theta_i (t_n - t_{n-1})] \left[\sin(b - b_{n-1}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin(a - a_{n-1}) \right] - [\pi l + 2 a \Theta_i (t_n - t_{n-1})] \left[\sin(b - b_{n-1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(a - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
&= \frac{2 A_i D_n (t_n - t_{n-1})}{\left[\pi^2 - 4 \frac{a^2 \Theta_i^2}{l^2} (t_n - t_{n-1})^2 \right]} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - \frac{a \Theta_i}{l} (t_n - t_{n-1}) \right] \left[\sin(b - b_{n-1}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin(a - a_{n-1}) \right] - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{a \Theta_i}{l} (t_n - t_{n-1}) \right] \left[\sin(b - b_{n-1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin(a - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
&= \frac{4 A_i D_n (t_n - t_{n-1})}{\left[\pi^2 - 4 \frac{a^2 \Theta_i^2}{l^2} (t_n - t_{n-1})^2 \right]} \left[\frac{\pi}{2} \sin(a - a_{n-1}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a\theta_i}{l} (t_n - t_{n-1}) \sin (b - b_{n-1}) \Big] = \\
= & \frac{4A_i D_n (t_n - t_{n-1})}{\left[\pi^2 - 4 \frac{a^2 \theta_i^2}{l^2} (t_n - t_{n-1})^2 \right]} \left[\frac{\pi}{2} \sin a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} - \right. \\
& \left. - a\theta_i \frac{t_n - t_{n-1}}{l} \sin \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right]. \quad \dots \quad (82)
\end{aligned}$$

Второй случай.

$f_n(t) = D_n \sin \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$; $t_{n-1} < t_n < t$, колебания свободны и происходят въ участкѣ $n + m$, гдѣ $m \geq 1$;

$$\begin{aligned}
& t_{n-1} < x < t_n. \\
w_{i, n+m} = & A_i D_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t - x}{l} dx = \\
= & A_i D_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - \right. \\
- & \left. \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right] \left[\sin a\theta_i \frac{t}{l} \cos a\theta_i \frac{x}{l} - \right. \\
& \left. - \cos a\theta_i \frac{t}{l} \sin a\theta_i \frac{x}{l} \right] dx = \\
= & A_i D_n \left[\sin a\theta_i \frac{t}{l} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{x}{l} dx - \right. \\
- & \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{x}{l} dx - \\
- & \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{x}{l} dx + \\
+ & \left. \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{x}{l} dx \right] = \\
= & A_i D_n \left\{ \sin a\theta_i \frac{t}{l} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l} \right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l} \right)} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l}\right)} - \\
& - \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l}\right)} + \right. \\
& \left. + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l}\right)} \right) - \\
& - \cos \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l}\right)} - \right. \\
& \left. - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l}\right)} \right) + \\
& + \sin \frac{\pi}{2} \frac{t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l}\right)} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l}\right)}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l}\right)} \right] =
\end{aligned}$$

Вставляя прежнія сокращенныя обозначенія, получимъ:

$$\begin{aligned}
& = \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left\{ - \sin a \cos b_{n-1} \left[\cos(b_n + a_n) - \cos(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] - \right. \\
& \left. - \sin b_{n-1} \sin a \left[\sin(b_n + a_n) - \sin(b_{n-1} + a_{n-1}) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos b_{n-1} \cos a \left[\sin (b_n + a_n) - \sin (b_{n-1} + a_{n-1}) \right] - \\
& - \sin b_{n-1} \cos a \left[\cos (b_n + a_n) - \cos (b_{n-1} + a_{n-1}) \right] + \\
& + \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left\{ - \cos b_{n-1} \sin a \left[\cos (b_n - a_n) - \cos (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] - \right. \\
& - \sin b_{n-1} \sin a \left[\sin (b_n - a_n) - \sin (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] - \\
& - \cos b_{n-1} \cos a \cdot \left[\sin (b_n - a_n) - \sin (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] + \\
& \left. + \sin b_{n-1} \cos a \left[\cos (b_n - a_n) - \cos (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \right\} = \\
& = \frac{A_i D_n}{2(B+A)} \left\{ - \left[\cos (b_n + a_n) - \cos (b_{n-1} + a_{n-1}) \right] \sin (a + b_{n-1}) + \right. \\
& \left. + \cos (a + b_{n-1}) \left[\sin (b_n + a_n) - \sin (b_{n-1} + a_{n-1}) \right] \right\} + \\
& + \frac{A_i D_n}{2(B-A)} \left\{ - \left[\sin (b_n - a_n) - \sin (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \cos (b_{n-1} - a) + \right. \\
& \left[\cos (b_n - a_n) - \cos (b_{n-1} - a_{n-1}) \right] \sin (b_{n-1} - a) = \\
& = \frac{A_i D_n}{2} \left[\frac{\sin [(b_n - b_{n-1}) - (a - a_n)] + \sin (a - a_{n-1})}{B + A} - \right. \\
& \left. - \frac{\sin [(b_n - b_{n-1}) + (a - a_n)] - \sin (a - a_{n-1})}{B - A} \right] = \\
& = \frac{A_i D_n}{2} \left\{ \frac{\cos a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} + \sin a \Theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l}}{\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a \Theta_i}{l}} - \right. \\
& \left. - \frac{\cos a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} - \sin a \Theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l}}{\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a \Theta_i}{l}} \right\} = \\
& = \frac{A_i D_n}{\pi^2} \frac{1}{(t_n - t_{n-1})^2} \frac{1}{l^2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} - \right. \\
& \left. - \frac{a \Theta_i}{l} \cos a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} \right] = \\
& = \frac{4 A_i D_n (t_n - t_{n-1})}{\pi^2 - \frac{l^2}{4 a^2 \Theta_i^2} (t_n - t_{n-1})^2} \left[\frac{\pi}{2} \sin a \Theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} - \right. \\
& \left. - \frac{a \Theta_i}{l} (t_n - t_{n-1}) \cos a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} \right] \dots \dots (83)
\end{aligned}$$

Третий случай: колебания вынуждены силою

$$f_n(t) = D_{n-1} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}},$$

происходить въ участкѣ n , т.-е.

$$\begin{aligned}
 & t_{n-1} < x_i < t < t_n. \\
 w_{i,n} &= A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \cos \frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t}{l} \cos a\theta_i \frac{x}{l} dx - \\
 & - A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \cos \frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \sin a\theta_i \frac{x}{l} dx = \\
 & = A_i D_{n-1} \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l} \right)_{t_{n-1}}}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l} \right)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l} \right)_{t_{n-1}}}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l} \right)} \right\} - \\
 & - A_i D_{n-1} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left\{ \frac{-\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{x}{l} \right)_{t_{n-1}}}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l} \right)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{x}{l} \right)_{t_{n-1}}}{2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} - \frac{a\theta_i}{l} \right)} \right\} = \\
 & = \frac{A_i D_{n-1}}{\pi} \frac{2a\theta_i}{t_n - t_{n-1} - l} \left\{ \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{t}{l} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sin a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] - \right. \\
 & \left. - \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - a\theta_i \frac{t}{l} \right) - \cos a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_i D_{n-1}}{\pi} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} + \frac{a\theta_i}{l} \left\{ \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{t}{l} \right) - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \sin a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] + \right. \\
& \left. + \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + a\theta_i \frac{t}{l} \right) - \cos a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] \right\} = \\
& = \frac{A_i D_{n-1} \frac{a\theta_i}{l} (t_n - t_{n-1})^2}{\pi^2 - 4 \frac{a^2 \theta_i^2}{l^2} (t_n - t_{n-1})^2} \left(\cos a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} - \cos \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \quad (84)
\end{aligned}$$

Четвертый случай: колебания свободны и происходят въ участкѣ $n + m$ вслѣдствіе минувшей силы

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= D_{n-1} \cos \frac{\pi}{2} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \text{ при } t_{n-1} < x < t_n < t \\
w_{i, n+m} &= A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t}{l} \cos a\theta_i \frac{x}{l} dx - \\
& - A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \cos a\theta_i \frac{t}{l} \sin a\theta_i \frac{x}{l} dx = \\
& = \frac{1}{2} \frac{A_i D_{n-1}}{\pi} \frac{1}{2 \frac{a\theta_i}{l} (t_n - t_{n-1})} \cdot \left\{ \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left[\cos a\theta_i \frac{t_n}{l} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] - \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left[\sin a\theta_i \frac{t_n}{l} - \cos a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{A_i D_{n-1}}{\pi} \frac{1}{2 \frac{a\theta_i}{l} (t_n - t_{n-1})} \cdot \left\{ \sin a\theta_i \frac{t}{l} \left[\cos a\theta_i \frac{t_n}{l} - \sin a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] + \right. \\
& \left. + \cos a\theta_i \frac{t}{l} \left[-\sin a\theta_i \frac{t_n}{l} - \cos a\theta_i \frac{t_{n-1}}{l} \right] \right\} = \\
& = \frac{A_i D_{n-1}}{\left[\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{(t_n - t_{n-1})^2} - \frac{a^2 \theta_i^2}{l^2} \right]} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t - t_n}{l} + \right. \\
& \left. + \frac{a\theta_i}{l} \cos a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 A_i D_{n-1} (t_n - t_{n-1})}{\pi^2 - 4 \frac{a^2 \Theta_i^2}{l^2} (t_n - t_{n-1})^2} \left[\frac{\pi}{2} \sin a \Theta_i \frac{t - t_n}{l} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a \Theta_i}{l} (t_n - t_{n-1}) \cos a \Theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right] . . . \quad (85)
\end{aligned}$$

Пятый случай. Колебания вынуждены силою

$$f_n(t) = D_n \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

и происходят въ участкѣ n , т.-е. $t_{n-1} < x < t < t_n$, такъ что

$$\begin{aligned}
w_{i,n} &= A_i D_n \int_{t_{n-1}}^t \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t - x}{l} dx = \\
&= \frac{A_i D_n}{t_n - t_{n-1}} \left[\int_{t_{n-1}}^t x \sin a \Theta_i \frac{t - x}{l} dx - t_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \sin a \Theta_i \frac{t - x}{l} dx \right] = \\
&= \frac{A_i D_n}{t_n - t_{n-1}} \left\{ \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \left[\int_{t_{n-1}}^t x \cos a \Theta_i \frac{x}{l} dx - t_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \cos a \Theta_i \frac{x}{l} dx \right] - \right. \\
&\quad \left. - \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \left[\int_{t_{n-1}}^t x \sin a \Theta_i \frac{x}{l} dx - t_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \sin a \Theta_i \frac{x}{l} dx \right] \right\} = \\
&= \frac{A_i D_n}{t_n - t_{n-1}} \frac{l}{a \Theta_i} \left\{ \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \left[t \sin a \Theta_i \frac{t}{l} + \cos a \Theta_i \frac{t}{l} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos a \Theta_i \frac{t_{n-1}}{l} - t_{n-1} \sin a \Theta_i \frac{t}{l} \right] - \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \left[- t \cos a \Theta_i \frac{t}{l} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin a \Theta_i \frac{t}{l} - \sin a \Theta_i \frac{t_{n-1}}{l} + t_{n-1} \cos a \Theta_i \frac{t}{l} \right] \right\} = \\
&= \frac{A_i D_n}{t_n - t_{n-1}} \frac{l}{a \Theta_i} \left\{ t - t_{n-1} - \sin a \Theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right\} . . \quad (86)
\end{aligned}$$

Шестой случай. Колебания, вызванныя минувшей силою

$$f_n(t) = D_{n-1} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

свободны, происходятъ въ участкѣ $n+m$ при $t_{n-1} < x < t_n < t$ и даютъ

$$w_{i,n+m} = A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a \Theta_i \frac{t - x}{l} dx =$$

$$= \frac{A_i D_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \frac{l}{a\theta_i} \left[(t_n - t_{n-1}) \cos a\theta_i \frac{t - t_n}{l} + \sin a\theta_i \frac{t - t_n}{l} - \sin a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right] \dots \dots \dots (87)$$

Седьмой случай. Колебания вынуждены силою

$f_n(t) = -D_{n-1} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$ и происходят в участкѣ n , т.е.

$t_{n-1} < x < t < t_n$, такъ что

$$w_{i,n} = -\frac{A_i D_n}{t_n - t_{n-1}} \frac{l}{a\theta_i} \left[t_n - t_{n-1} - \sin a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right] (88)$$

Восьмой случай. Колебания, вызванныя минувшей силою

$f(t) = -D_n \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$ свободны, происходятъ в участкѣ $n + m$ при $t_{n-1} < x < t_n < t$ и даютъ

$$w_{i,n+m} = -A_i D_{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \sin a\theta_i \frac{t - x}{l} dx =$$

$$= \frac{A_i D_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \frac{l}{a\theta_i} \left[(t_n - t_{n-1}) \cos a\theta_i \frac{t - t_n}{l} + \sin a\theta_i \frac{t - t_n}{l} - \sin a\theta_i \frac{t - t_{n-1}}{l} \right] \dots \dots \dots (89)$$

Въ теченіи перваго участка $t_0 = 0$ сек. $< t < t_1 = 0,000068$ сек. для котораго $C_1 = 0,0213$ происходятъ только вынужденныя колебания, которыя получаются изъ сложенія всѣхъ $w_{i,1}$, найденныхъ изъ (82) для $n = 1$ и $i = 1, 2, \dots, 10$. На стр. 107 будетъ указано, какъ получается N и $D = NC$, входящій въ составъ (82) и слѣдующихъ уравненій.

Смѣшанныя колебания въ теченіе втораго участка

$$t_1 < t < t_2 = 0,000109 \text{ сек.}$$

для котораго $C_1 = 0,0213$ сант. получатся изъ сложенія всѣхъ свободныхъ $w_{i,2}$, полученныхъ для $i = 1, 2, \dots, 10$ изъ (83), гдѣ $n = 1$ и вынужденныхъ (84), гдѣ $n = 2$.

Свободныя колебанія третьяго участка

$$t_2 < t < t_3 = 0,000313 \text{ сек. и } C_1 = 0,0213 \text{ сант.}$$

получатся из сложения всѣхъ $w_{i,3}$, полученныхъ изъ (83), гдѣ $n=1$ и (85), гдѣ $n=2$.

Колебания $w_{i,4}$ 4-го участка $t_3 < t < t_4 = 0,000400$ сек. получаютъ изъ сложения свободныхъ колебаній (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2$} , для которыхъ $C_1 = 0,0213$ сант. и вынужденныхъ колебаній (86) _{$n=4$} , для которыхъ $C_4 = 0,0390$ сант.

Колебания $w_{i,5}$ 5-го участка $t_4 < t < t_5 = 0,000532$ сек. получаютъ изъ сложения свободныхъ колебаній (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2$} и (87) _{$n=4$} при указанныхъ C и вынужденныхъ колебаній (84) _{$n=5$} для которыхъ $C_4 = 0,0390$ сант.

Свободныя колебанія 6-го участка $t_5 < t < t_6 = 0,000662$ сек. при тѣхъ же C получаютъ изъ сложения всѣхъ $w_{i,6}$, полученныхъ изъ (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4$} .

Колебания $w_{i,7}$, седьмого участка $t_6 < t < t_7 = 0,000762$ сек. получаютъ при упомянутыхъ C изъ сложения свободныхъ колебаній (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4$} и вынужденныхъ (86) _{$n=7$} , для которыхъ $C_7 = 0,0589$ сек.

Колебания восьмого участка $t_7 < t < t_8 = 0,000851$ сек. состоятъ изъ свободныхъ (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4, n=7$} и вынужденныхъ (88) _{$n=8$} , для которыхъ $C_7 = 0,0589$ сант.

Колебания девятого участка свободны и получаютъ для $t_8 < t < t_9 = 0,001087$ сек. ввидѣ суммы всѣхъ $w_{i,9}$: (83) _{$n=1$} , (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4, n=7$} , (89) _{$n=9$} .

Колебания въ десятомъ участкѣ для

$$t_9 < t < t_{10} = 0,001210 \text{ сек.}$$

получаются ввидѣ суммы свободныхъ $w_{i,10}$: (83) _{$n=1$} ; (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4, n=7$} , (89) _{$n=8$} и вынужденныхъ (82) _{$n=10$} , для которыхъ $C_{10} = 0,0350$ сант.

Колебания въ 11-мъ участкѣ для $t_{10} < t < t_{11} = 0,001329$ сек. получаютъ ввидѣ суммы свободныхъ $w_{i,11}$: (83) _{$n=1, n=10$} ; (85) _{$n=2, n=5$} , (87) _{$n=4, n=7$} , (89) _{$n=8$} и вынужденныхъ (84) _{$n=11$} .

Колебания въ 12-мъ участкѣ свободны и получаютъ для $t_{11} \leq t < t_{12} = 0,001380$ сек. ввидѣ суммы $w_{i,12}$: (83)_{n=1, n=10}; (85)_{n=2, n=5, n=11}; (87)_{n=4, n=7} и (89)_{n=8}.

Колебания въ 13-мъ участкѣ для $t_{12} < t < t_{13} = 0,001482$ сек. получаютъ ввидѣ суммы свободныхъ (83)_{n=1, n=10}, (85)_{n=2, n=5, n=11}, (87)_{n=4, n=7}; (89)_{n=8} и вынужденныхъ (86)_{n=13}, для которыхъ $C_{13} = 0,0090$ сант.

Колебания въ 14-мъ участкѣ для $t_{13} < t < t_{14} = 0,001550$ сек. состоятъ изъ свободныхъ

$$(83)_{n=1, n=10}; (85)_{n=2, n=5, n=11}, (87)_{n=4, n=7, n=13}, (89)_{n=8}$$

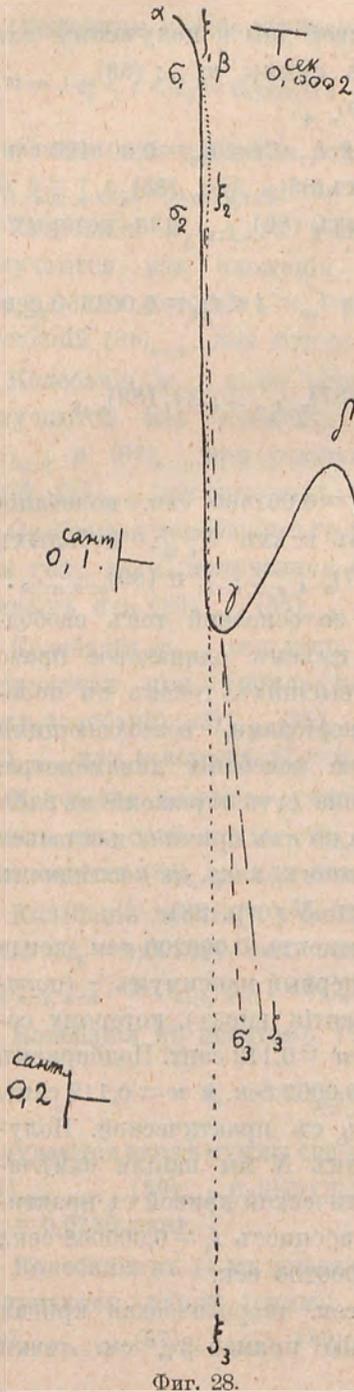
и вынужденныхъ (88)_{n=14}.

Въ 15-мъ участкѣ $t_{14} < t < t_{15} = 0,001560$ сек. колебания свободны и получаютъ сложениемъ всѣхъ $W_{i,15}$, добытыхъ изъ (83)_{n=1, n=10}; (85)_{n=2, n=5, n=11}; (87)_{n=4, n=7, n=13} и (89)_{n=8, n=15}.

Кривую *A* фиг. 25 мы сочли за основной тонъ свободныхъ колебаній динамометра и имѣемъ одинаковое право 1) предположить существованіе высшихъ тоновъ съ половиннымъ, третнимъ и т. д. періодами, возсоздающими *abc ... l*, какъ причину, вызвавшую колебанія динамометра, или 2) считать, что эти высшіе тона суть отраженіе въ бабѣ вибраціи динамометра, слѣдствіе, а не ихъ причина и остаться при одномъ основномъ тонѣ. Покажемъ, какъ въ послѣднемъ случаѣ мы находимъ коэффициентъ *N* (стр. 88).

Время $t_2 < t < t_3$ охватываетъ моментъ 0,000200 сек., когда на кривой *B* фиг. 26 появляется первый максимумъ γ (положительныя усилія вызываютъ сжатія внизъ), которому соответствуетъ замѣтный опытовый $w = 0,112$ сант. Подбираемъ *N* такимъ, чтобы въ этой точкѣ $t = 0,0002$ сек. и $w = 0,112$ сант. теоретическая траекторія слилась съ практической. Получается $N = 202899 \cdot 10^7 \frac{\text{динн}^2}{\text{сант.}}$ Съ этимъ *N* мы нашли замѣчательное совпаденіе ординатъ теоретической кривой съ практически полученной *B* фиг. 26 для абсциссъ $t_1 = 0,000068$ сек., $t_2 = 0,000109$ сек. и конечно $t = 0,000200$ сек.

Но дальше для $t_3 = 0,000313$ сек. теоретическая кривая продолжается за γ по продолженію прямой $\beta\gamma$, см. точки



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на фиг. 28, въ которой сплошную линію повторено начало опытовой кривой B фиг. 26. Приписывая расхождение теории съ опытомъ тому обстоятельству, что мы пренебрегли высшими тонами, мы вычислили для десяти i и для $t = 0,0002$ сек. отдѣльные w_i въ функции отъ N , опредѣлили $N = 258600 \cdot 10^7$ и приравняли ихъ сумму 0,112 сант., которую и разбили пропорціонально слагаемымъ, получая такимъ образомъ абсолютныя значенія отдѣльныхъ w_i для $t = 0,0002$ сек.

Опять для $t_1 = 0,000068$ сек., $t_2 = 0,000109$ и конечнот $t = 0,0002$ сек. мы получили превосходное совпаденіе теоретической кривой съ практической B фиг. 27, но для $t_3 = 0,000313$ мы получили недалеко отъ σ_3 точку ξ_3 (фиг. 28). Тогда, желая вернуться отъ опытовой кривой A фиг. 25 ближе къ теоретическимъ началамъ, мы вычислили $N = 164141 \cdot 10^7$ для десятка первыхъ тоновъ кривой C (Fouquier) фиг. 25 стр. 45 и 67, имѣя въ основѣ (40) и кривую C фиг. 27 растянули по оси абсциссъ на столько, на сколько кривая C (фиг. 25) болѣе A въ этомъ направленіи растянута. И опять для абсциссъ t_1 ; t_2 и $t = 0,0002$ сек. мы получили полное совпаденіе теоре-

тических ординатъ съ практическими, а для t_3 получили точку ξ , близкую къ σ и ξ , словомъ провѣрка формулы (73) тремя путями трижды дала почти одно и то же (ξ , σ_3 и ξ_3), но не подтвердила ея согласованности съ опытовой сплошной кривой $\alpha\beta\gamma\delta$. Изъ этого слѣдуетъ, что или формула (73) неудовлетворительна, или сила $f(t)$ не пропорциональна ординатамъ C (фиг. 27) и выражается кривою, которой характера мы не уловили.

Мы пробовали для всѣхъ трехъ случаевъ брать производныя выраженій, встрѣчающихся на стр. 105, 106, 107 для разныхъ участковъ и приравнивать ихъ нулю. Максимумовъ не получалось. Приведенный рядъ аналитическихъ разсмотрѣній вопроса объ ударѣ „по торцу“ несомнѣнно со временемъ пополнится болѣе близкими къ истинѣ, когда въ ихъ основаніе лягутъ результаты опытовъ какъ моихъ (фиг. 25 и 26), такъ и ожидаемыхъ, т.-е. когда будутъ учитываться въ функции времени силы взаимодѣйствія не только отъ бабы на динамометръ, но и обратно отъ динамометра на бабу, когда будутъ учитываться повторяющіеся стучки между ними и допущены хотя бы эмпирическія величины и времена сминанія соударяющихся частей, въ теченіе которыхъ скорость наковальни отъ нуля переходитъ черезъ скорость бабы (стр. 50). Итакъ, эти вопросы нельзя считать до сихъ поръ аналитически рѣшенными удовлетворительно даже для случая, когда не положено никакого образца между бабой и динамометромъ. Въ этомъ случаѣ, см. стр. 31, нашимъ приборомъ автоматически вычерчиваются криволинейныя ординаты сѣтки, на которой получаютъ діаграммы обжатія испытуемыхъ матеріаловъ. Въ случаѣ же помѣщенія скажемъ крешернаго столбика изъ красной отоженной мѣди между бабой и динамометромъ наши математическіе методы становятся еще сложнѣе, менѣе надежными и бесполезнѣе. Въ виду этого мы считаемъ преждевременнымъ пользоваться плодами анализа для полученія дифференціального уравненія и построенія не только діаграммы обжатія матеріаловъ, но и криволинейныхъ ординатъ сѣтки подъ діаграммы. Мы воспользуемся надежными опытвыми данными, полу-

ченными на барабанѣ Morin'a и синтезомъ ихъ построимъ криволинейныя ординаты и діаграммы обжатій въ предположеніи, что игла не гнется.

Далѣе мы изслѣдуемъ амплитуды и періоды изгибанія иглы и будемъ въ состояніи наблюдать, не выходятъ ли изъ предѣловъ допустимыхъ ея изгибаній разности между синтетически полученными діаграммами (и ихъ криволинейными ординатами) и полученными автоматически. Вводитъ же аналитически полученные колебанія иглы въ синтетически полученные діаграммы и ординаты мы не умѣемъ потому, что изгибанія иглы происходятъ во всѣхъ меридиональныхъ плоскостяхъ въ зависимости отъ направленія и скорости движенія и вопросъ сложенъ. Мы увидимъ, что когда игла обладаетъ достаточною прочностью, синтетическія и автоматическія діаграммы очень схожи, первыя вторыя приносятъ ту пользу, что даютъ возможность отсчитывать время.

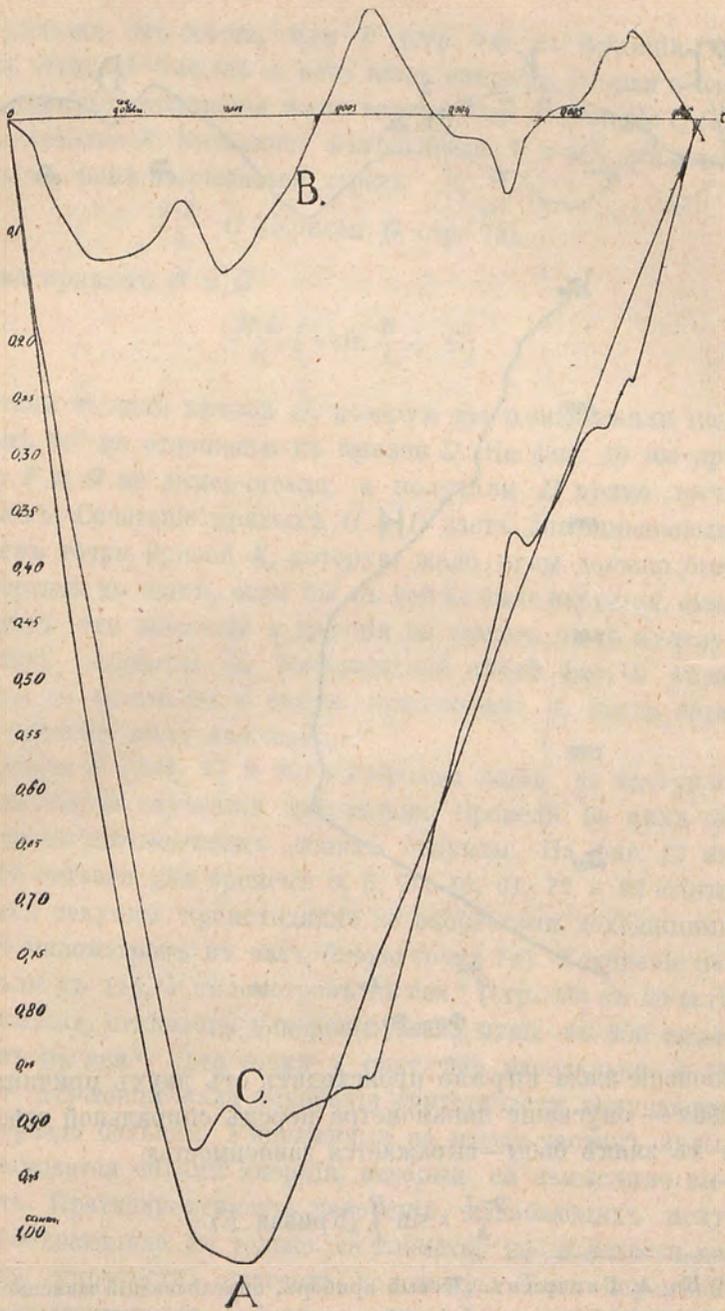
§ 24. Синтезъ нулевой ординаты и всей діаграммы (фиг. 4).

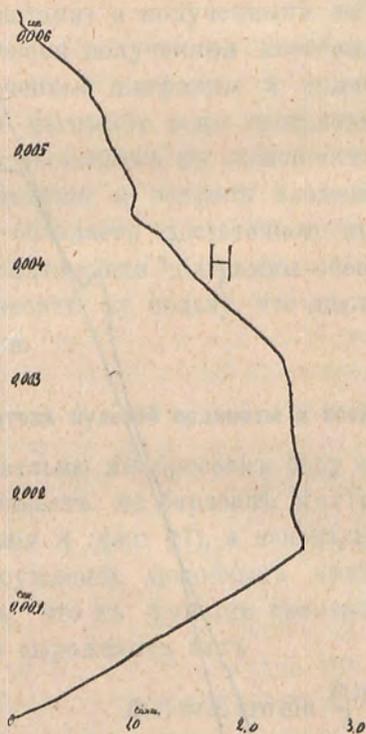
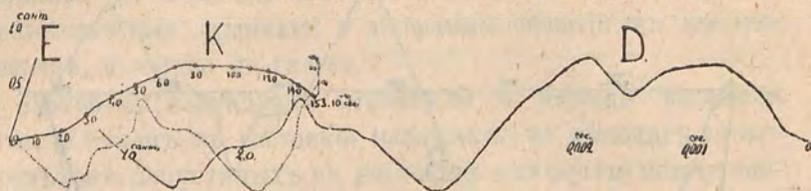
На наковальню мы бросаемъ бабу въ 12591 граммъ массы. Она вычерчиваетъ на барабанѣ Morin'a свои дѣйствительныя колебанія A (фиг. 27), а наковальня—свои B .

Изъ разсужденій, подобныхъ приведеннымъ на стр. 29 мы найдемъ, что въ функции времени величины подъема жала иглы выражаются такъ

$$D(t) = L \operatorname{arc} \sin \frac{B(t)}{l}.$$

Пользуясь этой формулой, мы вычислили подъемъ жала D (фиг. 27) на стр. 73 черезъ каждыя 0,00001 сек. на развернутой чашкѣ, когда баба съ 75 сант. падала на голую наковальню и когда она съ 4 метровъ падала на образецъ $h = 1,5$ с.; $d = 1$ сант. красной мѣди (фиг. 29 и 30). C изображаетъ разность между кривыми A и B (фиг. 27 и 29), т. е. перемѣщенія бабы по отношенію къ наковальнѣ, или то, что мы уславливались считать сжатіемъ образца, когда онъ есть (фиг. 29) и что принималось до сихъ поръ за нуль, когда его нѣтъ (фиг. 27).





Фиг. 30.

Отклонение жала вправо происходит от двух причин¹⁾. Первая — опускание динамометра перед спиральной дорожкой в вилки бабы — выражается зависимостью

$$\frac{2\pi L}{h} \lambda \sin \frac{B}{l} \quad (\text{Кривая } E)$$

¹⁾ Кн. А. Гагаринъ. „Новый приборъ, опредѣляющій зависимость между напряжениями и деформациями во время удара“. Извѣстія Спб. Политехническаго Института, ноябрь 1905.

въ функціи отъ мѣста, или F (стр. 73) въ функціи времени. Здѣсь $\lambda = 14,185$ с. есть шагъ спирали. Вторая и главная причина отклоненія жала вправо—это сближеніе C бабы съ наковальной. Вызванное измѣненіями $C = \varphi(t)$ отклоненіе жала на чашѣ выражается черезъ

$$\frac{2\pi L}{h} C \text{ (Кривая } G \text{ стр. 73).}$$

Сумма кривыхъ F и G

$$\frac{2\pi L}{h} \left(\lambda \sin \frac{B}{l} + C \right)$$

показана въ видѣ кривой H , которую мы расположили подъ угломъ 90° по отношенію къ кривой D . На фиг. 30 мы кривыхъ F и G не вычерчивали, а получали H прямо вычисленіемъ. Сочетаніе кривыхъ H и D даетъ для одинаковыхъ временъ точки кривой K , которую жало иглы должно было бы чертить на чашѣ, если бы въ ней не было вибрацій, смягчающихъ эти движенія и дающія на самомъ дѣлѣ нулевую ординату, видимую на координатной сѣткѣ фиг. 4, когда образца не положено, и самую кривую фиг. 4, когда образецъ красной мѣди положенъ.

Кривыя K (фиг. 27 и 30) вычерчены лишь до наступленія максимума опусканія наковальни. Времена на нихъ отмѣчены въ сотыхъ доляхъ секунды. На фиг. 27 мы видимъ зигзаги для временъ 0, 5, 20, 40, 61, 76 и 92 сотыхъ секунды, происходящія со скоростями, доходящими до 600 километровъ въ часъ (около точки 76). Ускореніе наковальни въ 115,74 километровъ въ сек.² (стр. 50) въ началѣ ея движенія, отвѣчаетъ ускоренію жала иглы въ 600 километровъ въ сек.². Для точки x (фиг. 26) наковальни и 76 (K фиг. 27) конца жала ускоренія синтетически получаютъ еще гораздо большія. Умноженныя на массы частицъ иглы, онѣ становятся силами инерціи, которыя ей немислимо выдержать. Кратковременность ускореній, изгибающихъ иглу и не успѣвающихъ не только ее сломать, но и довести до предѣла упругости, спасаетъ положеніе. Такъ перемѣна знака приложенныхъ внѣшнихъ силъ происходитъ въ 76 (K фиг. 27), въ теченіе приблизительно 0,00001 сек., въ те-

ченіе которыхъ гибкая игла допускаетъ измѣненіе стрѣлы прогиба отъ $+0,23$ сант. до $-0,23$ сант. съ періодомъ $0,00068$ сек. свободныхъ колебаній (стр. 115). Въ то время, какъ игла еще не изогнулась до $0,23$ сант. въ одну сторону, ее уже гнетъ въ другую и она чертитъ нулевую ординату фиг. 4, скругляющую неровности K фиг. 27, отъ которыхъ остаются замѣтными только признаки. Когда же вставленъ мѣдный образецъ и ударъ произведенъ съ большой высоты, синтетическая кривая K (фиг. 30) чертится продолжительнѣе K (фиг. 27), роль иглы ослабляется, кривая очень близка къ опытовой фиг. 4 и содержитъ всѣ ея характерныя очертанія.

§ 25. Свободныя колебанія иглы.

Замѣтимъ, что игла можетъ двигаться около неподвижной точки O (фиг. 1 и 2), прорѣзь h наковальни оставляетъ ей свободными только горизонтальныя движенія, а прорѣзь n вилки лишаетъ ее свободы и въ этихъ движеніяхъ и игла въ нашемъ случаѣ должна разсматриваться, какъ задѣланная въ шарикѣ O и свободная въ жалѣ J , если пренебрежемъ его треніемъ о чашу K . Это намъ не помѣшаетъ разсмотрѣть случай подпертости основанія конуса.

Особая сталь Путиловскаго завода, подвергнутая спеціальной термической обработкѣ Н. И. Бѣляевымъ, даетъ иглу, отвѣчающую своему назначенію, не ломающуюся и не изгибающуюся въ работѣ не только при длинѣ въ 6 сант., но и при 10 сант.

Плотность ея оказалась $\rho = 8,515$, модуль продольной упругости при растяженіи (технически $E = 1988000$).

$$E = 1,9519 \cdot 10^{12} \frac{\text{динн}}{\text{сант.}^2}$$

Скорость распространенія продольныхъ колебаній

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 478783 \frac{\text{сант.}}{\text{сек.}}$$

Предѣлъ упругости (технически $\sigma = 71$) $\sigma = 5,98 \cdot 10^9$ и соответствующее относительное удлинение

$$i = \frac{\sigma}{E} = 0,00357.$$

Разрывной грузъ (технически 110,8 kg. на mm^2) $10,9 \cdot 10^9$ динъ, на кв. сант. при относительномъ удлинении 0,0127.

Въ натуральную величину игла показана на фиг. 2.

Для того, чтобы опредѣлить періодъ ея свободныхъ колебаній, мы залили ея шарики i и f и половину O твердымъ сплавомъ съ температурой плавленія $+62^\circ \text{C}$., зажали въ тиски и ударомъ фортепьяннаго молоточка приводили въ колебанія передъ барабаномъ Морин'а. Среднее изъ 6 наблюдений дало $\tau = 0,0006817$ сек.. Размѣры иглы длина: $H = 6,02$ сант., съ жаломъ 6,28 сант., радиусъ R большого основанія 0,282 сант., радиусъ малаго $r = 0,11$ сант.

Существующіе методы изслѣдованія свободныхъ колебаній не примѣнимы къ иглѣ фиг. 2, а примѣнимы къ цѣлымъ, или усѣченнымъ конусамъ. Ввиду этого мы построили цѣлый конусъ фиг. 31 по возможности приближающійся размѣрами къ иглѣ:

$$H = 6,28 \text{ сант.}, R = 0,282 \text{ сант.}$$

и усѣченный конусъ фиг. 32 съ размѣрами:

$$H = 6,02 \text{ сант.}; R = 0,282 \text{ сант.}; r = 0,11 \text{ сант.}$$



Фиг. 31.



Фиг. 32.

(фиг. 34) начало координатъ въ центрѣ большого основанія. Вообще мы имѣемъ:

$$\frac{H+h}{R} = \frac{H+h-x}{R_x} = \frac{h}{r}$$

Исключая отсюда не интересующее насъ $h = 3,85$ сантим., мы найдемъ

$$R_x = R - \frac{R-r}{H} x = 0,282 - 0,9286 x \dots (91)$$

§ 26. Часть общая для всѣхъ методовъ.

Беремъ два совершенно независимыхъ другъ отъ друга сѣченія иглы съ радиусами R_u и R_x на разстоянїяхъ u и x отъ начала координатъ. Полагаемъ, что къ сѣченію съ радиусомъ R_u приложено изгибающее усиліе. Если мы черезъ $p(u, t)$ обозначимъ это усиліе, отнесенное къ единицѣ длины иглы и измѣняющееся съ каждымъ сѣченіемъ и со временемъ, то элементарное изгибающее усиліе для сѣченія R_u будетъ $p(u, t) du$. Оно равно произведенію массы элементарнаго отрѣзка конуса $\rho \pi R_u^2 du$ на линейное ускореніе ωu этого отрѣзка (угловое ускореніе измѣряется величинами $10000000 \frac{1}{\text{сек.}^2}$, см. стр. 50), т.-е.

$$p(u, t) du = \rho \pi R_u^2 \omega u du,$$

или

$$p(u, t) = \pi \rho \omega u \left(R - \frac{R-r}{H} u \right)^2.$$

Для другого сѣченія R_x , котораго абсцисса x не зависитъ отъ u , будемъ имѣть экваторіальный моментъ инерціи

$$I = \frac{\pi}{4} R_x^4$$

и отнесенный къ этому сѣченію изгибающій моментъ усилія $p(u, t) du$.

Этотъ моментъ будетъ

$$dM = (u-x) p(u, t) du = \pi \rho \omega u R_u (u-x) du.$$

Для брусковъ съ постояннымъ сѣченіемъ приближенное дифференціальное уравненіе равновѣсія между силами сцѣпленія частицъ и внѣшними изгибающими моментами соблюдается, когда ось бруска изгибается и принимаетъ форму упругой линіи, котораго уравненіе пишется такъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

При переменномъ же сѣченіи бруска-иглы, величины I и элементарнаго момента dM измѣняются съ сѣченіями и потому уравненіе гибкой линіи, въ какую обращается прямая ось усѣченного конуса, надо писать такъ:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \int_x^{H+h} (u-x) p(u, t) du = \pi \rho \omega \int_x^{H+h} R_u^2 (u-x) u du.$$

Производная:

$$\frac{d \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right)}{dx} = - \int_x^{H+h} p(u, t) du$$

Вторая производная будетъ уравненіемъ равновѣсія:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) = p(x, t).$$

Если къ внѣшней силѣ $p(x, t)$, отнесенной къ единицѣ длины иглы, мы прибавимъ силу инерціи, тоже отнесенную къ единицѣ длины иглы, то, согласно началу d'Alembert'a, мы получимъ систему силъ, взаимно уравновѣшивающихся во время движенія иглы.

Элементарная масса того отрѣзка иглы, къ которому приложена сила $p(x, t)$, равняется

$$\pi \rho R_x^2 dx,$$

а сила инерціи этого отрѣзка будетъ:

$$- \rho \pi R_x^2 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Отнесенная къ единицѣ длины иглы эта сила инерціи иглы будетъ:

$$-\rho \pi R_x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Итакъ уравненіе движенія иглы будетъ:

$$\pi \rho R_x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = p(x, t) = \pi \rho \omega x R_x^2 \quad (92)$$

Оно есть линейное дифференціальное уравненіе 4-го порядка въ частныхъ производныхъ съ переменными коэффициентами и послѣднимъ членомъ и называется „фундаментальнымъ“. Полное его рѣшеніе y вообще слѣдуетъ искать ввидѣ суммы $y = y_1 + y_2$, гдѣ y_1 —полное рѣшеніе этого уравненія, но безъ послѣдняго члена, т.-е. уравненія:

$$\pi \rho R_x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (93)$$

Но здѣсь мы видимъ, что отбрасываемый послѣдній членъ есть $p(x, t)$ —внѣшняя сила, не входящая въ составъ прочихъ членовъ (92). Итакъ въ уравненіи $y = y_1 + y_2$ мы имѣемъ либо $y_2 = 0$ и тогда (93) даетъ $y = y_1$ свободныя колебанія, либо имѣемъ $y_1 = 0$ и (92) даетъ $y = y_2$ вынужденныя колебанія. А такъ какъ до $t = 0$ свободныхъ колебаній не было, а былъ покой $(y)_{t < 0} = 0$, то эти свободныя колебанія у насъ къ вынужденнымъ не примѣшиваются.

Для колебаній брусковъ съ коническимъ сѣченіемъ Clebsch—St-Venant, Routh, Lord Rayleigh ¹⁾ и Morrow ²⁾ ничего не даютъ, или даютъ весьма общія директивы. Поэтому мы приведемъ здѣсь только три метода, методы Kirchhoff'a, А. Н. Крылова и В. А. Стеклова для опредѣленія основного тона и наибольшей амплитуды свободныхъ колебаній иглы. Во время службы игла подвергается лишь вынужденнымъ колебаніямъ во всѣхъ мери-

¹⁾ Lord Rayleigh, Theory of Sound, I, § 90, 1894. London.

²⁾ John Morrow. On the lateral vibration of bars of uniform and varying sectional area. Philosophical Magazine. July, 1905.

діональнихъ плоскостяхъ и настоящее разсмотрѣніе свободныхъ колебаній, надѣмся, приблизитъ насъ къ главному вопросу.

§ 27. Методъ Kirchoff'a ¹⁾ опредѣленія свободныхъ поперечныхъ колебаній цѣлаго конуса.

Геніальный Кирхгофъ на бумагѣ едва набрасывалъ маяки своихъ мыслей. Чтобъ ихъ изложить въ связи съ другими методами, намъ пришлось его обозначенія измѣнить и дополнить. Вотъ ключъ обозначеній:

у Kirchoff'a	φ	ψ	z	x	H	x	x_0	A	B	C	a		
у насъ	φ	ψ	R_x	x	H	z	$(z)_{z=M} = Z_1$	τ_1	A	B	C	D	$R^2 R_1$

Ключъ обозначеній.	у Kirchoff'a.	у насъ.
Амплитуда	u	X
Наибольшая амплитуда	U	$(X)_{x=0} = X_{max.}$
Моментъ инерціи на разстояніи одного сантиметра отъ вершины	k'	$(I)_{x=1} = \frac{\pi}{4} R_1^4$
То же въ основаніи конуса	k_0	$(I)_{x=H} = \frac{\pi}{4} R_1^4 H^4$
Площадь сѣченія на разстояніи одного сантиметра отъ вершины	q'	πR_1^2
То же въ основаніи конуса	q_0	$\pi R_1^2 H^2$
Плотность	ρ	ρ
Частота основного тона	λ	k_1
Удлиненіе	ε	i
Радіусъ основанія конуса	l	R
» конуса переменный	Z	R_x
» » на разстояніи 1 сантиметра отъ вершины	—	R_1

За интеграль (93) принимаемъ $y_1 = X \text{Sink}_1 t$, когда игла, колеблясь, воспроизводитъ основной тонъ. Здѣсь X , амплитуда колебаній, есть функція одного только x , а k_1 пока еще неизвѣстная постоянная—частота $\frac{2\pi}{\tau_1}$ этого тона.

Имѣемъ

$$\frac{\partial y}{\partial t} = X k_1 \text{Cos} k_1 t; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -X_1^2 \sin k_1 t; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \sin k_1 t$$

¹⁾ G. Kirchoff. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1882. стр. 348.

и изъ (93);

$$-\pi \rho R_x^2 X k_1^2 \sin \kappa_1 t = -E \sin \kappa_1 t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)$$

время исчезаетъ и остается

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(R_x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{4 \rho R_x^2 X k_1^2}{E} \dots \dots \dots (94)$$

Изъ фиг. 33 мы имѣемъ

$$R_x = \frac{R}{H} x = \frac{0,282}{6,28} x = R_1 x = 0,0449x.$$

Подставимъ въ (94) и получимъ

$$R_1^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{4 \rho k_1^2}{E} X x^2,$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{4 \rho k_1^2}{E R_1^2} X x^2 \dots \dots \dots (95)$$

Преобразуемъ лѣвую часть (95)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) &= 4x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} + x^4 \frac{d^3 X}{dx^3} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) &= 12x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + 8x^3 \frac{d^3 X}{dx^3} + x^4 \frac{d^4 X}{dx^4} \end{aligned}$$

Последнюю форму мы можемъ получить и иначе. Для этого будемъ искать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) &= 3x^2 \frac{dX}{dx} + x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) &= 3 \frac{dX}{dx} + x \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) \right] &= 4 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{d^3 X}{dx^3} \\ x^3 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) \right] &= 4x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} + x^4 \frac{d^3 X}{dx^3} \end{aligned}$$

и наконецъ

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^3 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) \right] \right\} = 12x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + 8x^3 \frac{d^3 X}{dx^3} + x^4 \frac{d^4 X}{dx^4}$$

Подставивъ $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (стр. 22), мы придадимъ (95)

интересный видъ:

$$\frac{4 k_1^2 X}{a^2 R_1^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^3 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) \right] \right\} \dots (96)$$

Содержимое здѣсь въ квадратныхъ скобкахъ оказывается

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) = \pm \frac{2 k_1 X}{a R_1}.$$

Дѣйствительно, если мы сдѣлаемъ эту подстановку въ предыдущее уравненіе, мы получимъ

$$\frac{4 k_1^2 X}{a^2 R_1^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^3 \frac{d}{dx} \left[\pm \frac{2 k_1 X}{a R_1} \right] \right\}.$$

Вынесемъ постоянныя за знаки дифференціаловъ правой части. Тогда мы получимъ

$$\frac{4 k_1^2 X}{a^2 R_1^2} = \pm \frac{2 k_1}{a R_1} \left[\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^3 \frac{dX}{dx} \right\} \right] \dots (97)$$

Здѣсь въ квадратныхъ скобкахъ опять появилась та же величина

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) = \pm \frac{2 k_1 X}{a R_1}$$

и что это послѣднее уравненіе вѣрно, видно изъ того, что подставленное въ (96) оно даетъ тождество

$$\frac{4 k_1^2 X}{a^2 R_1^2} = \left(\pm \frac{2 k_1}{a R_1} \right) \left(\pm \frac{2 k_1 X}{a R_1} \right)$$

Вводимъ новую переменную

$$\frac{2 k_1}{a R_1} x = z \text{ откуда } \frac{2 k_1}{a R_1} dx = dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \frac{dX}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{2 k_1}{a R_1} \frac{dX}{dz} \\ x^3 \frac{dX}{dx} &= z^3 \frac{R_1^2 a^3}{8 k_1^3} \frac{2 k_1}{a R_1} \frac{dX}{dz} = z^3 \frac{R_1^2 a^2}{4 k_1^2} \frac{dX}{dz} \\ \frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dX}{dx} \right) &= \frac{d}{dz} \left(z^3 \frac{R_1^2 a^2}{4 k_1^2} \frac{dX}{dz} \right) = \frac{R_1^2 a^2}{4 k_1^2} \frac{d}{dz} \left(z^3 \frac{dX}{dz} \right) \frac{dz}{dx} = \end{aligned}$$

$$= \frac{R_1^2 a^2}{4 k_1^2} \left(3 z^2 \frac{dX}{dz} + z^3 \frac{d^2 X}{dz^2} \right) \frac{2 k_1}{a R_1} = \frac{R_1 a}{2 k_1} \left(3 z^2 \frac{dX}{dz} + z^3 \frac{d^2 X}{dz^2} \right)$$

и наконецъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dX}{dx} \right) &= \frac{4 k_1^2}{a^2 R_1^2} \frac{1}{z^2} \frac{R_1 a}{2 k_1} \left(3 z^2 \frac{dX}{dz} + z^3 \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = \\ &= \frac{2 k_1}{R_1 a} \left(3 \frac{dX}{dz} + z \frac{d^2 X}{dz^2} \right). \end{aligned}$$

(97) теперь превращается въ

$$\frac{4 k_1^2 X}{a^2 R_1^2} = \pm \frac{2 k_1}{a R_1} \frac{2 k_1}{a R_1} \left(3 \frac{dX}{dz} + z \frac{d^2 X}{dz^2} \right)$$

что по сокращеніи даетъ

$$\pm X = 3 \frac{dX}{dz} + z \frac{d^2 X}{dz^2},$$

или подробнѣе

$$z \frac{d^2 X}{dz^2} + 3 \frac{dX}{dz} = X \dots \dots \dots (98)$$

$$z \frac{d^2 X}{dz^2} + 3 \frac{dX}{dz} = -X \dots \dots \dots (99)$$

Итакъ уравненіе 4-го порядка (95) привелось къ двумъ уравненіямъ (98) и (99) второго порядка. Частные ихъ интегралы намъ не извѣстны, но мы найдемъ частные интегралы другой пары уравненій, имѣющей связь съ этими. Въ этой парѣ

$$z \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} = \varphi \dots \dots \dots (100)$$

$$z \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{d\psi}{dz} = -\psi \dots \dots \dots (101)$$

положимъ

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = X; \frac{d\varphi}{dz} = \int X dz; \varphi = \int \left(\int X dz \right) dz.$$

Тогда (100) превратится въ

$$z X + \int X dz = f \left(\int X dz \right) dz.$$

Дифференцируя, получимъ

$$z \frac{dX}{dz} + 2 X = \int X dz.$$

Дифференцируя второй разъ, мы получимъ (98) именно

$$z \frac{d^2 X}{dz^2} + 3 \frac{dX}{dz} = X.$$

Итакъ мы видимъ, что изъ (101) можемъ получить (98), полагая

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = X.$$

Точно такъ же мы изъ (101) получимъ (99), полагая

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = X.$$

Если мы обозначимъ черезъ φ_1 и φ_2 два частныхъ интеграла уравненія (100) и черезъ ψ_1 и ψ_2 два частныхъ интеграла уравненія (101), мы получимъ общій интегралъ X уравненія (95) сложениемъ

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2}, \frac{d^2 \varphi_2}{dz^2}, \frac{d^2 \psi_1}{dz^2}, \frac{d^2 \psi_2}{dz^2},$$

умноженныхъ на произвольныя постоянныя.

Займемся розысканіемъ $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$. Будемъ φ_1 искать ввидѣ ряда:

$$\varphi_1 = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 + \dots$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + 4A_4 z^3 + 5A_5 z^4 + \dots$$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 z + 4 \cdot 3 \cdot A_4 z^2 + 5 \cdot 4 \cdot A_5 z^3 + \dots$$

Вставивъ эти выраженія въ (100), мы получимъ:

$$2A_2 z + 3 \cdot 2 \cdot A_3 z^2 + 4 \cdot 3 \cdot A_4 z^3 + \dots + A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \dots = \\ = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

Сличая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ z въ лѣвой и правой частяхъ этого уравненія, мы получимъ:

$$A_1 = A_0; 4A_2 = A_1; 9A_3 = A_2; 16A_4 = A_3; 25A_5 = A_4,$$

откуда

$$A_1 = \frac{A_0}{1!^2}; A_2 = \frac{A_1}{4} = \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{2!^2}; A_3 = \frac{A_2}{9} = \frac{A_0}{2!^2 3^2} = \frac{A_0}{3!^2}; A_4 = \frac{A_3}{16} = \frac{A_0}{4!^2}; \dots$$

$$A_1 = 1; A_2 = \frac{1}{2!^2}; A_3 = \frac{1}{3!^2}; \dots$$

Полагая $A_0 = 1$, мы найдемъ $A_1 = 1; A_2 = \frac{1}{2!^2}; A_3 = \frac{1}{3!^2}; \dots$, такъ что

$$\varphi_1 = 1 + \frac{z}{1!^2} + \frac{z^2}{2!^2} + \frac{z^3}{3!^2} + \frac{z^4}{4!^2} + \frac{z^5}{5!^2} + \dots$$

$$\varphi_1^2 = 1 + \frac{2z}{1!^2} + \frac{z^2}{1!^4} + \frac{2z^2}{2!^2} + \frac{2z^3}{1!^2 2!^2} + \frac{z^4}{2!^4} + \frac{2z^3}{3!^2} + \frac{2z^4}{1!^2 3!^2} + \frac{2z^5}{2!^2 3!^2} + \frac{z^6}{3!^4} + \dots$$

$$\varphi_1^2 = 1 + \frac{2z}{1!^2} + z^2 \left[\frac{1}{1!^4} + \frac{2}{1!^2 2!^2} \right] + 2z^3 \left[\frac{1}{2!^2} + \frac{1}{3!^2} \right] +$$

$$+ z^4 \left[\frac{1}{2!^4} + \frac{2}{3!^2} + \frac{2}{4!^2} \right] + \dots$$

$$z\varphi_1^2 = z + 2z^3 + \frac{3}{2} z^3 + \frac{5}{9} z^4 + \frac{35}{288} z^5 + \frac{77}{4320} z^6 +$$

$$+ \frac{143}{105840} z^7 + \frac{1287}{162570240} z^8 + \dots$$

Зная интегралъ φ_1 уравненія (100), мы можемъ на единицу понизить порядокъ послѣдняго, введя вмѣсто φ новую неизвѣстную функцію α и положивъ

$$\varphi = \varphi_1 \int \alpha dz,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi_1}{dz} \int \alpha dz + \varphi_1 \alpha; \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} \int \alpha dz + 2 \frac{d\varphi_1}{dz} \alpha + \varphi_1 \frac{d\alpha}{dz}$$

Вставивъ это въ (100), мы получимъ

$$z \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} \int \alpha dz + 2z \frac{d\varphi_1}{dz} \alpha + z\varphi_1 \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\varphi_1}{dz} \int \alpha dz + \varphi_1 \alpha = \varphi_1 \int \alpha dz,$$

или

$$\left(z \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \frac{d\varphi_1}{dz} - \varphi_1 \right) \int \alpha dz + 2z\alpha \frac{d\varphi_1}{dz} + z\varphi_1 \frac{d\alpha}{dz} + \varphi_1 \alpha = 0.$$

Здѣсь въ скобкахъ мы имѣемъ величину, тождественно равную нулю

$$z \varphi_1 \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \frac{d\varphi_1}{dz} - \varphi_1 = 0,$$

потому что φ_1 есть частный интеграль (100). Теперь у насъ остается:

$$z \varphi_1 \frac{d\alpha}{dz} + \alpha \left(\varphi_1 + 2z \frac{d\varphi_1}{dz} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

уравнение перваго порядка, дающее

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{\left(2z \frac{d\varphi_1}{dz} + \varphi_1 \right) dz}{z\varphi_1} = 0, \text{ или } \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{2 \frac{d\varphi_1}{dz}}{\varphi_1} dz + \frac{dz}{z} = 0$$

$$d \lg \alpha + 2 d \lg \varphi_1 + d \lg z = d \lg \alpha \varphi_1^2 z = 0,$$

откуда

$$\alpha \varphi_1^2 z = C.$$

Положимъ $C = 1$. Тогда

$$\alpha = \frac{1}{\varphi_1^2 z}$$

и явится интеграломъ (102). Это уравнение (102) есть уравнение (100), когда порядокъ послѣдняго пониженъ на единицу. Это приводитъ насъ къ мысли положить

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \alpha dz = \varphi_1 \int \frac{dz}{z\varphi_1^2}.$$

Найдемъ здѣсь

$$\frac{1}{z\varphi_1^2},$$

непосредственно дѣля единицу на имѣющійся у насъ многочленъ $z\varphi_1^2$. Получимъ:

$$\frac{1}{z\varphi_1^2} = \frac{1}{z} - 2 + \frac{5}{2}z - \frac{23}{9}z^2 + \dots$$

такъ что

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int \frac{dz}{z\varphi_1^2} = \varphi_1 \int \frac{dz}{z} - \varphi_1 \left[2 \int dz - \frac{5}{2} \int z dz + \right. \\ \left. + \frac{23}{9} \int z^2 dz - \dots \right],$$

или

$$\varphi_2 = \varphi_1 \lg z - \varphi_1 \left[2z - \frac{5}{4}z^2 + \frac{23}{81}z^3 - \dots \right],$$

или

$$\varphi_2 = \varphi_1 \lg z - \left[1 + \frac{z}{1!^2} + \frac{z^2}{2!^2} + \frac{z^3}{3!^2} + \frac{z^4}{4!^2} + \dots \right] \left[2z - \frac{5}{4}z^2 + \right.$$

$$+ \frac{23}{81} z^3 - \frac{1061}{1152} z^4 + \dots] ,$$

или

$$\varphi_2 = \varphi_1 \lg z - 2 \left[\frac{z}{1!^2} + \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2!^2} + \frac{z^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{3!^2} + \dots \right] ,$$

или

$$\varphi_2 = \varphi_1 \lg z - 2z - \frac{3}{4} z^2 - \dots$$

ψ_1 и ψ_2 мы найдемъ такимъ же способомъ, какимъ нашли φ_1 и φ_2 . Теперь для уравнений (100) и (101) мы имѣемъ слѣдующіе 4 частныхъ интеграла:

$$\varphi_1 = 1 + \frac{z}{1!^2} + \frac{z^2}{2!^2} + \frac{z^3}{3!^2} + \dots$$

$$\psi_1 = 1 - \frac{z}{1!^2} + \frac{z^2}{2!^2} - \frac{z^3}{3!^2} + \dots$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \lg z - 2 \left[\frac{z}{1!^2} + \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2!^2} + \frac{z^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{3!^2} + \dots \right]$$

$$\psi_2 = \psi_1 \lg z + 2 \left[\frac{z}{1!^2} - \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2!^2} + \frac{z^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{3!^2} - \dots \right]$$

Общій же интеграль (95) получится сложениемъ ихъ вторыхъ производныхъ, умноженныхъ на произвольныя постоянныя A , B , C и D , именно

$$X = A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + C \frac{d^2 \varphi_2}{dz^2} + D \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} \dots (103)$$

§ 28. Условія закрѣпленія.

Введемъ теперь условіе закрѣпленія. Вершина конуса свободна, т. е. для $x=0$ изгибающій моментъ равенъ нулю и сръзывающая сила равна нулю, т. е.

$$(M)_{x=0} = (EIX'')_{x=0} = 0 ; (S)_{x=0} = \left[\frac{d}{dx} (M) \right]_{x=0} = \\ = \left[E \frac{d}{dx} (IX'') \right]_{x=0} = 0$$

Въ данномъ случаѣ

$$(I)_{x=0} = 0$$

и изъ приведенныхъ условий не слѣдуетъ обычное

$$X'' = 0 \text{ и } X''' = 0,$$

но такъ какъ вообще

$$I = \text{const} \cdot x^4 = \text{const} \cdot z^4,$$

то условия закрѣпленія свободного конца будутъ

$$(z^4 X'')_{z=0} = 0 \text{ и } \left[\frac{d}{dz} (z^4 X''') \right]_{z=0} = 0.$$

Образуемъ эти величины. Изъ (103) мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dz} &= A \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} + B \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} + C \frac{d^3 \varphi_2}{dz^3} + D \frac{d^3 \psi_2}{dz^3} \\ \frac{d^2 X}{dz^2} &= A \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + B \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} + C \frac{d^4 \varphi_2}{dz^4} + D \frac{d^4 \psi_2}{dz^4} \\ z^4 \frac{d^2 X}{dz^2} &= A z^4 \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + B z^4 \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} + C z^4 \frac{d^4 \varphi_2}{dz^4} + D z^4 \frac{d^4 \psi_2}{dz^4}. \end{aligned} \quad (104)$$

Здѣсь

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = 1 + \frac{z}{1 \cdot 2^2} + \frac{z^2}{2! \cdot 3} + \dots = 1 + \frac{z}{1 \cdot 2!} + \frac{z^2}{2! \cdot 3!} + \frac{z^3}{3! \cdot 4!} \dots \quad (105)$$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = \frac{1}{2!} + \frac{z}{1 \cdot 3!} + \frac{z^2}{2! \cdot 4!} + \frac{z^3}{3! \cdot 5!} + \dots \quad (106)$$

$$\frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} = \frac{1}{3!} + \frac{z}{1 \cdot 4!} + \frac{z^2}{2! \cdot 5!} + \frac{z^3}{3! \cdot 6!} + \dots$$

$$\frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} = \frac{1}{4!} + \frac{z}{1 \cdot 5!} + \frac{z^2}{2! \cdot 6!} + \frac{z^3}{3! \cdot 7!} + \dots$$

Точно такъ же найдемъ

$$\frac{d^4 \psi_1}{dz^4} = \frac{1}{4!} + \frac{z}{1 \cdot 5!} + \frac{z^2}{2! \cdot 6!} + \frac{z^3}{3! \cdot 7!} + \dots$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{\varphi_1}{z} + \lg z \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{d\varepsilon}{dz}$$

$$\text{Здѣсь } \varepsilon = -2 \left[\frac{z}{1^2} + \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{2} \right)}{1 \cdot 2^2} + \dots \right]$$

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dz^2} = -\frac{\varphi_1}{z^2} + 2 \frac{1}{z} \frac{d\varphi_1}{dz} + \lg z \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2}$$

$$\frac{d^3\varphi_2}{dz^3} = \frac{2\varphi_1}{z^3} - \frac{2}{z^2} \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{2}{z} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2}; \quad \frac{d^4\varphi_2}{dz^4} = -\frac{2.3\varphi_1}{z^4} + \frac{2.2}{z^3} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \dots$$

Но такъ какъ $\varphi_1 = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4\varphi_2}{dz^4} &= \frac{2.3}{z^4} + \frac{2.3}{1!z^3} + \frac{2.3}{2!z^2} + \dots \\ \frac{d^4\psi_2}{dz^4} &= \frac{2.3}{z^4} - \frac{2.3}{1!z^3} + \frac{2.3}{2!z^2} - \dots \end{aligned} \right\} \dots (108)$$

Вставляя (107) и (108) въ (104), мы найдемъ:

$$-z^4 \frac{d^3X}{dz^3} = Az^4 \left(\frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \dots \right) + Bz^4 \left(\frac{1}{4!} - \frac{z}{5!} + \dots \right) + Cz^4 \left(\frac{3!}{z^4} + \frac{3!}{1!z^3} + \frac{3!}{2!z^2} + \dots \right) + Dz^4 \left(\frac{3!}{z^4} - \frac{3!}{1!z^3} + \frac{3!}{2!z^2} - \dots \right) \quad (109)$$

§ 29. Тонкій конецъ свободенъ.

Выраженія (100) и его производныя должны равняться нулю въ тонкомъ концѣ иглы. Если мы положимъ, что конусъ не усѣченный, т. е. что тонкій конецъ и есть вершина конуса, мы будемъ имѣть $z = 0$. Если мы $z = 0$ подставимъ въ (109), мы получимъ $0 = 3!(C + D)$, откуда является необходимость $C = -D$. Далѣе

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \left(z^4 \frac{d^2X}{dz^2} \right) &= 4Az^3 \left(\frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \dots \right) + Az^4 \left(\frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \dots \right) + \\ &+ 4Bz^3 \left(\frac{1}{4!} - \frac{z}{5!} + \dots \right) + Bz^4 \left(-\frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} - \dots \right) + 4Cz^3 \left(\frac{3!}{z^4} + \frac{3!}{1!z^3} - \right. \\ &- \frac{2.2}{z^3} + \dots \left. \right) + Cz^4 \left(-\frac{4!}{z^5} - \frac{3.3!}{1!z^4} + \frac{2.3!}{z^4} + \dots \right) + 4Dz^3 \left(\frac{3!}{z^4} - \frac{3!}{1!z^3} + \right. \\ &\left. + \frac{2.2}{z^3} + \dots \right) + Dz^4 \left(-\frac{4!}{z^5} + \frac{3.3!}{1!z^4} - \frac{2.3!}{z^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

По сокращеніи мы увидимъ, что при $z = 0$ это выраженіе превращается въ нуль, когда $C = D$. Но $C = -D = D$ возможно лишь, когда $C = D = 0$ ¹⁾.

¹⁾ Если бы мы приняли, что конусъ усѣченный, условіе свободнаго малаго основанія состояло бы въ томъ, чтобъ выраженіе (109) превращалось въ нуль при $x = h$ (фиг. 33). Это представляло бы затрудненіе для вычисленія A , B , C и D и дальнѣйшихъ величинъ. Несомнѣнно, что въ виду этого Kirchhoff и не разсматривалъ случая усѣченнаго конуса.

При этомъ условіи (103) превращается въ

$$X = A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2}$$

§ 30. Основаніе подперто.

Положимъ сперва, что основаніе конуса подперто. (Этотъ случай у Kirchhoff'a не разсмотрѣнъ).

Въ такомъ случаѣ имѣемъ, что при $x = H$ и

$$z = \frac{2 k_1 H}{a R_1},$$

должно быть

$$X = 0 \text{ и } \frac{d^2 X}{dz^2} = 0, \text{ откуда и } \frac{d^2 X}{dz^2} = 0, \text{ т. е.}$$

$$A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = 0 \dots \dots \dots (110)$$

$$A \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + B \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} = 0 \dots \dots \dots (111)$$

Если въ (100) и (101) мы вставимъ ихъ интегралы φ_1 и ψ_1 , мы получимъ тождества

$$z \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + \frac{d \varphi_1}{dz} = \varphi_1$$

$$z \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \frac{d \psi_1}{dz} = -\psi_1.$$

Продифференцировавъ ихъ два раза, мы образуемъ (110) и (111):

$$z \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} + 2 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = \frac{d \varphi_1}{dz} \dots \dots \dots (112)$$

даетъ

$$3z \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} + 6 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = 3 \frac{d \varphi_1}{dz};$$

$$z \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} + 2 \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = -\frac{d \psi_1}{dz} \dots \dots \dots (113)$$

даетъ

$$3z \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} + 6 \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = -3 \frac{d \psi_1}{dz},$$

$$z \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + 3 \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} = \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \text{ даетъ } z^2 \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + 3z \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} = z \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3}$$

$$\begin{aligned}
z \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} + 3 \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} = - \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \text{ даетъ } z^2 \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} + 3z \frac{d^3 \psi_1}{dz^3} = -z \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \\
z^2 \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} - 6 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + 3 \frac{d\varphi_1}{dz} = z \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \\
\text{даетъ } z^2 A \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} - 6A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + 3A \frac{d\varphi_1}{dz} = zA \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \\
z^2 \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} - 6 \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - 3 \frac{d\psi_1}{dz} = -z \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \text{ даетъ} \\
z^2 B \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} - 6B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - 3B \frac{d\psi_1}{dz} = -zB \frac{d^2 \psi_1}{dz^2}.
\end{aligned}$$

Наконецъ:

$$\begin{aligned}
z^2 \left(A \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + B \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} \right) - 6 \left(A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \right) + 3 \left(A \frac{d\varphi_1}{dz} - B \frac{d\psi_1}{dz} \right) = \\
= z \left(A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \right).
\end{aligned}$$

Здѣсь первая скобка равна нулю благодаря (111), вторая благодаря (110), такъ что остается:

$$\frac{z}{3} \left(A \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - B \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \right) = A \frac{d\varphi_1}{dz} - B \frac{d\psi_1}{dz}$$

или

$$A \left(\frac{z}{3} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - \frac{d\varphi_1}{dz} \right) = B \left(\frac{z}{3} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - \frac{d\psi_1}{dz} \right)$$

(110) намъ даетъ

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{z}{3} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - \frac{d\psi_1}{dz}}{\frac{z}{3} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - \frac{d\varphi_1}{dz}} = - \frac{\frac{d^2 \psi_1}{dz^2}}{\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2}},$$

откуда

$$\frac{z}{3} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \frac{d\psi_1}{dz} + \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d\psi_1}{dz} \right). \quad (114)$$

Перемножимъ содержимое въ послѣднихъ скобкахъ, именно:

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = 1 + \frac{z}{1!2!} + \frac{z^2}{2!3!} + \frac{z^3}{3!4!} + \dots; \quad - \frac{d\psi_1}{dz} = 1 - \frac{z}{1!2!} + \frac{z^2}{2!3!} - \frac{z^3}{3!4!} + \dots$$

Получимъ

$$\frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d\psi_1}{dz} = -1 + \frac{z^2}{1!2!3!} - \frac{z^4}{2!3!5!} + \dots$$

и правая часть (114) будетъ

$$\frac{\bar{a}}{dz} \left(\frac{d\varphi_1}{dz}, \frac{d\psi_1}{dz} \right) = \frac{2z}{1! 2! 3!} - \frac{4z^3}{2! 3! 5!} + \dots$$

Раздѣливъ ее на $2z$, получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{2z} \left(\frac{d\varphi_1}{dz}, \frac{d\psi_1}{dz} \right) &= \frac{1}{2! 3!} - \frac{z^2}{1! 3! 5!} + \frac{z^4}{2! 4! 7!} - \frac{z^6}{3! 5! 9!} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!(n+2)!(2n+3)!} + \dots \quad (115) \end{aligned}$$

Теперь образуемъ лѣвую часть уравненія (114):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} &= \frac{1}{2!} + \frac{z}{1! 3!} + \frac{z^2}{2! 4!} + \frac{z^3}{3! 5!} + \dots; \quad \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z}{1! 3!} + \frac{z^2}{2! 4!} - \frac{z^5}{3! 5!} + \dots \\ \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} \cdot \frac{d^2\psi_1}{dz^2} &= \frac{1}{2!^2} - \frac{z^2}{3! 4!} + \frac{z^4}{2! 4! 6!} - \frac{z^6}{6! 8!} \end{aligned}$$

Раздѣлимъ это уравненіе на 3 и мы получимъ рядъ, равный ряду (115):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1! 2! 3!} - \frac{z^2}{3! 3! 4!} + \frac{z^4}{3! 4! 6!} - \frac{z^6}{3! 6! 8!} + \dots = \\ = \frac{1}{1! 2! 3!} - \frac{z^2}{1! 3! 5!} + \frac{z^4}{2! 4! 7!} - \frac{z^6}{3! 5! 9!} + \dots \end{aligned}$$

Здѣсь первые члены сокращаются вовсе, а прочіе сокращаются на z^2 . Переносимъ все въ лѣвую часть уравненія, мы получимъ:

$$-\frac{1}{3 \cdot 3! 4!} + \frac{z^2}{3! 4! 6!} - \frac{z^4}{3 \cdot 6! 8!} + \frac{1}{3! 5!} - \frac{z^2}{2! 4! 7!} + \frac{z^4}{3! 5! 9!} = 0,$$

или

$$-\frac{1}{3 \cdot 3! 5!} + \frac{2z^2}{3! 4! 7!} - \frac{z^4}{6! 9!} = 0, \text{ или } z^4 - 720 z^2 + 120960 = 0,$$

такъ что

$$z^2 = +360 \pm 93; \quad z_1 = 16,3, \quad z_2 = 21,3.$$

Какъ установлено въ началѣ сего параграфа, для основанія конуса имѣемъ

$$x = H \text{ и } z = \frac{2 k_1 H}{a R_1}.$$

Въ этомъ уравненіи намъ все извѣстно, кромѣ k_1 , частоты. Находимъ ее:

$$k_1 = \frac{aR_1 z}{2H} = \frac{478783.0,045.16,3}{2,6,28} = 27722 \text{ (стр. 22, 121, фиг. 33)}$$

колебаній въ 2π секундъ для основнаго тона. Отсюда періодъ основнаго тона колебаній подпертой иглы будетъ

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 0,00022665 \text{ сек.}$$

§ 31. Основаніе задѣлано.

Перейдемъ къ случаю, рассмотрѣнному Kirchhoff'омъ, когда основаніе конуса задѣлано. Условія § 29 свободнаго тонкаго конца остаются тѣ же. Но для основанія конуса мы вмѣсто условій § 30 (110) и (111) при

$$x = H \text{ и } z = \frac{2k_1 H}{aR_1}$$

имѣемъ

$$y = 0 \text{ и } X = 0$$

и еще

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ и } \frac{dX}{dz} = 0.$$

Тогда (103) даетъ

$$A \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0 \dots \dots \dots (110)$$

$$A \frac{d^3\varphi_1}{dz^3} + B \frac{d^3\psi_1}{dz^3} = 0 \dots \dots \dots (116)$$

Умножимъ (112) на A , а (113) на B и сложимъ:

$$z \left(A \frac{d^3\varphi_1}{dz^3} + B \frac{d^3\psi_1}{dz^3} \right) + 2 \left(A \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + B \frac{d^2\psi_1}{dz^2} \right) = A \frac{d\varphi_1}{dz} - B \frac{d\psi_1}{dz}.$$

Здѣсь обѣ скобки равны нулю въ силу равенствъ (110) и (116), такъ что остается

$$A \frac{d\varphi_1}{dz} - B \frac{d\psi_1}{dz} = 0.$$

Это и (110) даютъ

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{d\psi_1}{dz}}{\frac{d\varphi_1}{dz}} = -\frac{\frac{d^2\psi_1}{dz^2}}{\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}} \dots \dots \dots (117)$$

или

$$\frac{d\psi_1}{dz} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi_1}{dz} \frac{d\varphi_1}{dz} \right) = 0,$$

или

$$\frac{2z}{1!2!3!} - \frac{4z^3}{2!3!5!} + \dots = 0,$$

или, основываясь на (114),

$$\frac{1}{1!2!3!} - \frac{z^2}{1!3!5!} + \frac{z^4}{2!4!7!} - \frac{z^6}{3!5!9!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!(n+2)!(2n+3)!} + \dots = 0 \quad (118)$$

Изслѣдуемъ сходимость этого ряда, пользуясь признакомъ d'Alembert, т. е. узнавая, будетъ ли отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему меньше единицы.

Мы найдемъ, что:

$$\frac{\frac{z^{2n+2}}{(n+1)!(n+3)!(2n+5)!}}{z^{2n}} = \frac{z^2}{n!(n+2)!(2n+3)!} \dots \dots \dots$$

Условіе, чтобы отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему было меньше единицы, здѣсь гарантируется любою изъ четырехъ скобокъ въ знаменателѣ послѣдняго выраженія. Всѣ же четыре скобки доказываютъ, что рядъ (118) быстро сходящійся.

Если при вычисленіи z мы ограничимся двумя членами знакопеременнаго ряда (118), получимъ наименьшій положительный корень $z_1 = 7,74$. При трехъ членахъ мы найдемъ $z_1 = 8,84$. Kirchhoff пользовался большимъ числомъ членовъ и получилъ $z_1 = 8,718$, число, которое онъ и выдаетъ за наи-

меньшій корень (118), отвѣчающій основному тону, относительно котораго

$$z_1 = \frac{2k_1 H}{aR_1}$$

даетъ частоту

$$k_1 = \frac{aR_1 z_1}{2H} = \frac{478783.0,045.8,718}{2.6,28} = 14920$$

и періодъ колебаній основнаго тона иглы со свободнымъ концомъ и задѣланнымъ основаніемъ будетъ

$$\tau_1 = 0,00042 \text{ сек.}$$

На фиг. 31 изображенъ конусъ, изготовленный согласно заданному, но изъ стали нѣсколько отличающейся величинами ρ и E отъ принятыхъ здѣсь. Изслѣдованіе подъ микроскопомъ Zeiss'a ея вибрацій передъ барабаномъ Morin'a дали $\tau = 0,0004189$, какъ среднее изъ 12 наблюденій.

§ 32. Амплитуда колебаній иглы при предѣлѣ упругости.

Теперь займемся наибольшей амплитудой X колебаній, допускаемой предѣломъ упругости $\sigma = 7100000$ граммъ массы на 1 кв. сант. сѣченія иглы въ мѣстахъ, гдѣ этотъ матеріалъ всего болѣе растягивается, или сжимается. Мы вообще имѣемъ

$$E = \frac{\sigma}{i} = \frac{\sigma}{\frac{R_x d\varphi}{dx}}$$

(фиг. 35), откуда

$$dx = \rho d\varphi = \frac{\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)^{3/2}}{\frac{d^2 X}{dx^2}} d\varphi = \frac{d\varphi}{\frac{d^2 X}{dx^2}} = \frac{R_x}{i} d\varphi.$$

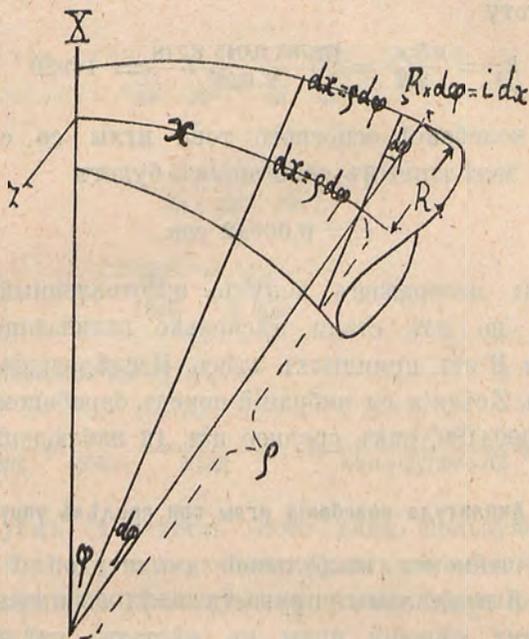
Въ общемъ выраженіи радіуса кривизны мы отбросили прибавляемое въ числитель къ единицѣ, такъ какъ оно практически не замѣтно сказывается на результатахъ.

Теперь имѣемъ

$$i = R_x \frac{d^2 X}{dx^2} \dots \dots \dots (119)$$

независимо отъ системы координатъ. При (90) $R_x = xR_1$ будетъ

$$i = xR_1 \frac{d^2 X}{dx^2}.$$



Фиг. 35.

Перемѣнную x замѣнимъ перемѣнной z . Уравнения

$$z = \frac{2k_1 x}{aR_1} \text{ и } z_1 = \frac{2k_1 H}{aR_1}$$

даютъ

$$\frac{z}{x} = \frac{dz}{dx} = \frac{z_1}{H},$$

откуда

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{z_1}{H} \frac{dX}{dz}, \quad x = \frac{zH}{z_1}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{dz} \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z_1}{H} \frac{dX}{dz} \right) \frac{dz}{dx} = \frac{z_1^2}{H^2} \frac{d^2 X}{dz^2},$$

такъ что

$$i = xR_1 \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{R_1}{H} z_1 z \frac{d^2 X}{dz^2} = 0,00357 \dots \dots (119_1)$$

Наибольшее значение X отсюда мы найдем для того z , которое удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (120)$$

Чтобы его вычислить, сначала вставим $z = z_1 = 8,718$ въ выраженія $\frac{d\varphi_1}{dz}$ и $\frac{d\psi_1}{dz}$ (105) и мы найдемъ

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = 19,024 \text{ и } \frac{d\psi_1}{dz} = 0,099534.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} \dots (117) \text{ даетъ отношеніе}$$

$$N = \frac{A}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}} = \frac{B}{\frac{\partial \psi_1}{\partial z}} = \frac{A}{0,099534} = \frac{B}{19,024},$$

откуда

$$A = 0,099534 N; \quad B = 19,024 N.$$

Теперь (112) даетъ

$$X = N \left(0,09953 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + 19,024 \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \right) \dots \dots (121)$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = N \left(0,09953 \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + 19,024 \frac{d^4 \psi_1}{dz^4} \right).$$

Подставивъ (98), найдемъ

$$z \frac{d^2 X}{dz^2} = N \cdot 0,09953 \left(\frac{z}{4!} + \frac{z^2}{115!} + \frac{z^3}{216!} + \dots \right) + N \cdot 19,024 \left(\frac{z}{4!} - \frac{z^2}{115!} + \frac{z^3}{216!} - \dots \right) \dots \dots \dots (122)$$

и уравненіе (120) теперь напишется такъ:

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d^2 X}{dz^2} \right) = 0,09953 \left(\frac{1}{4!} + \frac{2z}{115!} + \frac{3z^2}{216!} + \dots \right) + 19,024 \left(\frac{1}{4!} - \frac{2z}{115!} + \frac{3z^2}{216!} - \dots \right) = 0$$

Наименьшій корень этого уравненія есть $Z = 4,464$, ему соотвѣтствуетъ

$$x = H \frac{z}{z_0} = 6,28 \frac{4,464}{8,718} = x = 3,1 \text{ сант. и } R_x = 0,1392 \text{ сант.,}$$

а также изъ (122)

$$z \frac{d^2 X}{dz^2} = 1,388 N.$$

Подставимъ это въ

$$i = 0,00357 = \frac{R_1}{H} z_1 z \frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{R_1}{H} z_1 1,388 N \dots (119_2)$$

и мы получимъ

$$N = \frac{i H}{1,388 z_1 R_1} = \frac{0,00357 \cdot 6,28}{1,388 \cdot 8,718 \cdot 0,045} = 0,0413.$$

Для того, чтобы найти наибольшую амплитуду колебаній основного тона, не нужно брать производную отъ (121), такъ какъ изъ фигуры, въ какую при основномъ тонѣ изгибается ось иглы, ясно, что наибольшая амплитуда будетъ на ея свободномъ концѣ, на вершинѣ конуса, гдѣ $x = z = 0$ и что дѣло сводится къ опредѣленію (121) для $z = 0$. Въ (106) мы имѣли

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} = \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \frac{z^2}{48} + \dots; \quad \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{48} - \dots$$

При $z = 0$ мы имѣемъ

$$\left(\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \right)_{z=0} = \left(\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{2} \text{ и (121) даетъ}$$

$$X_{max} = \frac{N}{2} (0,09953 + 19,024) = 9,562 N = 0,395 \text{ сант.}$$

въ то время, какъ на разстояніи 3,1 с. отъ жала въ иглѣ напряженія достигаютъ предѣла упругости $\sigma = 6,98 \cdot 10^9$ динъ на кв. сант. На соответственное сѣченіе иглы $R_x = 0,1392$ сант. приходится наибольшій изгибающій моментъ

$$M = \sigma \frac{I}{R_x} = \frac{\pi}{4} \sigma R_x^3 = 0,785 \cdot 6,98 \cdot 10^9 \cdot 0^3,1392 = 14750 =$$

$$= \int_{u=0}^{u=3^c,1} dM = \pi r \omega \int_0^{3^c,1} u^2 R_u du = R_1 \pi r \omega \int_0^{3^c,1} u^3 du = \frac{\pi r \omega R_1}{4} 3^4,1,$$

при которомъ угловое ускореніе иглы

$$\omega = \frac{4M}{3^4 \cdot 1 \pi r R_1} = \frac{4 \cdot 14750}{3^4 \cdot 1.3, 14.8, 515 \cdot 0,045} = 530 \frac{1}{\text{сек.}^2}.$$

Большее ускореніе должны иглѣ дать остающіеся стрѣлы прогиба. На самомъ дѣлѣ оно измѣряется величинами

$$\omega = 10000000 \frac{1}{\text{сек.}^2} \text{ (стр. 50)}$$

и игла остается прямая. Это разногласіе вѣроятно примиряется на чрезвычайной кратковременности приложенія этого ускоренія (менѣе 0,00001 сек. въ k фиг. 26), при которой изгибанія не успѣваютъ дойти до опасныхъ величинъ.

Избранная Kirchhoff'омъ форма полнаго рѣшенія уравненія (93) свободныхъ колебаній получаетъ видъ

$$y_1 = 0,395 \sin 14920 t.$$

Это уравненіе намъ полезно, указываетъ наибольшую допустимую амплитуду и періодъ колебаній, но не даетъ намъ отступленій написанной діаграммы фиг. 4 отъ полученной синтетически K фиг. 30. Ур. (92) отвѣтило бы намъ на вопросъ и указало бы намъ вынужденныя колебанія иглы, но для этого, пользуясь фиг. 30, мы должны бы исчислить черезъ каждые 0,00001 сек. величину и направленіе вѣдшей силы $p(x, t) = \pi \rho \omega x R_x^2$, бросающей иглу изъ стороны въ сторону, и по возможности найти этой силѣ аналитическое выраженіе въ функціи времени. И тутъ, какъ въ вопросѣ движенія динамометра, мы видимъ, какъ трудно, хотя и не невозможно, математикѣ угнаться за опытомъ. Мы имѣемъ

$$N = 0,0413; \quad A = 0,099534 \quad N = 0,00411; \quad C = 0; \\ B = 19,024 \quad N = 0,78569; \quad D = 0.$$

Уравненіе (109) намъ даетъ

$$-\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{A}{4!} + \frac{Az}{5!} + \dots + \frac{B}{4!} + \frac{Bz}{5!} \\ -\frac{d^2 X}{dz^2} = \frac{0,00411}{24} + \frac{0,00411z}{120} + \dots + \frac{0,78569}{24!} - \frac{0,78569z}{120} + \dots$$

При вершинѣ, гдѣ $x = z = 0$ мы будемъ имѣть:

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = -0,0329, \text{ а не обычное } \frac{d^2 X}{dz^2} = 0,$$

имѣющее мѣсто для x и z сколь угодно мало отличающихся отъ нуля, т. е. для случаевъ, когда отъ свободной вершины конуса отсѣченъ сколь угодно малый кусочекъ. Нарушеніе сплошности здѣсь можно было бы объяснить отдѣльнымъ изслѣдованіемъ. Намъ кажется, что если бы мы вычислили

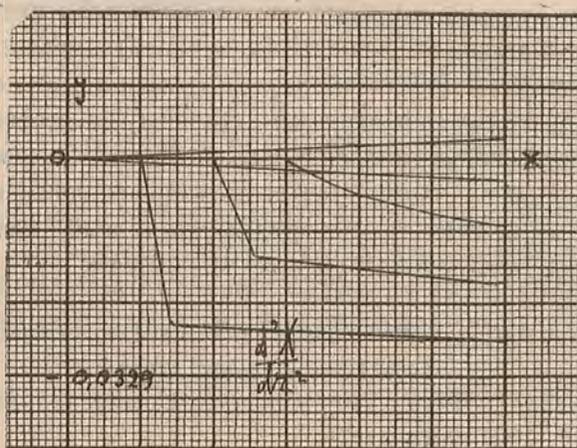
$$\frac{d^2 X}{dz^2}$$

для различныхъ точекъ оси конуса, усѣченного на различныхъ абсциссахъ и отложили бы

$$\frac{d^2 X}{dz^2}$$

въ видѣ ординатъ въ любомъ масштабѣ, мы для каждой усѣченности получили бы кривую

$$\frac{d^2 X}{dz^2}$$



Фиг. 36.

вида Фиг. 36 и пересекающую ось абсциссъ въ точкѣ усѣченія оси. Надо думать, что въ полученномъ сомнѣ тѣ кривыя оказа-

лись бы положе, которыя дальше отъ вершины пересѣкають ось. По мѣрѣ приближенія точки пересѣченія къ вершинѣ кривыя становятся круче изогнутыми, отвѣснѣе около этой точки, а предѣльная кривая для цѣлаго конуса получаетъ охватывающую ихъ форму буквы *L*. Уравненіе же (109) соотвѣтствуетъ кривой, во всѣхъ точкахъ сливающейся съ горизонтальною вѣтвью этого *L*. Если такое наше предположеніе вѣрно, надо думать, что слѣдующій методъ Крылова дастъ для пологого малоусѣченного конуса ненадежные результаты, такъ какъ величина X'' , въ немъ фигурирующая, будетъ сильно различаться въ серединѣ и концѣ послѣдняго участка (см. (125)) и дурно вліять на опредѣлитель (126), такъ что необходимо послѣдній участокъ подраздѣлить, скажемъ, на десять равныхъ сѣченій.

§ 33. Методъ А. Н. Крылова ¹⁾ отысканія элементовъ свободнаго поперечнаго колебанія.

Мы видѣли, какъ остроумный методъ Kirchhoff'a удачно разбиваетъ уравненіе 4-го порядка на два второго. Но онъ относится къ цѣлому конусу. Методъ Крылова применимъ ко всякимъ формамъ и потому универсаленъ. Пользуясь этой универсальностью, мы предполагаемъ у иглы форму усѣченнаго конуса (фиг. 32) вмѣсто цѣлаго (фиг. 31) и тѣмъ приближаемся къ дѣйствительности (фиг. 2).

Ищемъ рѣшенія (93) въ формѣ

$$y_1 = \sum X_i T_i,$$

гдѣ X_i есть функція только отъ x , а T_i — функція только отъ t .

Уравненіе (94) даетъ:

$$\pi\rho R_i^2 X_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} = - T_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right],$$

или

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} \frac{T_i}{T_i} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \right] \frac{1}{\pi\rho R_x^2 X_i} = - k_i^4 \dots \dots (123)$$

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Вибрація судовъ. Спб. 1907, стр. 90.

Такъ какъ лѣвая часть здѣсь зависитъ только отъ t , а правая — только отъ x , это уравненіе можетъ существовать при всякихъ t и x , лишь когда обѣ части изображаютъ постоянную, которую мы назовемъ — k_i^4 . Благодаря этому наше уравненіе (123) съ частными производными разбивается на два самостоятельныхъ — безъ частныхъ производныхъ. Одно изъ нихъ второго порядка линейное съ постоянными коэффициентами безъ послѣдняго члена

$$\frac{d^2 T_i}{dt^2} + k_i^4 T_i = 0$$

имѣетъ рѣшеніемъ аналогично (22)

$$T_i = C_1 \cos k_i^2 t + C_2 \sin k_i^2 t.$$

Ему сопутствуютъ начальныя условія

$$(T_i)_{t=0} = \left(\frac{dT_i}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

Другое уравненіе изъ тѣхъ, на которыя разбилось (123) линейное 4-го порядка съ переменными коэффициентами безъ послѣдняго члена

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right] - k_i^4 \pi \rho R_x^2 X_i = 0$$

имѣетъ общее названіе фундаментальнаго. Подставляя въ него

$$I = \frac{\pi}{4} R_x^4,$$

мы ему даемъ видъ:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[R_x^4 \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right] - k_i^4 \frac{4\rho}{E} R_x^2 X_i = 0 \quad \dots \quad (124)$$

Помѣщаемъ начало координатъ въ центрѣ большого основанія усѣченного конуса. Радиусъ большого основанія

$$R = 0^{\circ},282; \text{ малаго } r = 0^{\circ},11,$$

$$\text{высота } H = 6^{\circ},02.$$

Мы имѣемъ:

$$R_x = R - \frac{R-r}{H} x$$

Способомъ, о которомъ будетъ рѣчь въ § 35, опредѣляемъ первое приближеніе $k_{1,1}$ частоты основного тона k_1 , для которой мы имѣемъ

$$k_1^2 = \frac{2\pi}{\tau_1}.$$

Дѣлимъ иглу на участки поперечными сѣченіями, отстоящими другъ отъ друга на разстояніи напр. 0,1 Н; принимаемъ R_x равнымъ среднему радіусу каждаго участка, напр.

$$R_0 = 0,95 R + 0,05 r; R_1 = 0,85 R + 0,15 r; \dots \\ R_9 = 0,05 R + 0,95 r$$

и при помощи этихъ R_x вычисляемъ

$$\frac{4\rho}{E R_x^2}.$$

Если однимъ изъ условій закрѣпленій было, что большое основаніе подперто, мы имѣемъ для него;

$$(X_i)_{x=0} = 0 \text{ и } \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2}\right)_{x=0} = 0.$$

Для этого же основанія намъ пока не извѣстны первая и третья производныя X_i , но мы ихъ обозначимъ пока неизвѣстными A и B и напишемъ

$$\left(\frac{dX_i}{dx}\right)_{x=0} = A \text{ и } \left(\frac{d^3 X_i}{dx^3}\right)_{x=0} = B.$$

Если же большое основаніе было задѣлано, выраженія X_i и его первыхъ трехъ производныхъ будутъ для него:

$$(X_i)_{x=0} = 0; \left(\frac{dX_i}{dx}\right)_{x=0} = 0; \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2}\right)_{x=0} = A \text{ и } \left(\frac{d^3 X_i}{dx^3}\right)_{x=0} = B.$$

Далѣе Крыловъ выводитъ формулы, помощью коихъ эти выраженія

$$X_{i, n+1}, X'_{i, n+1}, X''_{i, n+1}, X'''_{i, n+1}$$

для тона i и отрѣзка $n+1$ опредѣляются, когда они извѣстны

для того же тона i для отрезка n и это при всякой формѣ вибрирующаго тѣла (мы дѣлили иглу на 10 частей)

$$\left. \begin{aligned}
 X_{i, n+1} &= X_{i, n} + 0,1 \cdot H X'_{i, n} + \frac{1}{2} 0^2,1 \cdot H^2 X''_{i, n} + \\
 &+ \frac{1}{6} 0^3,1 \cdot H^3 X'''_{i, n} + k_i^4 \frac{4\rho}{ER_n^2} \frac{1}{24} 0^4,1 \cdot H^4 \cdot X_{i, n} \\
 X'_{i, n+1} &= X'_{i, n} + 0,1 \cdot H X''_{i, n} + \frac{1}{6} 0^2,1 \cdot H^2 X'''_{i, n} + \\
 &+ \frac{1}{6} 0^3,1 \cdot H^3 \frac{4\rho}{ER_n^2} k_i^4 X_{i, n} \\
 X''_{i, n+1} &= X''_{i, n} + 0,1 \cdot H X'''_{i, n} + \frac{1}{2} 0^2,1 \cdot H^2 \frac{4\rho}{ER_n^2} k_i^4 X_{i, n} \\
 X'''_{i, n+1} &= X'''_{i, n} + 0,1 \cdot H \frac{4\rho}{ER_n^2} k_i^4 X_{i, n}
 \end{aligned} \right\} (125)$$

Имѣя эти четыре функціи для нулевого сѣченія (первая строчка системы (126)), мы ихъ вычисляемъ для перваго сѣченія, втораго и т. д. въ видѣ уравненій

$$\left. \begin{array}{l|l}
 X_{1,0} = 0 & X'_{1,0} = 0 \\
 X_{1,1} = p_{1,0} A + q_{1,0} B & X'_{1,1} = p_{1,1} A + q_{1,1} B \\
 X_{1,2} = p_{2,0} A + q_{2,0} B & X'_{1,2} = p_{2,1} A + q_{2,1} B \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 X_{1,2} = p_{9,0} A + q_{9,0} B & X'_{1,9} = p_{9,1} A + q_{9,1} B \\
 X''_{1,0} = A & X''_{1,0} = B \\
 X''_{1,1} = p_{1,2} A + q_{1,2} B & X''_{1,1} = p_{1,3} A + q_{1,3} B \\
 X''_{1,2} = p_{2,2} A + q_{2,2} B & X''_{1,2} = p_{2,3} A + q_{2,3} B \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 X''_{1,9} = p_{9,2} A + q_{9,2} B = 0 & X''_{1,9} = p_{9,3} A + q_{9,3} B = 0
 \end{array} \right\} (126)$$

Въ нихъ вездѣ неизвѣстныя A и B переходятъ въ первой степени, а неизвѣстная k_1 подъ видомъ $k_{1,1}$ (стр. 143) входитъ въ составъ всѣхъ p и q . Когда мы наконецъ, вычисляемъ послѣднюю строчку системы уравненій (116), мы пользуемся условіями закрѣпленія свободнаго конца, состоящими въ томъ, что

$$X''_{1,9} = p_{9,2} A + q_{9,2} B = 0; \quad X'''_{1,9} = p_{9,3} A + q_{9,3} B = 0 \quad (127)$$

Этимъ уравненіямъ отвѣчаютъ A и B , отличные отъ нуля, когда опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_{9,2} & q_{9,2} \\ p_{9,3} & q_{9,3} \end{vmatrix}$$

равенъ нулю.

Если первое приближеніе $k_{1,1}$, входящее въ составъ всѣхъ p и q , дано не точно, то и опредѣлитель получается не нуль, а, скажемъ, D_1 , дающій намъ указаніе, въ какую сторону надо измѣнять k . Избираемъ для него второе приближеніе $k_{1,2}$ и цѣлымъ рядомъ вычисленій, въ составъ которыхъ входитъ уже $k_{1,2}$, а не $k_{1,1}$, мы вторично строимъ систему уравненій (126) съ парю (127) въ концѣ. Изъ нея, положимъ, опять опредѣлитель оказался равнымъ не нулю, а D_2 . При помощи линейной формулы

$$k_{1,3} = \frac{k_{1,1} D_2 - k_{1,2} D_1}{D_2 - D_1}$$

мы находимъ третье приближеніе для частоты, затѣмъ четвертое и т. д., пока послѣдній D не окажется достаточно близкимъ къ нулю. Это докажетъ, что наконецъ уравненія (127) составлены при правильномъ k , который мы и примемъ за частоту k_1 основного тона. Соответственный періодъ мы получимъ изъ

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1^2}$$

Пара уравненій (127) намъ дала частоту k_1 . Теперь она можетъ намъ дать еще только одну неизвѣстную. Поэтому пока примемъ $A=1$ и найдемъ изъ (127) B . Тогда мы въ масштабѣ $A=1$ и съ найденнымъ B найдемъ по первому столбцу системы уравненій (126) величины

$$X_{1,0}; X_{1,1}; X_{1,2}; \dots; X_{1,9}$$

ординатъ серединъ десяти участковъ, на которые раздѣлена ось иглы, когда эта игла колеблется основнымъ тонамъ. Форма оси, такимъ образомъ полученной по точкамъ, имѣетъ

то значеніе, что число ея точекъ, общихъ съ осью абсциссъ, равно номеру тона и служить контролемъ того, на какой тонъ мы пришли съ нашими приближеніями.

§ 34. Амплитуда колебаній иглы при предѣлѣ упругости.

Постараемся найти A для того, чтобъ масштабъ фигуры изогнутой оси иглы имѣть дѣйствительный. Въ (119) мы видѣли, что наибольшее допустимое растяженіе при изгибѣ иглы, когда начало координатъ находится въ ея основаніи, будетъ

$$ni = R_x \frac{d^2 X}{dx^2} = \left(R - \frac{R-r}{H} x \right) \frac{d^2 X}{dx^2} = (0,282 - 0,0286 x) \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Пользуясь третьимъ столбцомъ уравненій (126), мы найдемъ, что при $A=1$ и найденномъ изъ (127) $B=-0,231$, наибольшая величина $ni=0,2733$ оказывается въ началѣ координатъ. Въ случаяхъ болѣе крутыхъ конусовъ (стр. 108) она переносится далѣе.

Эту величину ni уменьшимъ въ $n=76,55$ раза, такъ чтобы получить

$$i = 0,00357 \quad (119)$$

растяженіе, отвѣчающее предѣлу упругости иглы. Раздѣлимъ

$$A = 1 \text{ и } B = -0,231 \text{ на } n = 76,53.$$

Первый столбецъ при этихъ новыхъ

$$A = 0,011757; B = -0,003018$$

дастъ намъ форму оси иглы и наибольшую допустимую ея амплитуду 0,0843, когда ея колебанія основнымъ тономъ доводятъ матеріалъ въ опасномъ сѣченіи до предѣла упругости. При меньшихъ величинахъ A и B мы получимъ безопасныя колебанія иглы.

§ 35. Точка отправленія для вычисленій по Крылову.

Изложенное въ § 33 даетъ намъ возможность точно опредѣлить тонъ, когда у насъ уже есть приближенная величина

его частоты. За это первое приближеніе Крыловъ рекомендуетъ взять частоту цилиндра подходящихъ размѣровъ, такъ какъ для цилиндра имѣется готовая таблица частотъ Rayleigh, которую мы изобразили на фиг. 37. Разсмотримъ дѣло подробнѣе, напр. для случая, когда одинъ конецъ задѣланъ, а другой свободенъ. Для цилиндра мы тогда будемъ имѣть:

$$(y)_{x=0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=H} = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=H} = 0$$

и общее его уравненіе (см. (3) на стр. 15 „Вибраціи судовъ“):

$$X = A_1 Chm_i x + B_1 Shm_i x + A_2 \cos m_i x + B_2 \sin m_i x$$

при $x=0$ даетъ $A_1 + A_2 = 0$. Кромѣ того

$$X' = m_i (A Shm_i x + B_1 Chm_i x - A_2 \sin m_i x + B_2 \cos m_i x)$$

при $x=0$ даетъ $B_1 + B_2 = 0$. Поэтому имѣемъ

$$X = A_1 (Chm_i x - \cos m_i x) + B_1 (Shm_i x - \sin m_i x)$$

$$\left. \begin{aligned} X'' &= A_1 m_i^3 (Chm_i x + \cos m_i x) + B_1 m_i^3 (Shm_i x + \sin m_i x) \\ X''' &= A_1 m_i^3 (Shm_i x - \sin m_i x) + B_1 m_i^3 (Chm_i x + \cos m_i x) \end{aligned} \right\} (128)$$

При $x=H$ опредѣлитель изъ (128) долженъ равняться нулю,

$$\text{т. е. } (Chm_i H + \cos m_i H)^2 - Sh^2 m_i H - \sin^2 m_i H = 0 \text{ или}$$

$$Ch^2 m_i H + \cos^2 m_i H + 2Chm_i H \cos m_i H - Sh^2 m_i H + \sin^2 m_i H = 0,$$

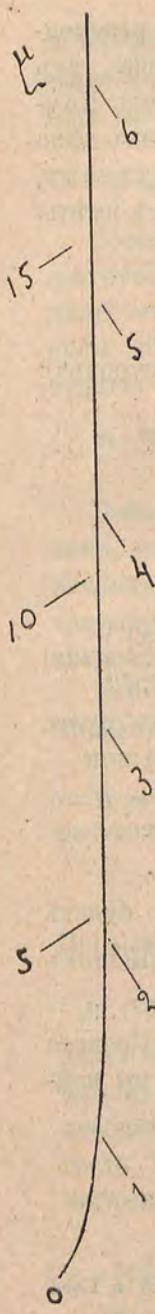
$$\text{или } Chm_i H \cos m_i H = -1 \text{ } ^1).$$

Наименьшій корень $\mu_1 = m_1 H$ этого уравненія будетъ $\frac{\pi}{2} < \mu_1 < \pi$ для основного тона $\mu_1 = 1,875104$. Для высшихъ тоновъ ²⁾ мы получимъ $\mu_2 = 4,694098$; $\mu_3 = 7,854757$; $\mu_4 = 10,995541$; $\mu_5 = 14,137168$; $\mu_6 = 17,278759$; фиг. 37. Полагая $x=H$ въ (128) и подставляя $m_1 x = m_1 H = \mu_1 = 1,875$, мы найдемъ для всякаго цилиндра

$$\frac{B_1}{A_1} = - \frac{Ch 1,875 + \cos 1,875}{Sh 1,875 + \sin 1,875} = -0,734.$$

¹⁾ А. Н. Крыловъ. Вибраціи судовъ, чертежъ на стр. 26 и Lord Rayleigh. Theory of sound, 1894, I, § 173, стр. 276, ур. (4).

²⁾ Lord Rayleigh, Ibidem § 174, таблица на стр. 278.



Интересуясь не масштабомъ отклоненій вибрирующаго цилиндра, а ища провѣрки номера тона, мы примемъ $A=1$. Тогда будемъ имѣть $B=-0,734$ и изъ уравненія

$$X = Chm_1 x - \cos m_1 x - 0,734 (Shm_1 x - \sin m_1 x)$$

получимъ слѣдующую табличку, опредѣляющую видъ линіи, въ какую изгибается ось цилиндра при основномъ тонѣ его колебаній при всякой его длинѣ и толщинѣ.

Для x/H	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
X	0	0,032	0,128	0,275	0,460	0,657	0,923	1,180	1,452	1,725	2,002

Изъ приведенной таблички видно, что ось цилиндра съ осью абсциссъ имѣетъ лишь одну общую точку. Это доказываетъ, что тонъ его колебаній основной. Теперь спрашивается, какіе размѣры цилиндра мы сочтемъ за подходящіе? Вычисленія дали намъ невѣроятное заключеніе, что цилиндръ, котораго одинъ конецъ задѣланъ, а другой свободенъ и котораго длина равна длинѣ нашего усѣченнаго конуса, а діаметръ близокъ къ средней арифметической діаметровъ большого и малаго оснований нашего конуса, имѣетъ періодъ свободныхъ колебаній близкій къ періоду свободныхъ колебаній конуса, котораго большее основаніе задѣлано. Спрашивается: отчего не малое? Мы послѣдняго не вычисляли, но думаемъ, что симетрія вопроса дастъ по Крылову и здѣсь утвердительный отвѣтъ, хотя несомнѣнно, что дѣйствительный періодъ колебаній въ послѣднемъ случаѣ будетъ больше. Приводимъ вычисленія, вызвавшія недоумѣніе:

Фиг. 37.

Мы взяли два цилиндра, у одного $R = R = 0,282$ сант., а у другого $R = \frac{R+r}{2} \approx 0,2$ с. Для обоих $H = 6,02$ с; $\mu = 1,875104$; $E = 19519 \cdot 10^8$; $m_1 = \frac{\nu r}{H} = 0,31148$; $\rho = 8,515$.

R	$\frac{I}{S} = \frac{R^2}{4}$	$b^2 = \frac{I E}{S \rho}$	b	$m_1^2 b$	$\tau_1 = \frac{2\pi}{m_1^2 b}$
0,282	0,019881	$45,7 \cdot 10^8$	67533	6550	0,000959 сек.
0,2	0,01	$22,923 \cdot 10^8$	47878	4640	0,001352 »

Получивъ эти періоды для цилиндровъ, мы возвращаемся къ конусу и подставляем найденные τ_1 въ выраженіе частоты

$$k_{1,1} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_1}} = \sqrt{m_1^2 b} = (\text{въ первомъ случаѣ}) = 81,0, \\ = (\text{во второмъ}) = 68,1$$

въ качествѣ перваго приближенія дѣйствительной частоты k_1 основного тона нашего конуса съ задѣланнымъ толстымъ концомъ и другимъ свободнымъ. Найденные $k_{1,1} = 81$ и $68,1$ мы вставляли въ опредѣлитель уравненій (127). Для перваго $k_{1,1} = 81$ намъ пришлось сдѣлать 8 вычисленій, послѣ которыхъ мы получили $k_{1,8} = 68,28$ превращающій опредѣлитель (127) въ нуль и потому нами принимаемый за k_1 , точную частоту основного тона, котораго періодъ

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1^2} = 0,0013475 \text{ сек.}$$

Когда же за точку отправленія мы взяли цилиндръ, котораго размѣры равны среднимъ размѣрамъ конуса, мы послѣ перваго же вычисленія отъ $k_{1,i} = 68,1$ пришли къ этому $k_1 = 68,28$. По методу Крылова для этого конуса мы нашли для втораго и третьяго тоновъ $k_2 = 192,4$; $\tau_2 = 0,0001697$ сек. и $k_3 = 274,9$ $\tau_3 = 0,00008628$ сек. Все эти результаты невѣрны. Мы изготовили (фиг. 32) усѣченный конусъ заданныхъ здѣсь размѣровъ изъ стали, которой ρ и E немногимъ отличаются отъ принятыхъ здѣсь. Задѣлавъ его толстый конецъ, мы то-

ненькимъ остріемъ, исходившимъ изъ малаго основанія, записали вибраціи этого конуса на барабанъ Morin'a и измѣрили ихъ помощью микроскопа Zeiss'a. Среднее изъ 31 наблюдений дало $\tau_1 = 0,00066923$ сек. и $k_1 = 96,895$ вмѣсто вычисленныхъ при 10 участкахъ иглы по Крылову $\tau_1 = 0,0013475$ сек. и $k_1 = 68,28$. Какъ мы указали (на стр. 141), методъ Крылова въ нашемъ случаѣ даетъ очень крутые концы кривыхъ X'' (фиг. 36). Чтобы результаты получать точные, можно было бы послѣдній изъ 10 участковъ раздѣлить на 10 мелкихъ участковъ. Въ кораблестроеніи дѣлать это можетъ оказаться необходимымъ при исчисленіи вибраціи судовъ, у которыхъ отъ заостренныхъ концовъ мало отсѣчено. Въ вертикальномъ направленіи это вообще встрѣчается рѣдко. Для горизонтальныхъ же вибрацій повидимому представляется необходимымъ послѣдній участокъ подраздѣлить на мельчайшіе ¹⁾).

§ 36. Методъ В. А. Стеклова.

Въ фундаментальномъ уравненіи:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[R_x^4 \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right] - k_i^4 \frac{4\rho}{E} R_x^2 X_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

назовемъ

$$X_i = \frac{Z_i}{R_x^2} \text{ и } k_i^4 \frac{4\rho}{E} = \lambda_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[R_x^4 \frac{d^2 X}{dx^2} \right] = R_x^2 \frac{d^4 Z_i}{dx^4} + \Sigma f \left(\frac{d^2 R_x}{dx^2}, \frac{d^3 R_x}{dx^3}, \frac{d^4 R_x}{dx^4} \right)$$

Но (91) даетъ

$$\frac{d^2 R_x}{dx^2} = \frac{d^3 R_x}{dx^3} = \frac{d^4 R_x}{dx^4} = 0, \text{ такъ что}$$

¹⁾ Теперь А. Н. Крыловъ установилъ, что въ формулахъ (125) есть ошибка. Пока она не исправлена, нельзя говорить о способахъ увеличить точность вычислений, основанныхъ на (125).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[R_x \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right] = R_x \frac{d^4 Z_i}{dx^4},$$

откуда (124) станеть

$$R_x \frac{d^4 Z_i}{dx^4} - \lambda_i Z_i = 0; \text{ назовемъ } b = \frac{H}{R-r} = \frac{6,02}{0,282 - 0,11} = 35$$

и мы будемъ имѣть

$$\frac{dR_x}{dx} = -\frac{1}{b} = -0,0286,$$

а для основного тона найдемъ:

$$\frac{d^4 Z_1}{dx^4} = \frac{\lambda_1 b^2 Z_1}{(Rb - x)^2} \cdot \dots \dots \dots (130)$$

Чтобъ проинтерировать это уравненіе, вводимъ обозначенія:

$$\frac{dZ_1}{dx} = Z_2; \quad \frac{dZ_2}{dx} = Z_3; \quad \frac{dZ_3}{dx} = Z_4$$

и получаемъ

$$\frac{dZ_4}{dx} = \frac{\lambda_1 b^2 Z_1}{(Rb - x)^2} \cdot \dots \dots \dots (131)$$

и интегрированіе одного уравненія (130) замѣняется интегрированіемъ четырехъ уравненій

$$\frac{dZ_1}{dx} = EZ_2; \quad \frac{dZ_2}{dx} = EZ_3; \quad \frac{dZ_3}{dx} = EZ_4; \quad \frac{dZ_4}{dx} = E \frac{\lambda_1 b^2 Z_1}{(Rb - x)^2} \cdot (132)$$

гдѣ E произвольный параметръ. Если мы вставимъ $E=1$ въ интеграль (132), то получимъ интеграль (131). Рѣшенія системы (132) будемъ искать, какъ это принято у В. А. Стеклова, въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ E :

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= EZ_{1,1} + E^2 Z_{1,2} + E^3 Z_{1,3} + E^4 Z_{1,4} + E^5 Z_{1,5} + E^6 Z_{1,6} + \dots \\ Z_2 &= EZ_{2,1} + E^2 Z_{2,2} + E^3 Z_{2,3} + E^4 Z_{2,4} + E^5 Z_{2,5} + E^6 Z_{2,6} + \dots \\ Z_3 &= EZ_{3,1} + E^2 Z_{3,2} + E^3 Z_{3,3} + E^4 Z_{3,4} + E^5 Z_{3,5} + E^6 Z_{3,6} + \dots \\ Z_4 &= EZ_{4,1} + E^2 Z_{4,2} + E^3 Z_{4,3} + E^4 Z_{4,4} + E^5 Z_{4,5} + E^6 Z_{4,6} + \dots \end{aligned} \right\} (133)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dZ_1}{dx} &= EZ'_{1,1} + E^2 Z'_{1,2} + E^3 Z'_{1,3} + E^4 Z'_{1,4} + E^5 Z'_{1,5} + E^6 Z'_{1,6} + \dots \\
 \frac{dZ_2}{dx} &= EZ'_{2,1} + E^2 Z'_{2,2} + E^3 Z'_{2,3} + E^4 Z'_{2,4} + E^5 Z'_{2,5} + E^6 Z'_{2,6} + \dots \\
 \frac{dZ_3}{dx} &= EZ'_{3,1} + E^2 Z'_{3,2} + E^3 Z'_{3,3} + E^4 Z'_{3,4} + E^5 Z'_{3,5} + E^6 Z'_{3,6} + \dots \\
 \frac{dZ_4}{dx} &= EZ'_{4,1} + E^2 Z'_{4,2} + E^3 Z'_{4,3} + E^4 Z'_{4,4} + E^5 Z'_{4,5} + E^6 Z'_{4,6} + \dots
 \end{aligned} \right\} (134)$$

Здѣсь

$$\begin{array}{cccccc}
 Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & Z_{1,4} & Z_{1,5} & Z_{1,6} \\
 Z_{2,1} & Z_{2,2} & Z_{2,3} & Z_{2,4} & Z_{2,5} & Z_{2,6} \\
 Z_{3,1} & Z_{3,2} & Z_{3,3} & Z_{3,4} & Z_{3,5} & Z_{3,6} \\
 Z_{4,1} & Z_{4,2} & Z_{4,3} & Z_{4,4} & Z_{4,5} & Z_{4,6}
 \end{array}$$

суть нѣкоторыя, пока неизвѣстныя функции отъ x . Подставляя выраженія (133) и (134) въ (132), мы получаемъ:

$$\begin{aligned}
 &EZ'_{11} + E^2 Z'_{12} + E^3 Z'_{13} + E^4 Z'_{14} + E^5 Z'_{15} + E^6 Z'_{16} + \dots = \\
 &= E^2 Z_{21} + E^3 Z_{22} + E^4 Z_{23} + E^5 Z_{24} + E^6 Z_{25} + E^7 Z_{26} + \dots \\
 &EZ'_{21} + E^2 Z'_{22} + E^3 Z'_{23} + E^4 Z'_{24} + E^5 Z'_{25} + E^6 Z'_{26} + \dots = \\
 &= E^2 Z_{31} + E^3 Z_{32} + E^4 Z_{33} + E^5 Z_{34} + E^6 Z_{35} + E^7 Z_{36} + \dots \\
 &EZ'_{31} + E^2 Z'_{32} + E^3 Z'_{33} + E^4 Z'_{34} + E^5 Z'_{35} + E^6 Z'_{36} + \dots = \\
 &= E^2 Z_{41} + E^3 Z_{42} + E^4 Z_{43} + E^5 Z_{44} + E^6 Z_{45} + E^7 Z_{46} + \dots \\
 &E^7 Z'_{41} + E^2 Z'_{42} + E^3 Z'_{43} + E^4 Z'_{44} + E^5 Z'_{45} + E^6 Z'_{46} + \dots = \\
 &= \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} [E^2 Z_{11} + E^3 Z_{12} + E^4 Z_{13} + E^5 Z_{14} + E^6 Z_{15} + E^7 Z_{16} + \dots].
 \end{aligned}$$

Сличая коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ E получимъ:

$$Z'_{11} = 0 \quad Z'_{21} = 0 \quad Z'_{31} = 0 \quad Z'_{41} = 0 \quad \dots \quad (135)$$

$$Z'_{12} = Z_{21} \quad Z'_{22} = Z_{31} \quad Z'_{32} = Z_{41} \quad Z'_{42} = \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{1,1} \quad (136)$$

$$Z'_{13} = Z_{22} \quad Z'_{23} = Z_{32} \quad Z'_{33} = Z_{32} \quad Z'_{43} = \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{12} \quad (137)$$

$$Z'_{14} = Z_{23} \quad Z'_{24} = Z_{33} \quad Z'_{34} = Z_{43} \quad Z'_{44} = \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{13} \quad (138)$$

$$Z'_{15} = Z_{25} \quad Z'_{25} = Z_{34} \quad Z'_{35} = Z_{44} \quad Z'_{45} = \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{14} \quad (139)$$

$$Z'_{16} = Z_{25} \quad Z'_{26} = Z_{35} \quad Z'_{36} = Z_{46} \quad Z'_{46} = \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{15} \quad (140)$$

Интегрируя (135) мы получимъ $Z_{11} = C_1; Z_{21} = C_2; Z_{31} = C_3; Z_{41} = C_4$, гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4 постоянныя, которыя мы хотимъ опредѣлить въ связи съ искомыми какими-нибудь четырьмя частными интегралами (130). Бóльшого числа частныхъ интеграловъ изъ ихъ безчисленнаго множества мы не ищемъ и поэтому при предстоящихъ интегрированіяхъ мы для простоты будемъ считать равнымъ нулю рядъ появляющихся произвольныхъ постоянныхъ.

Уравненія (136) даютъ:

$$\begin{aligned} Z'_{12} &= C_2 \quad \text{или} \quad Z_{12} = C_2 x \\ Z'_{22} &= C_3 \quad \text{„} \quad Z_{22} = C_3 x \\ Z'_{32} &= C_4 \quad \text{„} \quad Z_{32} = C_4 x \\ Z'_{42} &= \frac{\lambda b^2 C_1}{(Rb - x)^2} \quad \text{или} \quad Z_{42} = \lambda_1 b^2 C_1 \int \frac{dx}{(Rb - x)^2} = \\ &= \lambda_1 b^2 C_1 \frac{1}{(Rb - x)} = \frac{\lambda_1 b^2 C_1}{Rb - x} \end{aligned}$$

Уравненія (137) даютъ

$$\begin{aligned} Z'_{13} &= Z_{22} = C_3 x \quad \text{или} \quad Z_{13} = \frac{C_3 x^2}{2} \\ Z'_{23} &= Z_{32} = C_4 x \quad \text{„} \quad Z_{23} = \frac{C_4 x^2}{2} \\ Z'_{33} &= Z_{42} = \frac{\lambda_1 b^2 C_1}{Rb - x} \quad \text{или} \quad Z_{33} = \lambda_1 b^2 C_1 \int \frac{dx}{Rb - x} = \\ &= -\lambda_1 b^2 C_1 \lg (Rb - x) \\ Z'_{43} &= \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{12} = \frac{C_2 \lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} x \quad \text{даётъ} \quad Z_{43} = C_2 \lambda_1 b^2 \int \frac{x dx}{(Rb - x)^2} = \\ &= C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \lg (Rb - x) + \frac{Rb}{Rb - x} \right\} \quad \text{потому что} \quad \int \frac{x dx}{(Rb - x)^2} = \\ &= -\int \frac{Rb - x - Rb}{(Rb - x)^2} dx = -\int \frac{dx}{(Rb - x)} + \int \frac{Rb dx}{(Rb - x)^2} = \\ &= \lg (Rb - x) + \frac{Rb}{Rb - x}. \end{aligned}$$

Уравненія (138) даютъ:

$$\begin{aligned} Z'_{14} &= Z_{23} = C_4 \frac{x^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad Z_{14} = \frac{C_4 x^3}{6} \\ Z'_{24} &= Z_{33} = -\lambda_1 b^2 C_1 \lg (Rb - x), \quad \text{откуда} \\ Z_{24} &= -\lambda_1 b^2 C_1 \int \lg (Rb - x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Здѣсь} \quad \int \lg (Rb - x) dx = x \lg (Rb - x) + \int \frac{x dx}{Rb - x}.$$

Вставимъ $\int \frac{x dx}{Rb - x} = -\int \frac{Rb - x - Rb}{Rb - x} dx = -x + Rb \int \frac{dx}{Rb - x} =$
 $= -x - Rb \lg (Rb - x)$ и получимъ

$$\underline{Z}_{24} = -\lambda_1 b^2 C_1 [x \lg (Rb - x) - x - Rb \lg (Rb - x)];$$

$$Z'_{34} = Z_{43} = C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \lg (Rb - x) + \frac{Rb}{Rb - x} \right\},$$

но $\int \lg (Rb - x) dx = x \lg (Rb - x) - x - Rb \lg (Rb - x)$

$$\int \frac{dx}{Rb - x} = -\lg (Rb - x). \text{ Поэтому } \underline{Z}_{34} =$$

$$\int Z_{43} dx = C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ x \lg (Rb - x) - x - 2Rb \lg (Rb - x) \right\}.$$

$$Z'_{44} = \frac{\lambda_1 b^2 Z_{13}}{(Rb - x)^2} = \frac{\lambda b^2 C_3}{2} \frac{x^2}{(Rb - x)^2}. \text{ Эдѣсь } \int \frac{x^2 dx}{(Rb - x)^2} =$$

$$= \int \frac{x^2 dx}{R^2 b^2 - 2Rbx + x^2} = \left[1 + \frac{2Rbx - R^2 b^2}{(Rb - x)^2} \right] dx = x +$$

$$+ 2Rb \int \frac{x dx}{(Rb - x)^2} - R^2 b^2 \int \frac{dx}{(Rb - x)^2} =$$

$$= x + 2Rb \lg (Rb - x) - \frac{R^2 b^2}{(x - Rb)}$$

$$\underline{Z}_{44} = \left[x + 2Rb \lg (Rb - x) - \frac{2R^2 b^2}{x - Rb} - \frac{R^2 b^2}{Rb - x} \right] \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2} =$$

$$= \left[x + 2Rb \lg (Rb - x) - \frac{R^2 b^2}{x - Rb} \right] \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2}$$

Уравненія (139) даютъ

$$Z'_{15} = Z_{24} = -\lambda_1 b^2 C [x \lg (Rb - x) - x - Rb \lg (Rb - x)] \text{ откуда}$$

$$1) \frac{2Rbx}{(Rb - x)^2} = \frac{2Rbx}{x - Rb} \cdot \frac{1}{x - Rb}. \text{ Эдѣсь } \frac{2Rbx}{x - Rb} = 2Rb + \frac{2R^2 b^2}{x - Rb},$$

такъ что $\frac{2Rbx}{(Rb - x)^2} = \left(2Rb + \frac{2R^2 b^2}{x - Rb} \right) \frac{1}{x - Rb} = \frac{2Rb}{x - Rb} + \frac{2R^2 b^2}{(x - Rb)^2}.$

$$\text{Поэтому } \int \frac{2Rbx dx}{(Rb - x)^2} = 2Rb \int \frac{dx}{x - Rb} + 2R^2 b^2 \int \frac{dx}{(x - Rb)^2} =$$

$$= 2Rb \lg (Rb - x) - \frac{2R^2 b^2}{x - Rb}.$$

$$2) \int \frac{dx}{(Rb - x)^2} = \frac{1}{Rb - x}.$$

$$\begin{aligned}
Z_{15} &= -\lambda_1 b^2 C \cdot \left[\int x \lg (Rb - x) dx - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^2}{2} - Rb \int \lg^2 (Rb - x) dx \right]. \\
Z_{15} &= -\lambda_1 b^2 C_1 \left[\frac{x^2}{2} \lg (Rb - x) - \frac{3}{4} x^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{Rbx}{2} + \frac{R^2 b^2}{2} \lg (Rb - x) - Rbx \lg (Rb - x) \right] \\
Z'_{25} &= Z_{34} = C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ x \lg (Rb - x) - x - 2Rb \lg (Rb - x) \right\} \\
Z_{25} &= C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \frac{x^2}{2} \lg (Rb - x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{2} Rbx + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} R^2 b^2 \lg (Rb - x) - 2Rbx \lg (Rb - x) \right\} \\
Z'_{35} &= Z_{44} = \frac{C_3 \lambda_1 b^2}{2} \left\{ x + 2Rb \lg (Rb - x) - \frac{R^2 b^2}{x - Rb} \right\} \\
Z_{35} &= \frac{C_2 \lambda_1 b^2}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} + 2Rbx \lg (Rb - x) - 2Rbx - 3R^2 b^2 \lg (Rb - x) \right\} \\
Z'_{45} &= \frac{\lambda_1 b^2}{(Rb - x)^2} Z_{14} = \frac{\lambda_1 b^2 C_4}{6} \frac{x^3}{(Rb - x)^2}. \quad \text{Здѣсь } \frac{x^3}{(Rb - x)} = \\
&= x + 2Rb + \frac{3R^2 b^2 x - 2R^3 b^3}{(Rb - x)^2}; \quad \frac{x^4 dx}{(Rb - x)^2} = \frac{x^2}{2} + 2Rbx + \\
&\quad + 3R^2 b^2 \left[\lg (Rb - x) + \frac{Rb}{Rb - x} \right] - \frac{2R^3 b^3}{(Rb - x)^2} \\
Z_{45} &= \frac{\lambda_2 b^2 C_4}{6} \left[\frac{x^2}{2} + 2Rbx + 3R^2 b^2 \lg (Rb - x) + \frac{R^3 b^3}{Rb - x} \right].
\end{aligned}$$

Уравненія (140) дають:

$$\begin{aligned}
Z'_{16} &= Z_{35} = C_2 \lambda_1 b^2 \left[\frac{x^2}{2} \lg (Rb - x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{2} Rbx + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} R^2 b^2 \lg (Rb - x) - 2Rbx \lg (Rb - x) \right] \\
Z_{16} &= C_2 \lambda b^2 \left[\frac{1}{2} \int x^2 \lg (Rb - x) dx - \frac{3}{4} \int x^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} Rb \int x dx + \frac{3}{2} R^2 b^2 \int \lg (Rb - x) dx - 2Rb \int x \lg (Rb - x) dx \right].
\end{aligned}$$

$$^1) \quad x \lg (Rb - x) dx = \lg (Rb - x) \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 dx}{2(Rb - x)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Здѣсь } \int \frac{x^2 dx}{2(Rb - x)} &= - \int (x + Rb) dx + \int \frac{R^2 b^2}{Rb - x} dx = - \frac{x^2}{2} - \\
&- Rbx - R^2 b^2 \lg (Rb - x) = \frac{x^2}{2} \lg (Rb - x) - \frac{x^2}{4} - \frac{Rbx}{2} - \\
&- \frac{R^2 b^2}{2} \lg (Rb - x).
\end{aligned}$$

$$^2) \quad \int \lg (Rb - x) dx = x \lg (Rb - x) - x Rb \lg (Rb - x).$$

$$\begin{aligned} \text{Здѣсь } \int x^2 \lg(Rb - x) dx &= \frac{x^3}{3} \lg(Rb - x) + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{Rb - x} = \\ &= \frac{x^3}{3} \lg(Rb - x) + \frac{R^3 b^3}{3} \int \frac{dx}{Rb - x} - \frac{1}{3} \int x^2 dx - \frac{Rb}{3} \int x dx - \\ &- \frac{R^2 b^2}{3} \int dx = \frac{1}{3} \left[x^3 \lg(Rb - x) - R^3 b^3 \lg(Rb - x) - \frac{x^3}{3} - \frac{Rb x^2}{2} - R^2 b^2 x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{16} &= C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \frac{1}{6} \left[x^3 \lg(Rb - x) - R^3 b^3 \lg(Rb - x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x^3}{3} - \frac{Rb x^2}{2} - R^2 b^2 x \right] - \right. \\ &- \frac{x^3}{4} + \frac{3}{4} Rb x^2 + \frac{3}{2} R^2 b^2 \left[x \lg(Rb - x) - x - Rb \lg(Rb - x) \right] - \\ &\quad \left. - 2Rb \left[\frac{x^2}{2} \lg(Rb - x) - \frac{x^2}{4} - \frac{Rb x}{2} - \frac{R^2 b^2}{2} \lg(Rb - x) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{16} &= C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \frac{x^3}{6} \lg(Rb - x) - \frac{2}{3} R^3 b^3 \lg(Rb - x) - \frac{11}{36} x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{6} Rb x^2 - \frac{2}{3} R^2 b^2 x + \frac{3}{2} R^2 b^2 x \lg(Rb - x) - Rb x^2 \lg(Rb - x) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z'_{26} = Z_{35} &= \frac{\lambda_2 b^2 C_3}{2} \left[\frac{x^2}{2} + 2Rb x \lg(Rb - x) - \right. \\ &\quad \left. - 2Rb x - 3R^2 b^2 \lg(Rb - x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{26} &= \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2} \left[\frac{x^3}{6} + 2Rb \left\{ \frac{x^2 \lg(Rb - x)}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{Rb x}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R^2 b^2}{2} \lg(Rb - x) \right\} - Rb x^2 - 3R^2 b^2 \left\{ x \lg(Rb - x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - x - Rb \lg(Rb - x) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{26} &= \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2} \left[\frac{x^3}{6} + Rb x \lg(Rb - x) - \frac{3}{2} Rb x^2 + 2R^2 b^2 x + \right. \\ &\quad \left. + 2R^3 b^3 \lg(Rb - x) - 3R^2 b^2 x \lg(Rb - x) \right] \end{aligned}$$

$$Z'_{36} = Z_{45} = \frac{\lambda_1 b^2 C_4}{6} \left[\frac{x^2}{2} + 2Rb x + 3R^2 b^2 \lg(Rb - x) + \frac{R^3 b^3}{Rb - x} \right].$$

$$\begin{aligned} Z_{36} &= \frac{\lambda_1 b^2 C_4}{6} \left[\frac{x^3}{6} + Rb x^2 + 3R^2 b^2 x \lg(Rb - x) - \right. \\ &\quad \left. - 3R^3 b^2 x - 4R^3 b^3 \lg(Rb - x) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z'_{46} &= \frac{\lambda_1 b^2 Z_{45}}{(Rb - x)^2} = -\lambda^2 b^4 C_1 \left[\frac{x^2 \lg(Rb - x)}{2(Rb - x)^2} - \frac{3}{4} \frac{x^2}{(Rb - x)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Rb x}{2(Rb - x)^2} + \frac{R^2 b^2 \lg(Rb - x)}{2(Rb - x)^2} - \frac{Rb x \lg(Rb - x)}{(Rb - x)^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здѣсь } \int \frac{x^2 dx}{(Rb - x)^2} \lg(Rb - x) &= \left[\int \frac{x^2 dx}{(Rb - x)^2} \right] \lg(Rb - x) + \\ &+ \left[\int \frac{x^2 dx}{(Rb - x)^2} \right] \lg(Rb - x) + \int \left[\int \frac{x^2 dx}{(Rb - x)^2} \right] \frac{dx}{Rb - x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{НО } \int \frac{x^2 dx}{(Rb-x)^2} &= x + 2Rb \lg(Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{Rb-x}, \text{ ТАКЪ ЧТО} \\
&\int \frac{x^2 dx}{(Rb-x)^2} \lg(Rb-x) = \\
&= \left[x + 2Rb \lg(Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{Rb-x} \right] \lg(Rb-x) + \\
&+ \int \frac{x dx}{Rb-x} + 2Rb \int \frac{\lg(Rb-x) dx}{Rb-x} + R^2 b^2 \int \frac{dx}{(Rb-x)^2}, \\
\text{НО } \int \frac{x dx}{(Rb-x)^2} &= \lg(Rb-x) + \frac{Rb}{Rb-x}; \int \frac{\lg(Rb-x) dx}{(Rb-x)^2} = \\
= \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} - \frac{1}{Rb-x}, \text{ ТАКЪ ЧТО } \int \frac{x^2 dx}{(Rb-x)^2} \lg(Rb-x) &= \\
= x \lg(Rb-x) + R^2 b^2 \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} - \\
- x - Rb \lg(Rb-x) + Rb \lg^2(Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{Rb-x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{КРОМЪ ТОГО } \int \frac{x \lg(Rb-x)}{(Rb-x)^2} dx &= \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} x + \frac{x}{Rb-x} - \\
- \int \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} dx - \int \frac{dx}{Rb-x} &= \frac{x}{Rb-x} [\lg(Rb-x) + 1] + \\
+ \frac{\lg^2(Rb-x)}{2} + \lg(Rb-x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{4c} &= -\lambda^2 b^4 C_1 \left[\frac{x}{2} \lg(Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{2} \cdot \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} - \frac{x}{2} - \right. \\
&- \frac{Rb}{2} \lg(Rb-x) + \frac{Rb}{2} \lg^2(Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{2(Rb-x)} - {}^{3/4} x - \\
&- \frac{3}{2} Rb \lg(Rb-x) - {}^{3/4} \frac{R^2 b^2}{Rb-x} + \frac{Rb}{2} \lg(Rb-x) + \\
&+ \frac{R^2 b^2}{2(Rb-x)} + \frac{R^2 b^2}{2} \frac{\lg(Rb-x)}{Rb-x} + \frac{R^2 b^2}{2(Rb-x)} - \frac{x Rb \lg(Rb-x)}{Rb-b} \\
&\left. - \frac{Rb x}{Rb-x} - \frac{Rb}{2} \lg^2(Rb-x) - Rb \lg(Rb-x) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{4c} &= \lambda_1^2 b^4 C_1 \left[\frac{x}{2} \lg(Rb-x) - \frac{5}{4} x - \frac{5}{2} Rb \lg(Rb-x) + \right. \\
&+ {}^{3/4} \frac{R^2 b^2}{Rb-x} - \frac{Rb x \lg(Rb-x)}{Rb-x} - \frac{Rb x}{Rb-x} + \left. \frac{R^2 b^2 \lg(Rb-x)}{Rb-x} \right].
\end{aligned}$$

Подставляя найденныя выраженія въ (133) и полагая въ немъ $E=1$, мы примемъ за рѣшенія (130) величины:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{2} x^2 + \frac{C_4}{6} x^3 - \\
&- \lambda_1 b^2 C_1 \left[\frac{x^2}{2} \lg(Rb-x) - {}^{3/4} x^2 + \frac{Rb x}{2} + \frac{R^2 b^2}{2} \lg(Rb-x) - \right. \\
&\left. - Rb x \lg(Rb-x) \right] + C_2 \lambda_1 b^2 \left[\frac{x^3}{6} \lg(Rb-x) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} R^3 b^3 \lg (Rb-x) - \frac{11}{36} x^3 + \frac{7}{6} Rbx^2 - \frac{2}{3} R^2 b^2 x + \\
& \quad + \frac{3}{2} R^2 b^2 x \lg (Rb-x) - Rbx^2 \lg (Rb-x) \Big] = \\
Z_1 &= C_1 \left\{ 1 - \lambda_1 b^2 \left[\frac{x^2}{2} \lg (Rb-x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{Rbx}{2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{R^2 b^2}{2} \lg (Rb-x) - Rbx \lg (Rb-x) \right] \right\} + \\
& + C_2 \left\{ x + \lambda_1 b^2 \left[\frac{x^3}{6} \lg (Rb-x) - \frac{2}{3} R^3 b^3 \lg (Rb-x) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{11}{36} x^3 + \frac{7}{6} Rbx^2 - \frac{2}{3} R^2 b^2 x + \frac{3}{2} R^2 b^2 x \lg (Rb-x) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - Rbx^2 \lg (Rb-x) \right] \right\} + \frac{C_3}{2} x^2 + \frac{C_4}{6} x^3. \\
Z_2 &= C_2 + C_3 + \frac{C_4}{2} x^2 - \lambda_1 b^2 C_1 \left\{ x \lg (Rb-x) - x - \right. \\
& \quad \left. - Rb \lg (Rb-x) \right\} + C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \frac{x^2}{2} \lg (Rb-x) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{2} Rbx + \frac{3}{2} R^2 b^2 \lg (Rb-x) - 2Rbx \lg (Rb-x) \right\} + \\
& + C_3 \frac{\lambda_1 b^2}{2} \left\{ \frac{x^3}{6} + Rbx^2 \lg (Rb-x) - \frac{3}{2} Rbx^2 + 2R^2 b^2 x + \right. \\
& \quad \left. + 2R^3 b^3 \lg (Rb-x) - 3R^2 b^2 x \lg (Rb-x) \right\} = \\
Z_2 &= -\lambda_1 b^2 C_1 \left\{ x \lg (Rb-x) - x - Rb \lg (Rb-x) \right\} + \\
& + C_2 \left\{ 1 + \lambda_1 b^2 \left[\frac{x^2}{2} \lg (Rb-x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{2} Rbx + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{2} R^2 b^2 \lg (Rb-x) - 2Rbx \lg (Rb-x) \right] \right\} + \\
& + C_3 \left\{ x + \frac{\lambda_1 b^2}{2} \left[\frac{x^3}{6} + Rbx^2 \lg (Rb-x) - \frac{3}{2} Rbx^2 + 2R^2 b^2 x + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2R^3 b^3 \lg (Rb-x) - 3R^2 b^2 x \lg (Rb-x) \right] \right\} + \frac{C_4}{2} x^2. \\
Z_3 &= C_3 + C_4 x - \lambda_1 b^2 C_1 \lg (Rb-x) + \lambda_1 b^2 C_2 \left\{ x \lg (Rb-x) - \right. \\
& \quad \left. - x - 2Rb \lg (Rb-x) \right\} + \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} + 2Rbx \lg (Rb-x) - \right. \\
& \quad \left. - 2Rbx - 3R^2 b^2 \lg (Rb-x) \right\} + \frac{\lambda_1 b^2 C_4}{6} \left\{ \frac{x^3}{6} + Rbx^2 + \right. \\
& \quad \left. + 3R^2 b^2 x \lg (Rb-x) - 3R^2 b^2 x - 4R^3 b^3 \lg (Rb-x) \right\}. \\
Z_4 &= C_4 + \frac{\lambda_1 b^2 C_1}{Rb-x} + C_2 \lambda_1 b^2 \left\{ \lg (Rb-x) + \frac{Rb}{Rb-x} \right\} + \\
& \quad + \frac{\lambda_1 b^2 C_3}{2} \left\{ x + 2Rb \lg (Rb-x) + \frac{R^2 b^2}{Rb-x} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_1 b^3 C_1}{6} \left\{ \frac{x^2}{2} + 2Rbx + 3R^2 b^2 \left[\lg(Rb - x) + \frac{Rb}{Rb - x} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2R^3 b^3}{Rb - x} \right\} - \lambda_1^2 b^4 C_1 \left\{ \frac{x}{2} \lg(Rb - x) - \frac{5}{4} x - \right. \\
& \quad \left. - \frac{5}{2} Rb \lg(Rb - x) + \frac{3}{4} \frac{R^2 b^2}{Rb - x} - \frac{Rbx \lg(Rb - x)}{Rb - x} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{Rbx}{Rb - x} + \frac{R^2 b^2 \lg(Rb - x)}{Rb - x} \right\}.
\end{aligned}$$

§ 37. Условія закрѣпленія.

Задѣланный толстый конецъ даетъ

$$(X_i)_{x=0} = 0 \text{ и } (X'_i)_{x=0} = 0,$$

но такъ какъ

$$X_i = Z_i R_x^{-2}, \text{ то } (Z_i)_{x=0} = 0 \text{ и } (Z'_i)_{x=0} = 0,$$

или для основного тона

$$(Z_1)_{x=0} = 0 \dots \dots \dots (141)$$

$$(Z_2)_{x=0} = 0 \dots \dots \dots (142)$$

Свободное жало даетъ

$$(X'' \cdot)_{x=H} = (X''' \cdot)_{x=H} = 0$$

Составимъ эти величины, помня, что

$$R_x = \left(R - \frac{x}{b} \right); \quad R'_x = -\frac{1}{b}; \quad R''_x = 0;$$

$$X'_1 = Z'_1 R_x^{-2} - 2Z_1 R_x^{-3} R'_x$$

$$\begin{aligned}
X''_1 &= Z''_1 R_x^{-2} - 4Z'_1 R_x^{-3} R'_x + 6Z_1 R_x^{-4} (R'_x)^2 - 2Z R_x^{-3} R''_x = \\
&= Z''_1 R_x^{-2} + 4Z'_1 R_x^{-3} \frac{1}{b} + 6Z_1 R_x \frac{1}{b^2} \dots \dots (143)
\end{aligned}$$

$$X'''_1 = Z'''_1 R_x^{-2} + 6Z''_1 R_x^{-3} \frac{1}{b} + 18Z'_1 R_x^{-4} \frac{1}{b^2} + 24Z_1 R_x^{-5} \frac{1}{b^3}$$

и при $x=H$

$$Z_3 r^{-2} + 4Z_2 r^{-3} \frac{1}{b} + 6Z_1 r^{-4} \frac{1}{b^2} = 0 \dots \dots (144)$$

$$Z_4 r^{-2} + 6Z_3 r^{-3} \frac{1}{b} + 18Z_2 r^{-4} \frac{1}{b^2} + 24Z_1 r^{-5} \frac{1}{b^3} = 0 \quad (145)$$

Найдемъ значенія функций Z_1 и Z_2 при $x=0$ и Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 при $x=H$, подставивъ въ ихъ выраженія $H=6,02$ сант.,
 $H^2=36,24$; $H^3=218,2$; $r=0,11$ с.; $R=0,282$ с.; $R^2=7,952 \cdot 10^{-2}$;
 $b = \frac{H}{R-r} = 35,00$; $b^2=1225$; $b^3=42,88 \cdot 10^3$; $b^4=15,006 \cdot 10^5$;
 $Rb=9,870$; $R^2b^2=97,42$; $R^3b^3=961,5$; $Rb-H=3,85$; $\lg_{\text{nat}} Rb =$
 $= 2,29$; $\lg_{\text{nat}} (Rb-H) = 1,348$; $r^{-2} = 0^{-2},11 = 82,64$;

$$4r^{-3} \cdot \frac{1}{b} = 4 \cdot 0,11^{-3} \cdot \frac{1}{35} = 85,86; \quad 6r^{-3} \frac{1}{b} = 128,80; \quad 6r^{-4} \frac{1}{b^2} =$$

$$= 6 \cdot 0,11^{-4} \frac{1}{1225} = 33,45; \quad 18r^{-4} \frac{1}{b^3} = 100,36; \quad 24r^{-5} \frac{1}{b^3} = 34,76,$$

мы получимъ сперва:

$$(Z_1)_{x=0} = C_1 \left\{ 1 - \lambda_1 \frac{97,42}{2} 2,29 \right\} + C_2 \lambda_1 1225 \left(-\frac{2}{3} 961,5 \cdot 2,29 \right)$$

или

$$(Z_1)_{x=0} = C_1 (1 - \lambda_1 1,3664 \cdot 10^5) + C_2 \lambda_1 (-17,982 \cdot 10^5) = 0 \quad (141,1)$$

$$(Z_2)_{x=0} = C_1 \lambda_1 0,2769 \cdot 10^5 + C_2 (1 + \lambda_1 4,099 \cdot 10^5) +$$

$$+ C_3 \lambda_1 26,974 \cdot 10^5 = 0 \quad \dots \quad (142,1)$$

$$(Z_1)_{x=H} = C_1 (1 - \lambda_1 15,34 \cdot 10^3) + C_2 (6,02 - 185,8 \lambda_1 10^3) +$$

$$+ C_3 18,12 + C_4 36,37$$

$$(Z_2)_{x=H} = C_1 \lambda_1 13,732 \cdot 10^3 - C_2 (1 + \lambda_1 150,90 \cdot 10^3) +$$

$$+ C_3 (6,02 + \lambda_1 8,42,5 \cdot 10^3) + C_4 18,12$$

$$(Z_3)_{x=H} = C_1 (-\lambda_1 1,6513 \cdot 10^3) + C_2 (-\lambda_1 30,03 \cdot 10^3) +$$

$$+ C_3 (1 - \lambda_1 204,9 \cdot 10^3) + C_4 (6,02 - \lambda_1 853,1 \cdot 10^3)$$

$$(Z_4)_{x=H} = C_1 (\lambda_1 318,2 + \lambda_1^2 298,4 \cdot 10^5) + C_2 \lambda_1 4,792 \cdot 10^3 +$$

$$C_3 \lambda_1 35,48 \cdot 10^3 + C_4 (1 + \lambda_1 159,49 \cdot 10^3).$$

Затѣмъ

$$C_1 (33,45 + \lambda_1 5,294 \cdot 10^5) + C_2 (287,3 + \lambda_1 42,59 \cdot 10^5) +$$

$$+ C_3 (1205,6 + \lambda_1 554,1 \cdot 10^5) + C_4 (3280 - \lambda_1 705 \cdot 10^5) = 0 \quad (144,1)$$

$$C_1 (34,76 + \lambda_1 6,585 \cdot 10^5 + \lambda_1^2 24660 \cdot 10^5) + C_2 (309,7 +$$

$$+ \lambda_1 52,14 \cdot 10^5) + C_3 (1362,9 + \lambda_1 610,9 \cdot 10^5) + C_4 (3941 -$$

$$- \lambda_1 967,0 \cdot 10^5) = 0 \quad \dots \quad (145,1)$$

Для того, чтобы C_1, C_2, C_3, C_4 имѣли значенія, отличныя отъ нуля, необходимо обращеніе въ нуль определителя,

составленнаго изъ коэффициентовъ управлений (141,1) (142,1) (144,1) (145,1).

Обозначимъ

$$a = 1,3664 \cdot 10^5; \quad b = 17,982 \cdot 10^5; \quad c = 0,2769 \cdot 10^5; \quad d = 4,099 \cdot 10^5; \\ e = 26,97 \cdot 10^5; \quad f = 33,45; \quad g = 5,294 \cdot 10^5; \quad i = 287,3; \quad j = 42,59 \cdot 10^5; \\ k = 1205,6; \quad l = 554,1 \cdot 10^5; \quad m = 3270; \quad n = 705,0 \cdot 10^5; \quad p = 34,76; \\ r = 6,585 \cdot 10^5; \quad s = 24660 \cdot 10^5; \quad t = 309,7; \quad u = 52,14 \cdot 10^5; \quad v = \\ = 1362,9; \quad w = 610,9 \cdot 10^5; \quad x = 3941; \quad y = 967,0 \cdot 10^5.$$

Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a\lambda_1 & -b\lambda_1 & 0 & 0 \\ c\lambda_1 & 1 + d\lambda_1 & e\lambda & 0 \\ f + g\lambda_1 & i + j\lambda_1 & k + l\lambda_1 & m - n\lambda_1 \\ p + r\lambda_1 + s\lambda_1^2 & t + u\lambda_1 & v + w\lambda_1 & x - y\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или} \\ \Delta = (1 - a\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 + d\lambda_1 & i + j\lambda_1 & t + u\lambda_1 \\ e\lambda & k + l\lambda_1 & v + w\lambda_1 \\ 0 & m - n\lambda_1 & x - y\lambda_1 \end{vmatrix} + \\ + b\lambda_1 \begin{vmatrix} c\lambda_1 & f + g\lambda_1 & p + r\lambda_1 + s\lambda_1^2 \\ e\lambda_1 & k + l\lambda_1 & v + w\lambda_1 \\ 0 & m - n\lambda_1 & x - y\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или } \Delta = (1 + a\lambda_1) [(1 + d\lambda_1) (k + l\lambda_1) (x + y\lambda_1) + e\lambda_1 (m - n\lambda_1) (t + \\ + u\lambda_1) - (v + w\lambda_1) (m - n\lambda_1) \cdot 1 + d\lambda_1 - (x - y\lambda_1) (i + j\lambda_1) e\lambda_1] + \\ + b\lambda_1 [c\lambda_1 (k + l\lambda_1) (x - y\lambda_1) + e\lambda_1 (m - n\lambda_1) (p + r\lambda_1 + s\lambda_1^2) - \\ - (v + w\lambda_1) (m - n\lambda_1) c\lambda_1 - (x - y\lambda_1) (f + g\lambda_1) e\lambda_1] = 0.$$

$$\Delta = (1 + a\lambda_1) [(kx - vm) + \lambda_1 (lx + dkx - ky + emt - wm + vn - \\ - vmd - xie) + \lambda_1^2 (dlx - ent - ly - dky + emu + wn - wmd + vnd + \\ + yie - xje) + \lambda_1^3 (-dly - enu + wnd + yje)] + b\lambda_1 [\lambda (ckx + emp - \\ - umc - xfe) + \lambda_1^2 (clx - cky + enr - enp - umc + unc + yfe - xge) + \\ + \lambda^3 (-cly + ems - enr + wnc + yge) + \lambda^4 (-ens)] = 0.$$

Подставивъ численныя значенія получимъ:

$$\Delta = 2,94 \cdot 10^5 - \lambda_1 \cdot 24,4 \cdot 10^{10} - \lambda_1^2 \cdot 30,3 \cdot 10^{15} + \lambda_1^3 \cdot 16,8 \cdot 10^{20} + \\ + \lambda_1^4 \cdot 5,23 \cdot 10^{25} - \lambda_1^5 \cdot 0,8431 \cdot 10^{30} = 0 \dots (146)$$

Корнемъ уравненія (146) оказывается $\lambda_1 = 1,82 \cdot 10^{-5}$.

Это число, подставленное въ (146) даёт

$$1614 \cdot 10^4 - 1617 \cdot 10^4 = -3 \cdot 10^4,$$

или въ процентахъ

$$100\% - 100,185\% = -0,185\% \approx 0$$

(138) даётъ:

$$k_1 = \sqrt[4]{\frac{\lambda_1 E}{4\rho}} = \sqrt[4]{\frac{1,82 \cdot 10^{-5} \cdot 1,9519 \cdot 10^{12}}{4,8,115}} = 31,9573$$

(стр. 114). Изъ стр. 143 имѣемъ

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1^2} = 0,0061523 \text{ сек.}$$

Опытъ же даётъ $k = 96,895$ и $\tau_1 = 0,00066923$ сек. (стр. 150). Причину крупнаго несогласія результатовъ мы видимъ въ малой сходимости рядовъ (133). При взятомъ въ нихъ числѣ 6 членовъ, въ уравненіяхъ до (144,1) λ_1 встрѣчается въ первой степени. Во второй степени оно впервые встрѣчается лишь въ послѣднемъ уравненіи (145,1) и въ немъ значеніе членовъ, содержащихъ λ_1^2 оказывается одного порядка съ содержащими λ_1 въ первой степени, а это вызываетъ необходимость ознакомиться со значеніемъ членовъ, содержащихъ λ_1^3 и λ_1^4 . Громадное количество выкладокъ, получившееся у насъ, является необходимымъ въ нѣсколько разъ увеличить для этого, приближая къ достовѣрности вѣроятіе надѣлать ошибокъ. Ввиду этого по мысли Б. Л. Сушенкова, мы отступили отъ рядовъ В. А. Стеклова (133) и разложили интеграль (130) въ рядъ Mac Laurin (см. § 39).

Изъ уравненій (141,1) (142,1) (144,1) (145,1) мы можемъ кромѣ λ_1 найти еще

$$\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1} \text{ и } \frac{C_4}{C_1}$$

Эти величины даютъ форму, въ какую изгибается игла при основномъ тонѣ ея свободныхъ колебаній. Кромѣ того онѣ полезны въ качествѣ провѣрки правильности составленія (146) и предшествующей группы (141,1) (142,1) (144,1) и (145,1).

Уравнение (141,1) намъ даетъ

$$C_2 = -C_1 \frac{10^5 - 1,3664 \cdot 10^5}{17,952} = -C_1 \frac{0,55 - 1,366}{17,982} = -0,045 C_1$$

Уравнение (142,1) даетъ

$$C_3 = -C_1 \frac{0,2769 - 0,045(0,55 - 4,099)}{26,97} = -0,0025 C_1$$

Уравнение (144,1) даетъ:

$$C_4 = -C_1 \frac{\left(\frac{33,45}{1,82} + 5,29\right) - 0,045 \left(\frac{287,3}{1,82} + 42,59\right) - 0,0025 \left(\frac{1206}{1,82} + 554\right)}{\frac{3270}{1,82} - 705} =$$

$$C_4 = -0,0106 C_1$$

Для провѣрки правильности составленія опредѣлителя и нахождения корня λ_1 , подставимъ C_2 , C_3 и C_4 , полученные изъ (141,1) (142,1) и (144,1) въ уравненіе (145,1). Оказывается:

$$\frac{34,76}{1,82} + 6,59 + 0,2466 \cdot 1,82 - 0,045 \left(\frac{309,7}{1,82} + 52,14\right) - 0,0025 \left(\frac{1363}{1,82} + 611\right) - 0,0106 \left(\frac{3941}{1,82} - 967\right) = 26 - 27,$$

т. е. уравненіе (144,1) обращается въ нуль съ тою точностью, съ какою вычислены отношенія

$$\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_1} \text{ и } \frac{C_4}{C_1}.$$

Дѣйствительно, λ_1 вычислено съ тремя знаками, т. е. третья цифра не точная; отношеніе же

$$\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1} \text{ и } \frac{C_4}{C_1},$$

получающіяся какъ малыя разности большихъ чиселъ, могутъ быть написаны только двумя цифрами, изъ которыхъ вторая неточная. Итакъ мы находимъ, что опредѣлитель составленъ правильно.

§ 38. Форма, въ какую изгибается ось иглы при основном тонъея свободныхъ колебаній.

При $E = 1$ первое уравненіе (133) намъ даетъ:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} + Z_{15} + Z_{16} \dots \\ \underline{Z}_{11} &= C_1; \underline{Z}_{12} = C_2 x; \underline{Z}_{13} = C_3 \frac{x^2}{2}; \underline{Z}_{14} = C_4 \frac{x^3}{6} \\ \underline{Z}_{15} &= -\lambda_1 b^3 C_1 \left[\frac{x^2}{2} \lg(Rb-x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{Rbx}{2} + \frac{R^2 b^2}{2} \lg(Rb-x) - \right. \\ &\quad \left. - Rbx \lg(Rb-x) \right] \\ \underline{Z}_{16} &= C_2 \lambda_1 b^3 \left\{ \frac{x^3}{6} \lg(Rb-x) - \frac{2}{3} R^2 b^3 \lg(Rb-x) - \frac{11}{36} x^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{6} Rbx^2 - \frac{2}{3} R^2 b^2 x + \frac{3}{2} R^2 b^2 x \lg(Rb-x) - Rbx^2 \lg(Rb-x) \right\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= C_1; \underline{Z}_{12} = -9,00 \cdot 10^{-3} C_1 x; \underline{Z}_{13} = -\frac{8,55}{2} 10^{-3} C_1 x^2 = - \\ &= -4,28 \cdot 10^{-3} C_1 x^2; \\ \underline{Z}_{14} &= -\frac{7,90}{6} \cdot 10^{-4} C_1 x^3 = -1,317 \cdot 10^{-4} C_1 x^3 \\ \underline{Z}_{15} &= -8,33 \cdot 10^{-6} 1225 C_1 \left[\frac{x^2}{2} \lg(9,85-x) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{9,85}{2} x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{97,0}{2} \lg(9,85-x) - 9,85x \lg(9,85-x) \right] = \\ &= -1,02 \cdot 10^{-3} C_1 \left[\frac{x^2}{2} \lg(9,85-x) - 0,75x^2 + 4,93x + \right. \\ &\quad \left. + 48,5 \lg(9,85-x) - 9,85x \lg(9,85-x) \right] \\ \underline{Z}_{16} &= -9,00 \cdot 10^{-3} C_1 8,33 \cdot 10^{-6} 1225 \left[\frac{x^3}{6} \lg(9,85-x) - \right. \\ &= -\frac{2}{3} 956 \lg(9,85-x) - 0,306x^3 + 1,166 \cdot 9,85x^2 - 0,66 \cdot 97,0x + \\ &\quad \left. + 1,5 \cdot 97,0x \cdot \lg(9,85-x) - 9,85x^2 \lg(9,85-x) \right] = \\ \underline{Z}_{16} &= -9,18 \cdot 10^{-5} C_1 \left[\frac{x^3}{6} \lg(9,85-x) - 638 \lg(9,85-x) - \right. \\ &= -0,306x^3 + 11,48x^2 - 64,0x + 145,3x \lg(9,85-x) - \\ &\quad \left. - 9,85x^2 \lg(9,85-x) \right], \end{aligned}$$

Въ каждую изъ величинъ $Z_{11}; Z_{12} \dots$ мы вставляемъ $x = nH$, гдѣ n имѣеть значенія 0; 0,1; 0,2; . . . 0,2; 1,0; $H = 6,02$ и для каждаго такого x мы суммируемъ всѣ полученныя

значенія Z_{11}, Z_{12} . . . и такимъ образомъ для 11 значеній x получаемъ соотвѣтственныя 11 значеній Z_1 и $X_1 = Z_1 R_x^{-2}$

$\frac{x}{H} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$Z_1 =$	-0,07	+0,05	0,16	0,25	0,34	0,41	0,47	0,53	0,58
$X_1 =$	-0,88	+0,71	2,58	4,65	7,30	10,25	14,07	19,00	25,7
			$\frac{x}{H} = 0,9$		1,0				
			$Z_1 = 0,63$		0,68				
			$X_1 = 35,0$		49,6				

Линія, въ какую по этой табличкѣ изгибается ось конической иглы при основномъ тонѣ ея колебаній отличается фигурой отъ полученной по методу Крылова.

§ 39. Разложеніе Б. Л. Сушенковымъ интеграла (130) въ рядъ Mac Laurin.

Представимъ интеграль дифференціального уравненія

$$Z^{IV} = \frac{b^2 \lambda}{(Rb-x)^2} Z. \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

ввидѣ ряда Mac Laurin

$$Z = Z_0 + \frac{x}{1!} Z_0' + \frac{x^2}{2!} Z_0'' + \frac{x^3}{3!} Z_0''' + \frac{x^4}{4!} Z_0^{IV} + \frac{x^5}{5!} Z_0^V + \quad (147)$$

Изъ условій закрѣпленія имѣемъ

$$(Z_0)_{x=0} = 0; \quad (Z_0')_{x=0} = 0.$$

Обозначаемъ

$$(Z_0'')_{x=0} = A, \quad (Z_0''')_{x=0} = B$$

Всѣ остальные коэффициенты ряда (147) можно получить, какъ функціи A, B и λ . Для этого, обозначивъ

$$\sqrt{\varphi} = \frac{b}{Rb-x}$$

продифференцируемъ (130) послѣдовательно до Z^{xx} . Мы получимъ:

$$\begin{aligned}
 Z^{IV} &= \lambda \varphi Z \\
 Z^V &= \lambda(\varphi' Z + \varphi Z') \\
 Z^{VI} &= \lambda(\varphi'' Z + 2\varphi' Z' + \varphi Z'') \\
 Z^{VII} &= \lambda(\varphi''' Z + 3\varphi'' Z' + 3\varphi' Z'' + \varphi Z''') \\
 Z^{VIII} &= \lambda(\varphi^{IV} Z + 4\varphi''' Z' + 6\varphi'' Z'' + 4\varphi' Z''' + \varphi Z^{IV}) \\
 Z^{IX} &= \lambda(\varphi^V Z + 5\varphi^{IV} Z' + 10\varphi''' Z'' + 10\varphi'' Z''' + 5\varphi' Z^{IV} + \varphi Z^V) \\
 Z^X &= \lambda(\varphi^{VI} Z + 6\varphi^V Z' + 15\varphi^{IV} Z'' + 20\varphi''' Z''' + 15\varphi'' Z^{IV} + 6\varphi' Z^V + \\
 &\quad + \varphi Z^{VI}) \\
 Z^{XI} &= \lambda(\varphi^{VIII} Z + 7\varphi^{VI} Z' + 21\varphi^V Z'' + 35\varphi^{IV} Z''' + 35\varphi''' Z^{IV} + 21\varphi'' Z^V + \\
 &\quad + 7\varphi' Z^{VI} + \varphi Z^{VIII}) \\
 Z^{XII} &= \lambda(\varphi^{VIII} Z + 8\varphi^{VII} Z' + 28\varphi^{VI} Z'' + 56\varphi^V Z''' + 70\varphi^{IV} Z^{IV} + 56\varphi''' Z^V + \\
 &\quad + 28\varphi'' Z^{VI} + 8\varphi' Z^{VII} + \varphi Z^{VIII}) \\
 Z^{XIII} &= \lambda(\varphi^{IX} Z + 9\varphi^{VIII} Z' + 36\varphi^{VII} Z'' + 84\varphi^{VI} Z''' + 126\varphi^V Z^{IV} + 126\varphi^{IV} Z^V + \\
 &\quad + 84\varphi''' Z^{VI} + 36\varphi'' Z^{VII} + 9\varphi' Z^{VIII} + \varphi Z^{IX}) \\
 Z^{XIV} &= \lambda(\varphi^X Z + 10\varphi^{IX} Z' + 45\varphi^{VIII} Z'' + 120\varphi^{VII} Z''' + 210\varphi^{VI} Z^{IV} + 252\varphi^V Z^V + \\
 &\quad + 210\varphi^{IV} Z^{VI} + 120\varphi''' Z^{VII} + 45\varphi'' Z^{VIII} + 10\varphi' Z^{IX} + \varphi Z^X) \\
 Z^{XV} &= \lambda(\varphi^{XI} Z + 11\varphi^X Z' + 55\varphi^{IX} Z'' + 165\varphi^{VIII} Z''' + 330\varphi^{VII} Z^{IV} + \\
 &\quad + 462\varphi^{VI} Z^V + 462\varphi^V Z^{VI} + 330\varphi^{IV} Z^{VI} + 165\varphi''' Z^{VIII} + 55\varphi'' Z^{IX} + \\
 &\quad + 11\varphi' Z^X + \varphi Z^{XI}) \\
 Z^{XVI} &= \lambda(\varphi^{XII} Z + 12\varphi^{XI} Z' + 66\varphi^X Z'' + 220\varphi^{IX} Z''' + 495\varphi^{VIII} Z^{IV} + \\
 &\quad + 792\varphi^{VII} Z^V + 924\varphi^{VI} Z^{VI} + 792\varphi^V Z^{VII} + 495\varphi^{IV} Z^{VIII} + 220\varphi''' Z^{IX} + \\
 &\quad + 66\varphi'' Z^X + 12\varphi' Z^{XI} + \varphi Z^{XII}) \\
 Z^{XVII} &= \lambda(\varphi^{XIII} Z + 13\varphi^{XII} Z' + 78\varphi^{XI} Z'' + 286\varphi^X Z''' + 715\varphi^{IX} Z^{IV} + \\
 &\quad + 1287\varphi^{VIII} Z^V + 1716\varphi^{VII} Z^{VI} + 1716\varphi^{VI} Z^{VII} + 1287\varphi^V Z^{VIII} + 715\varphi^{IV} Z^{IX} + \\
 &\quad + 286\varphi''' Z^X + 78\varphi'' Z^{XI} + 13\varphi' Z^{XII} + \varphi Z^{XIII}) \\
 Z^{XVIII} &= \lambda(\varphi^{XIV} Z + 14\varphi^{XIII} Z' + 91\varphi^{XII} Z'' + 364\varphi^{XI} Z''' + 1001\varphi^X Z^{IV} + \\
 &\quad + 2002\varphi^{IX} Z^V + 3003\varphi^{VIII} Z^{VI} + 3432\varphi^{VII} Z^{VII} + 3003\varphi^{VI} Z^{VIII} + \\
 &\quad + 2002\varphi^X Z^{IX} + 1001\varphi^{IV} Z^X + 364\varphi''' Z^{XI} + 914\varphi'' Z^{XII} + 149\varphi' Z^{XIII} + \\
 &\quad + \varphi Z^{XIV}) \\
 Z^{XIX} &= \lambda(\varphi^{XV} Z + 15\varphi^{XIV} Z' + 105\varphi^{XIII} Z'' + 455\varphi^{XII} Z''' + 1365\varphi^{XI} Z^{IV} +
 \end{aligned}$$

$$+ 3003\varphi^X Z^{IV} + 5005\varphi^{IX} Z^V + 643\varphi^{VIII} Z^{VII} + 6435\varphi^{VII} Z^{VIII} + 5005\varphi^{VI} Z^{IX} + \\ + 3093\varphi^V Z^X + 1365\varphi^{IV} Z^{XI} + 455\varphi'' Z^{XII} + 105\varphi'' Z^{XIII} + 15\varphi' Z^{XIV} + \\ + \varphi Z^{XV})$$

$$Z^{XX} = \lambda (\varphi^{XVI} Z + 16\varphi^{XV} Z' + 120\varphi^{XIV} Z'' + 560\varphi^{XIII} Z''' + 1820\varphi^{XII} Z^{IV} + \\ + 4368\varphi^{XI} Z^V + 8008\varphi^X Z^VI + 11440\varphi^{IX} Z^{VII} + 12870\varphi^{VIII} Z^{VIII} + \\ + 11440\varphi^{VII} Z^{IX} + 8008\varphi^{VI} Z^X + 4368\varphi^V Z^{XI} + 1820\varphi^{IV} Z^{XII} + \\ + 560\varphi''' Z^{XIII} + 120\varphi'' Z^{XIV} + 16\varphi' Z^{XV} \varphi Z^{XVI})$$

Подставимъ сюда $R = 0,282$ с.; $b = 35$; $b^2 = 1225$; $Rb = 9,870$;

$$\varphi = \frac{b^2}{(Rb-x)^2}; \quad \varphi_0 = \frac{1225}{9,87^2}; \quad \varphi^{(n)} = (n+1)! \frac{b^2}{(Rb-x)^{n+2}}; \quad \varphi_0^n = \\ = (n+1)! \frac{1225}{9,87^{n+2}}$$

$\varphi_0 = 12,575$	$\varphi_0^{VII} = 0,055562$	$\varphi_0^{XIII} = 0,12994$
$\varphi_0' = 2,5480$	$\varphi_0^{VIII} = 0,050664$	$\varphi_0^{XIV} = 0,19743$
$\varphi_0'' = 0,77448$	$\varphi_0^{IX} = 0,051332$	$\varphi_0^{XV} = 0,32011$
$\varphi_0''' = 0,31387$	$\varphi_0^X = 0,057207$	$\varphi_0^{XVI} = 0,55135$
$\varphi_0^{IV} = 0,15900$	$\varphi_0^{XI} = 0,069551$	
$\varphi_0^V = 0,096655$	$\varphi_0^{XII} = 0,091607$	
$\varphi_0^{VI} = 0,068550$		

Получимъ $Z_0 = 0$; $Z_0' = 0$; $Z_0'' = A$; $Z_0''' = B$:

$$\left. \begin{aligned} Z_0^{IV} &= 0; \quad Z_0^V = 0; \quad Z_0^{VI} = 12,575 A\lambda; \quad Z_0^{VII} = 7,644\lambda A + \\ &\quad + 12,575\lambda B \\ Z_0^{VIII} &= 4,64694\lambda A + 10,192\lambda B; \quad Z_0^{IX} = 3,1387\lambda A + \\ &\quad + 7,7448\lambda B \\ Z_0^X &= (2,385\lambda + 158,13\lambda^2) A + 6,2774\lambda A \\ Z_0^{XI} &= (2,02975\lambda + 320,41\lambda^2) A + (5,565\lambda + 158,13\lambda^2) B \\ Z_0^{XII} &= (1,9194\lambda + 486,95\lambda^2) A + (5,4127\lambda + 384,49\lambda^2) B \\ Z_0^{XIII} &= (2,0002\lambda + 689,96\lambda^2) A + (5,7582\lambda + 681,73\lambda^2) B \\ Z_0^{XIV} &= (2,280\lambda + 979,11\lambda^2 + 1988,48\lambda^3) A + 6,6674\lambda + \\ &\quad + 1104,99\lambda^2) B \\ Z_0^{XV} &= (2,8233\lambda + 1429,4\lambda^2 + 8461,3\lambda^3) A + (8,3596\lambda + \\ &\quad + 1763,5\lambda^2 + 1988,5\lambda^3) B \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$$\begin{aligned}
Z_0^{XVI} &= (3,7755\lambda + 2172,2\lambda^2 + 23993\lambda^3) A + (11,293\lambda + \\
&\quad + 2858,7\lambda^2 + 9670\lambda^3) B \\
Z_0^{XVII} &= (5,4250\lambda + 3434,5\lambda^2 + 58358\lambda^3) A + 16,361\lambda + \\
&\quad + 4778,9\lambda^2 + 3086,1\lambda^3) B \\
Z_0^{XVIII} &= (8,336\lambda + 5782\lambda^2 + 133000\lambda^3 + 25010\lambda^4) A + \\
&\quad + (25,32\lambda + 8302\lambda^2 + 83390\lambda^3) B \\
Z_0^{XIX} &= (13,64\lambda + 10140\lambda^2 + 296000\lambda^3 + 182,500\lambda^4) A + \\
&\quad + (41,7\lambda + 15040\lambda^2 + 209000\lambda^3 + 25000\lambda^4) B \\
Z_0^{XX} &= (23,69\lambda + 18730\lambda^2 + 661000\lambda^3 + 830000\lambda^4) A + \\
&\quad + (72,77\lambda + 28420\lambda^2 + 508000\lambda^3 + 202000\lambda^4) B
\end{aligned} \tag{148}$$

Чтобъ составить условия закрѣпленія свободнаго конца усѣченнаго конуса будетъ необходимо имѣть

$$(Z)_{x=H=6^c,0,2}, \quad Z'_{6,0,2}, \quad Z''_{6,0,2} \text{ и } Z'''_{6,0,2}$$

для которыхъ вычислимъ сначала для $x=6.02$:

$x = 6^c,02$	$\frac{x^2}{2!} = 18,12$	$\frac{x^3}{3!} = 36,362$
$\frac{x^5}{6!} = 66,110$	$\frac{x^7}{7!} = 56,856$	$\frac{x^8}{8!} = 42,784$
$\frac{x^{11}}{11!} = 9,4285$	$\frac{x^{12}}{12!} = 4,7301$	$\frac{x^{13}}{13!} = 2,1904$
$\frac{x^{16}}{16!} = 0,14223$	$\frac{x^{17}}{17!} = 0,050366$	$\frac{x^{18}}{18!} = 0,016843$
$\frac{x^4}{4!} = 54,725$	$\frac{x^5}{5!} = 65,890$	
$\frac{x^9}{9!} = 28,618$	$\frac{x^{10}}{10!} = 17,228$	
$\frac{x^{14}}{14!} = 0,94190$	$\frac{x^{15}}{15!} = 0,37802$	
$\frac{x^{19}}{19!} = 0,0053372$	$\frac{x^{20}}{20!} = 0,0016066$	

Въ рядѣ (148), превратившемся въ:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{x^2}{2!} \Delta + \frac{x^3}{3!} B + \frac{x^6}{6!} Z_0^{VI} + \frac{x^7}{7!} Z_0^{VII} + \frac{x^8}{8!} Z_0^{VIII} + \frac{x^9}{9!} Z_0^{IX} + \\
&\quad + \frac{x^{20}}{20!} Z_0^{XX} \dots \dots \dots (149)
\end{aligned}$$

коэффициенты при A и B и различных степенях λ будутъ при $x=6,02$. Въ первыхъ двухъ членахъ $18,12A + 36,362B$. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^6}{6!} Z_0^{VI}$ при λA : 831,33; 434,63; 198,73 89,823; 41,089; 19,138; 9,079; 4,3812; 2,1475; 1,0673; 0,5370; 0,2732; 0,1404; 0,073; 0,038 итого 1632,7.

Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{10}}{10!} Z_0^X$ при $\lambda^2 A$ они будутъ: 2724,26; 3021,0; 2303,3; 1511,3; 922,22; 540,34; 308,95; 172,98; 97,36; 54,1 и 30,0, итого 11685.

Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{14}}{14!} Z_0^{XIV}$ коэффициенты при $\lambda^3 A$ будутъ 1873,0; 3198,5; 3412,5; 2939,3; 2240,0; 1580; 1061 итого 16304. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{18}}{18!} Z_0^{XVIII}$ коэффициенты при $\lambda^4 A$ будутъ 421,05; 974,0; 1332, итого 2727. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^7}{7!} Z_0^{VII}$ коэффициенты при λB будутъ 715,00; 436,05; 221,64; 108,15; 52,47; 25,603; 12,613; 6,280; 3,160; 1,606; 0,824; 0,426; 0,203; 0,117, итого 1584,2. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{11}}{11!} Z_0^{XI}$ коэффициенты при $\lambda^2 B$ будутъ 1490,94; 1818,67; 1493,26; 1040,80; 666,64; 406,59; 240,69; 139,82; 80,27; 45,6 итого 7423. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{15}}{15!} Z_0^{XV}$ коэффициенты при $\lambda^3 B$ будутъ 951,69; 1375,36; 1554,35; 1404,5; 1115; 816. итого 7017. Наконецъ въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{19}}{19!} Z_0^{XIX}$ коэффициенты при $\lambda^4 B$ будутъ 133,3; 424; итого 457. Такимъ образомъ рядъ (147) получаетъ видъ:

$$Z_H = (18,12 + 1632,7\lambda + 11690\lambda^2 + 16300\lambda^3 + 2730\lambda^4)A + (36,362 + 1584,2\lambda + 7420\lambda^2 + 7020\lambda^3 + 460\lambda^4)B.$$

Теперь ищемъ Z' для $x=6,02$. Въ выражающемъ его рядъ

$$Z = xA + \frac{x^2}{2!} B + \frac{x^5}{5!} Z_0^{VI} + \frac{x^8}{8!} Z_0^{VIII} + \dots + \frac{x^{19}}{19!} Z_0^{XIX} \dots \quad (150)$$

коэффициентами будутъ въ первомъ членѣ при A — 6,02; во второмъ при B — 15,12; начиная съ третьяго при λA — 828,57;

505,35; 264,22; 133,29; 68,254; 34,969; 18,097; 9,461; 4,991; 2,659; 1,427; 0,7716; 0,4198; 0,2304; 0,1262. итого 1873,8. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^9}{9!} Z_0^x$ коэффициентами при $\lambda^2 A$ будутъ 4525,4; 5520,0; 4591,3; 3263,6; 2144,6; 1346,4; 821,14; 488,49; 291,2 170,8; 99,96; итого 23263. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{13}}{13!} Z_0^{xiv}$ коэффициентами при $\lambda^3 A$ будутъ: 4355,6 7969,7; 9069,8; 8300,3; 6699; 4980; 3530; итого 44904. Въ послѣднихъ трехъ членахъ коэффициентами при $\lambda^4 A$ будутъ 1260; 3070; 4430; итого 8760,6.

Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^6}{6!} Z_0^{vii}$ коэффициентами при λB будутъ 831,33; 579,51; 331,36; 179,65; 95,874; 51,034; 27,237; 14,604; 7,8737; 4,2690; 2,327; 1,275; 0,702; 0,3885; итого 2127. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^{10}}{10!} Z_0^{xi}$ коэффициентами при $\lambda^2 B$ будутъ: 2724,3; 3625,2; 3224,7; 2420,4; 1661,0; 1080,6; 679,7; 418,1; 253,3; 151,7; итого 16239. Въ послѣднихъ шести членахъ коэффициентами при $\lambda^3 B$ будутъ 1873,0; 3655,5; 4389,4; 4200; 3525; 2710; итого 20353. Въ послѣднихъ двухъ членахъ коэффициентами при $\lambda^4 B$ будутъ 421,5; 1075; итого 1496,5 и рядъ Z' получаетъ видъ

$$Z'_H = (6,02 + 1873,8\lambda + 23260\lambda^2 + 44900\lambda^3 + 8760\lambda^4)A + (18,12 + 2127\lambda + 16240\lambda^2 + 20400\lambda^3 + 1500\lambda^4)B.$$

Въ рядѣ, выражающемъ Z'' при $x = 6,02$

$$Z'' = A + xB + \frac{x^4}{4!} Z_0^{vi} + \frac{x^5}{5!} Z_0^{vii} + \frac{x^6}{6!} Z_0^{viii} + \dots + \frac{x^{10}}{18!} Z_0^{xx} \dots \quad (151)$$

Коэффициентами будутъ, въ первомъ членѣ при A — 1,0000, во второмъ при B —6,02; начиная съ третьяго при λA : 688,17; 503,66; 307,21; 178,46; 102,04; 58,089; 33,067; 18,859; 10,785; 6,184; 3,556; 2,052; 1,186; 0,689; 0,398; итого 1914,4. Начиная съ члена $\frac{x^8}{8!} Z_0^x$ коэффициентами при $\lambda^2 A$ будутъ 6765,4; 9169,5; 8389,2; 6505,4; 4631,3; 3131,0; 2046,0; 1298,3; 822,2; 510,7; 315,4; итого 43616. Въ послѣднихъ семи членахъ коэффициентами при $\lambda^3 A$ будутъ: 9405,7; 18533; 22599; 22061; 18917; 14910;

11130; итого 117560. Въ послѣднихъ трехъ членахъ коэффициентами при $\lambda^4 A$ будутъ 3556; 9192; 13980; итого 26728. Въ членахъ начиная съ $\frac{x^5}{5!} Z_0^{VI}$ коэффициентами при λB будутъ 823,57; 673,79; 440,47; 268,57; 159,26; 93,25; 54,292; 31,538; 18,311; 10,637; 6,185; 3,601; 2,100; 1,226 итого 2591,7. Въ членахъ начиная съ $\frac{x^9}{9!} Z_0^{XI}$ коэффициентами при $\lambda^2 B$ будутъ 4525,4; 6624,0; 6427,8; 5226,7; 3862,8; 2692,6; 1806,5; 1180,8; 757,5; 4786; итого 33583. Въ послѣднихъ шести членахъ коэффициентами при $\lambda^3 B$ будутъ: 4355,6; 9108,2; 11666; 11861; 10526; 8555; итого 56072. Наконецъ въ послѣднихъ двухъ членахъ коэффициентами при $\lambda^4 B$ будутъ 1259 и 3402; итого 4661. Такимъ образомъ рядъ Z'' получаетъ видъ:

$$Z'' = (1,00 + 1914,4 \lambda + 4362 \lambda^2 + 117600 \lambda^3 + 26700 \lambda^4) A + (6,02 + 2592 \lambda + 33600 \lambda^2 + 56100 \lambda^3 + 4700 \lambda^4) B.$$

Въ рядѣ, выражающемъ Z'' при $x = 6,02$

$$Z'' = B + \frac{x^3}{3!} Z_0^{VI} + \frac{x^4}{4!} Z_0^{VII} + \frac{x^5}{5!} Z_0^{VIII} + \dots + \frac{x^{17}}{17!} Z_0^{XX}$$

въ членахъ, начиная со второго, коэффициентами при λA будутъ 457,25; 418,32; 306,78; 207,5; 135,61; 87,27; 54,929; 34,459; 21,494; 13,355; 8,270; 5,110; 3,151; 1,946; 1,191; итого 1755,6. Въ членахъ, начиная съ $\frac{x^7}{7!} Z_0^X$ коэффициентами при $\lambda^2 A$ будутъ 8991,1; 13709,4; 13936; 11887; 9231,6; 6761,2; 4758,0; 3235,0; 2185,3; 1442,0; 943,4; итого 77080. Въ послѣднихъ семи членахъ коэффициентами будутъ при $\lambda^3 A$ 18749; 40023; 52554; 54967; 50277; 42100; 33292; итого 291960. Въ послѣднихъ трехъ членахъ коэффициентами при $\lambda^4 A$ будутъ 9454; 25960; 41804, итого 77218. Начиная съ члена $\frac{x^4}{4!} Z_0^{VII}$ коэффициентами при λB будутъ 688,17; 671,55; 512,02; 356,93; 238,11; 154,9; 99,208; 62,864; 39,542; 24,736; 15,410; 9,572; 5,93; 3,67; итого 2882,6. Начиная съ члена $\frac{x^8}{8!} Z_0^{XI}$ коэффициентами при $\lambda^2 B$ будутъ 6765,3; 11003; 11745; 10419; 8341,5; 6261,7; 4501,2; 3138,3; 2139,0 и 1431 итого 65745. Въ послѣднихъ 6 членахъ коэф-

фиціентами при $\lambda^3 B$ будуть 9405,8; 21181; 29068; 31523; 29730; 25590; итого 146500 и въ послѣднихъ двухъ членахъ коэффиціентами при $\lambda^4 B$ будуть 3556 и 10170; итого 13726. Такимъ образомъ рядъ Z''' принимаетъ видъ:

$$Z'''_H = (1756 \lambda + 7710 \lambda^2 + 292000 \lambda^3 + 77000 \lambda^4) A + (1,00 + 2883 \lambda + 65700 \lambda^2 + 147000 \lambda^3 + 13700 \lambda^4) B.$$

Въ выраженіяхъ Z_H, Z'_H, Z''_H, Z'''_H мы изъ осторожности брали 20 членовъ и при высокихъ степеняхъ λ имѣли большіе коэффиціенты, степень точности вычисленія которыхъ уменьшалась по мѣрѣ увеличенія степени λ . Далѣе будетъ видно, что λ получается малое: $\lambda = 0,00154$ и потому мы можемъ отбросить члены, содержащіе λ^3 и λ^4 (могли даже удовольствоваться 14 членами) и принять:

$$\left. \begin{aligned} Z_H &= (18,12 + 1632,7 \lambda + 11690 \lambda^2) A + (36,362 + 1584,2 \lambda + 7420 \lambda^2) B \\ Z'_H &= (6,02 + 1873,8 \lambda + 23260 \lambda^2) A + (18,12 + 2127 \lambda + 16240 \lambda^2) B \\ Z''_H &= (1,00 + 1914,4 \lambda + 43600 \lambda^2) A + (6,02 + 2592 \lambda + 33600 \lambda^2) B \\ Z'''_H &= (1756 \lambda + 77100 \lambda^2) A + (1,00 + 2883 \lambda + 66000 \lambda^2) B \end{aligned} \right\} (152)$$

Самыя условія закрѣпленія свободнаго малаго основанія усѣченнаго конуса состоятъ изъ $X''_H = 0; X'''_H = 0$ при $x = H = 6,02$ с. Мы ихъ получимъ изъ $x = R_x^{-2} Z$ дифференцированиемъ, въ такомъ видѣ:

$$Z'' r^{-2} + 4 Z' r^{-3} b^{-1} + 6 Z r^{-4} b^{-2} = 0.$$

$$Z''' r^{-2} + 6 Z'' r^{-3} b^{-1} + 18 Z' r^{-4} b^{-2} + 24 Z r^{-5} b^{-3} = 0.$$

Здѣсь $r = R_H = 0,11$ с.; $r^{-2} = 82,645$; $b = 35$; $4r^{-3} b^{-1} = 85,864$;

$$\begin{aligned} 6 r^{-4} b^{-2} &= 33,454; \quad 6 r^{-3} b^{-1} = 128,80; \quad 18 r^{-4} b^{-2} = \\ &= 100,36; \quad 24 r^{-5} b^{-3} = 34,757. \end{aligned}$$

Подставляя эти значенія въ условія закрѣпленія, мы получимъ

$$82,645 Z''_H + 85,864 Z'_H + 33,454 Z_H = 0 \quad (153,1)$$

$$82,645 Z'''_H + 128,80 Z''_H + 100,36 Z'_H + 34,757 Z_H = 0 \quad (154,1)$$

и вставивъ (151), найдемъ:

$$\begin{aligned}
 & [82,645 (1,00 + 1914,4 \lambda + 43600 \lambda^2) + 85,864 (6,02 + 1873,8 \lambda + \\
 & \quad + 2326 \lambda^2) + 33,454 (18,12 + 1632,7 \lambda + 11690 \lambda^2)] A + \\
 & + [82,645 (6,02 + 2592 \lambda + 33600 \lambda^2) + 85,864 (18,12 + 2127 \lambda + \\
 & \quad + 16240 \lambda^2) + 33,454 (36,362 + 1584,2 \lambda + 7420 \lambda^2)] B = 0 \quad (153,2) \\
 & [82,645] 1746 \lambda + 77100 \lambda^2 + 128,8 (1,00 + 1914,4 \lambda + 436000 \lambda^2) + \\
 & \quad + 100,36 (6,02 + 1873,8 \lambda + 23260 \lambda^2) 34,757 (18,12 + 1632,7 \lambda + \\
 & \quad + 11690 \lambda^2)] A + [82,645 (1,00 + 2883 \lambda + 66000 \lambda^2) + 128,8 (6,02 + \\
 & \quad + 2592 \lambda + 33600 \lambda^2) + 100,36 (18,12 + 3127 \lambda + 16240 \lambda^2) + \\
 & \quad + 34,757 (36,362 + 1584,2 \lambda + 7420 \lambda^2)] B = 0 \quad \dots (154,2)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & (1205,7 + 373730 \lambda + 5990000 \lambda^2) A + (3269,8 + 449850 \lambda + \\
 & \quad + 4400000 \lambda^2) B = 0 \quad \dots (153,3) \\
 & (1362,8 + 636510 \lambda + 14800000 \lambda^2) A + (3940,3 + 840650 \lambda + \\
 & \quad + 11700000 \lambda^2) B = 0 \quad \dots (154,3)
 \end{aligned}$$

Приравниваемъ нулю опредѣлитель послѣднихъ уравнений и отбрасывая въ немъ члены, содержащіе

$$\lambda^3 \text{ и } \lambda^4,$$

получимъ

$$\Delta = 29,47 \cdot 10^4 - 2,08 \cdot 10^{-8} \lambda + 0,011 \cdot 10^{12} \lambda^2 = 0.$$

Полагая

$$\lambda = \alpha 10^{-4},$$

найдемъ

$$10^{-4} \Delta = 29,47 - 2,08 \alpha + 0,011 \alpha^2 = 0$$

или

$$2680 - 189 \alpha + \alpha^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = 94,5 \pm \sqrt{8930 - 2680} = 94,5 \pm 79,1; \quad \alpha_1 = 15,4; \quad \alpha_2 = 173,6.$$

Наименьшее

$$\lambda = 15,4 \cdot 10^{-4} = 0,00154 \text{ и (129) даетъ}$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{e\lambda}{4\rho}} = \sqrt[4]{\frac{1,952 \cdot 10^{12} \cdot 15,14 \cdot 10^{-4}}{4,8,52}} = 96,9, \text{ а}$$

затѣмъ

$$\tau = \frac{2\pi}{k^2} = 0,00067 \text{ сек.}$$

Согласіе съ опытомъ (стр. 150) получается полное, такъ какъ опытъ даетъ $k = 96,895$ и $\tau = 0,00066923$ сек. Мы пробовали вмѣсто 20 членовъ ограничиться 18-ю и никакой разницы на логарифмической линейкѣ не получили, откуда заключаемъ, что и увеличивать число членовъ бесполезно.

§ 40. Форма изгиба.

Любое изъ уравненій (153,3) или (154,3) намъ даетъ

$$B = -0,4518 A.$$

Подставляя $A = 1$, $B = -0,4518$ и $\lambda = 0,00154$ и (148) въ (149)

и пользуясь, наконецъ, тѣмъ, что

$$X_i = Z_i R_x^{-2} \text{ (129)}$$

мы получимъ въ масштабѣ $A = 1$ линію, въ какую изгибается ось усѣченного конуса, съ задѣланнымъ большимъ основаніемъ и свободнымъ малымъ, когда онъ колеблется основнымъ тономъ. Для болѣе удобной сравнимости результатовъ съ полученными по Крылову, мы и здѣсь взяли абсциссы точекъ, дѣлящихъ пополамъ 10 равныхъ промежутковъ:

$$x_1 = 0,301; x_2 = 0,903; \dots x_{10} = 5,719.$$

Для ясности осуществленія вычисленій, приведемъ ихъ схему въ видѣ таблицы, гдѣ n отъ 6 доводимъ до 13, хотя достаточно бы было довести ихъ до 10.

n	Коэффициентъ	$x_1 = 0,301$ сант.	$x_2 = 0,903$ сант.	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$x_{10} = 5,719$ с.
	при x^n	$\frac{x_1^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_2^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_3^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_4^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_5^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_6^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_7^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_8^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_9^n}{n!} Z_0^{(n)}$	$\frac{x_{10}^n}{n!} Z_0^{(n)}$
2	0,5000	0,01530	0,4077	1,133	2,22000	3,66900	5,47900	7,45600	10,19000	13,09000	16,35000
3	-0,0753	-0,00205	-0,05544	-0,25670	-0,70430	-1,49700	-2,73100	-4,51200	-6,93100	-10,09000	-14,09000
6	269000.10 ⁻⁹	0,00000	0,00001	0,00031	0,00236	0,01063	0,03538	0,09660	0,22790	0,48290	0,96310
7	599.10 ⁻⁹	-	-	0,00000	0,00011	0,00064	0,00261	0,00841	0,02290	0,05500	0,12280
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\Sigma = Z_x$	-	0,0432	0,3523	0,8770	1,518	2,183	2,786	3,249	3,510	3,53	3,34
R_x^2	-	0,0747	0,06565	0,0571	0,0492	0,0419	0,0351	0,0290	0,0234	0,0184	0,0141
X_x	-	0,58	0,37	15,4	30,9	52	79,7	112	150	192	239

Эта таблица даетъ очертаніе оси, отвѣчающее основному тону свободныхъ поперечныхъ колебаній усѣченного конуса въ удобномъ, но невѣрномъ масштабѣ $A = 1$.

§ 41. **Опредѣленіе масштаба амплитуды колебанія задѣланнаго толстымъ концомъ усѣченного конуса при его предѣлѣ упругости.**

При помощи произвольно взятаго масштаба $A = I$ мы найдемъ подобно тому, какъ въ § 34, величину

$$(ni)_{max} = (R_x X'')_{max},$$

а отсюда найдемъ, что дѣйствительная величина A будетъ

$$A = \frac{1}{n} = \frac{i}{(R_x X'')_{max}} = \frac{0,00357}{(R_x X'')_{max}}.$$

Величину $(ni)_{max}$ можно бы было найти, приравнивая нулю производную ni по X_1 т. е. опредѣляя X изъ $(ni)' = (R_x X')' = 0$ и подставляя его въ $ni = R_x X''$, выражающееся рядомъ относительно x . Но тогда пришлось бы рѣшать уравненіе высокой степени относительно x и путемъ послѣдовательнаго приближенія подставлять различныя значенія x въ выраженіе $(R_x X')$. Пришлось бы вычислять какъ коэффициенты ряда $(R_x X')$, такъ и ряда $R_x X''$.

Поэтому, разъ надо идти ощупью, мы ограничиваемся тѣмъ, что прямо выискиваемъ $(R_x X'')_{max}$ изъ среды различныхъ $(R_x X'')$ путемъ подбора X . Мы имѣемъ (129)

$$X = R_x^{-2} Z$$

откуда

$$R_x X'' = Z'' R_x^{-1} + 4Z' R_x^{-2} \frac{1}{b} + 6Z R_x^{-3} \frac{1}{b^2}. \quad (155)$$

Умножая обѣ части (152) на $R_x^3 b^2$ получаемъ

$$R_{x^4} X'' b^2 = 6Z = 4Z' R_x b + Z'' R_x^2 b^2 \quad (156)$$

Въ (155) подставимъ (149), (150), (151) и $R_x b = Rb_{-x}$ и имѣющіяся въ началѣ § 40 величины

$$A = 1 \text{ и } B = -0,4518 \quad A = -0,4518.$$

Подставимъ еще

$$Rb = 9,87 \text{ и } R^2 b^2 = 97,42$$

и получимъ:

$$\begin{aligned} R_x^4 X'' b^2 &= \frac{6x^2}{2!} + 6B \frac{x^3}{3!} + 6Z_0^{\text{VI}} \frac{x^6}{6!} + 6Z_0^{\text{VII}} \frac{x^7}{7!} + \dots + 6Z_0^{\text{XIV}} \frac{x^{14}}{14!} + \\ &+ 4Rb_x + 4BRb \frac{x^2}{2!} + 4Z_0^{\text{VI}} Rb \frac{x^5}{5!} + 4Z_0^{\text{VII}} Rb \frac{x^6}{6!} + 4Z_0^{\text{VIII}} \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &+ 4Z_0^{\text{XV}} Rb \frac{x^{14}}{14!} - 4 \frac{x^2}{2} - 4B \frac{x^3}{2!} - 4Z_0^{\text{VI}} \frac{x^6}{5!} - 4Z_0^{\text{VII}} \frac{x^7}{6!} - \dots - 4Z_0^{\text{XIV}} \frac{x^{14}}{13!} + \\ &+ R^2 b^2 + BR^2 b^2 \frac{x}{1!} + Z_0^{\text{VI}} R^2 b^2 \frac{x^4}{4!} + Z_0^{\text{VII}} R^2 b^2 \frac{x^5}{5!} + Z_0^{\text{VIII}} R^2 b^2 \frac{x^6}{6!} + \\ &+ Z_0^{\text{IX}} R^2 b^2 \frac{x^7}{7!} + \dots + Z_0^{\text{XVI}} R^2 b^2 \frac{x^{14}}{14!} - 2Rbx - 2BRb \frac{x^2}{1} - \\ &- 2Z_0^{\text{V}} Rb \frac{x^5}{4!} - 2Z_0^{\text{VII}} Rb \frac{x^6}{5!} - 2Z_0^{\text{VIII}} Rb \frac{x^7}{6!} - \dots \\ &- 2Z_0^{\text{XV}} Rb \frac{x^{14}}{13!} + x^2 + B \frac{x^3}{1!} + Z_0^{\text{VI}} \frac{x^6}{4!} + Z_0^{\text{VII}} \frac{x^7}{5!} + \dots \\ &+ Z_0^{\text{XIV}} \frac{x^{14}}{12!} = R^2 b^2 + \frac{x}{1!} (4Rb + BR^2 b^2 - 2Rb) + \frac{x^2}{2} (6 + 4BRb - \\ &- 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2BRb + 2) + \frac{x^3}{3!} (B(6 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + \frac{x^4}{4!} R^2 b^2 + \\ &+ \frac{x^5}{5!} [(4 - 2 \cdot 5) Z_0^{\text{VI}} Rb + Z_0^{\text{VII}} R^2 b^2] + \frac{x^6}{6!} [Z_0^{\text{VI}} (6 - 4 \cdot 6 + 6 \cdot 5) + \\ &+ Z_0^{\text{VII}} (4 - 2 \cdot 6) Rb + Z_0^{\text{VIII}} R^2 b^2] + \dots \frac{x^n}{n!} \{Z_0^n [6 - 4n + n(n-1)] + \\ &+ Z_0^{n+1} [4 - 2n] Rb + Z_0^{n+2} R^2 b^2\} = R_x^4 X'' b^2 = R^2 b^2 + \frac{x}{1!} (2Rb + BR^2 b^2) + \\ &+ \frac{x^4}{4!} Z_0^{\text{VI}} R^2 b^2 + \frac{x^5}{5!} (-6Z_0^{\text{VI}} Rb + Z_0^{\text{VII}} R^2 b^2) + \frac{x^6}{6!} (12Z_0^{\text{VI}} - \\ &- 8Z_1^{\text{VII}} Rb + Z_0^{\text{VIII}} R^2 b^2) + \frac{x^7}{7!} (20Z_0^{\text{VII}} - 10Z_0^{\text{VIII}} Rb + Z_0^{\text{IX}} R^2 b^2) + \\ &+ \frac{x^8}{8!} (30Z_0^{\text{VIII}} - 12Z_0^{\text{IX}} Rb + Z^{\text{X}} R^2 b^2) + \frac{x^9}{9!} (42Z_0^{\text{IX}} - \\ &- 14Z_0^{\text{X}} Rb + Z_0^{\text{XI}} R^2 b^2) + \frac{x^{10}}{10!} (56Z_0^{\text{X}} - 16Z_0^{\text{XI}} Rb + Z_0^{\text{XII}} R^2 b^2) + \\ &+ \frac{x^{11}}{11!} (72Z_0^{\text{XI}} - 18Z_0^{\text{XII}} Rb + Z_0^{\text{XIII}} R^2 b^2) + \frac{x^{12}}{12!} (90Z_0^{\text{XII}} - \\ &- 20Z_0^{\text{XIII}} Rb + Z_0^{\text{XX}} R^2 b^2) + \frac{x^{13}}{13!} (110Z_0^{\text{XIII}} - 22Z_0^{\text{XIV}} Rb + \\ &+ Z_0^{\text{XV}} R^2 b^2) + \frac{x^{14}}{14!} (132Z_0^{\text{XIV}} - 24Z_0^{\text{XV}} Rb + Z_0^{\text{XVI}} R^2 b^2) \quad (157) \end{aligned}$$

Подставляемъ сюда $\frac{Z_0^{VI}}{6!} = 269 \cdot 10^{-7}$; $\frac{Z_0^{VI}}{5!} = 1614 \cdot 10^{-7}$;

$\frac{Z_0^{VI}}{4!} = 8070 \cdot 10^{-7}$; $\frac{Z_0^{VII}}{7!} = 599 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{VII}}{6!} = 4190 \cdot 10^{-9}$;

$\frac{Z_0^{VII}}{5!} = 25160 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{VIII}}{8!} = 172 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{VIII}}{7!} = 13,76 \cdot 10^{-9}$;

$\frac{Z_0^{VIII}}{6!} = 96,3 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{IX}}{9!} = -1,53 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{IX}}{8!} = -13,77 \cdot 10^{-9}$;

$\frac{Z_0^{IX}}{7!} = -110,2 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^X}{10!} = -0,0881 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^X}{9!} = -0,881 \cdot 10^{-9}$;

$\frac{Z_0^X}{8!} = -7,98 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{XI}}{11!} = -0,00390 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{XI}}{10!} = -0,0429 \cdot 10^{-9}$;

$\frac{Z_0^{XI}}{9!} = 0,429 \cdot 10^{-9}$; $\frac{Z_0^{XII}}{12!} = -1403 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XII}}{11!} = -16840 \cdot 10^{-16}$;

$\frac{Z_0^{XII}}{10!} = -185200 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XIII}}{13!} = -32,6 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XIII}}{12!} = -424 \cdot 10^{-16}$;

$\frac{Z_0^{XIII}}{11!} = -5090 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XIV}}{14!} = 1,14 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XIV}}{13!} = 15,96 \cdot 10^{-16}$;

$\frac{Z_0^{XIV}}{12!} = 207 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XV}}{15!} = 0245 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XV}}{14!} = 3,68 \cdot 10^{-16}$;

$\frac{Z_0^{XV}}{13!} = 51,5 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XVI}}{16!} = 0,0219 \cdot 10^{-16}$; $\frac{Z_0^{XVI}}{15!} = 0,350 \cdot 10^{-16}$;

$\frac{Z_0^{XVI}}{14!} = 5,26 \cdot 10^{-16}$.

Уравненіе (157) принимаетъ видъ:

$$R_x^4 X^{11} b^2 = C_0 + x C_1 + x^4 C_4 + x^5 C_5 + \dots + x^{14} C_{14}, \text{ гдѣ}$$

$$C_0 = R^2 b^2 = \underline{97,42}.$$

$$C_1 = (2Rb + BR^2 b^2) = (19,74 - 44,01) = -\underline{24,27}$$

$$C_4 = \frac{1Z_0^{VI}}{4} R^2 b^2 = \underline{0,07862}$$

$$C_5 = -\frac{6Z_0^{VI}}{5!} Rb + \frac{Z_0^{VII}}{5!} R^2 b^2 = -95400 \cdot 10^{-7} + 24500 \cdot 10^{-7} = \underline{0,00709}$$

$$C_6 = \frac{12}{6!} Z_0^{VI} - \frac{8}{6!} Z_0^{VII} Rb + \frac{Z_0^{VIII}}{6!} R^2 b^2 = 3228 \cdot 10^{-7} - 3310 \cdot 10^{-7} + 93,8 \cdot 10^{-7} = \underline{12000 \cdot 10^{-10}}$$

$$C_7 = 20 \frac{Z_0^{VII}}{7!} - 10 \frac{Z_0^{VIII}}{7!} Rb + \frac{Z_0^{IX}}{7!} R^2 b^2 = 119,8 \cdot 10^{-7} - 13,55 \cdot 10^{-7} - 107,4 \cdot 10^{-7} = -\underline{1200 \cdot 10^{-10}}$$

$$\begin{aligned}
C_8 &= 30 \frac{Z_0^{\text{VIII}}}{8!} - 12 \frac{Z_0^{\text{IX}}}{8!} Rb + \frac{Z_0^{\text{X}}}{8!} R^2 b^2 = 51,6 \cdot 10^{-9} + \\
&\quad + 1628 \cdot 10^{-9} - 772 \cdot 10^{-9} = \underline{9080 \cdot 10^{-10}} \\
C_9 &= 42 \frac{Z_0^{\text{IX}}}{9!} - 14 \frac{Z_0^{\text{X}}}{9!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XI}}}{9!} R^2 b^2 = -64,3 \cdot 10^{-9} + \\
&\quad + 123,4 \cdot 10^{-9} - 41,8 \cdot 10^{-9} = \underline{173 \cdot 10^{-10}} \\
C_{10} &= 56 \frac{Z_0^{\text{X}}}{10!} - 16 \frac{Z_0^{\text{XI}}}{10!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XII}}}{10!} R^2 b^2 = -4,93 \cdot 10^{-9} + \\
&\quad + 6,77 \cdot 10^{-9} - 1,80 \cdot 10^{-9} = \underline{0,4 \cdot 10^{-10}} \\
C_{11} &= 72 \frac{Z_0^{\text{XI}}}{11!} - 18 \frac{Z_0^{\text{XII}}}{11!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XIII}}}{11!} R^2 b^2 = -0,28 \cdot 10^{-9} + \\
&\quad + 0,299 \cdot 10^{-9} - 0,05 \cdot 10^{-9} = \underline{0,4 \cdot 10^{-10}} \\
C_{12} &= 90 \frac{Z_0^{\text{XII}}}{12!} - 20 \frac{Z_0^{\text{XIII}}}{12!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XIV}}}{12!} R^2 b^2 = -126300 \cdot 10^{-16} + \\
&\quad + 83800 \cdot 10^{-16} + 20200 \cdot 10^{-16} = -\underline{0,0223 \cdot 10^{-10}} \\
C_{13} &= 110 \frac{Z_0^{\text{XIII}}}{13!} - 22 \frac{Z_0^{\text{XIV}}}{13!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XV}}}{13!} R^2 b^2 = -3590 \cdot 10^{-16} - \\
&\quad - 3470 \cdot 10^{-16} + 5020 \cdot 10^{-16} = -\underline{0,00204 \cdot 10^{-10}} \\
C_{14} &= 132 \frac{Z_0^{\text{XIV}}}{14!} - 24 \frac{Z_0^{\text{XV}}}{14!} Rb + \frac{Z_0^{\text{XVI}}}{14!} R^2 b^2 = 150 \cdot 10^{-16} - \\
&\quad - 870 \cdot 10^{-16} + 512 \cdot 10^{-16} = -\underline{0,0000208 \cdot 10^{-10}}
\end{aligned}$$

Намъ остается теперь брать для x различные значения и вычислять для каждого $R_x^4 X'' b^2$ и $R_x X'' b^2$

$$x_1 = 0,301; x_1^4 = 0,008208; x_1^5 = 0,002471;$$

$$R_x = 0,282 - \frac{x_1}{35} = 0,2734; R_x^4 x^4 b^2 = 97,42 - 24,27 \cdot 0,301 +$$

$$+ 0,07862 \cdot 0,008208 - 0,00709 \cdot 0,602471 = \sim \underline{90,12}$$

$$R_x X'' b^2 = \frac{90,12}{0,2734^3} = \sim \underline{4410}$$

$$x_2 = 0,903; x_2^4 = 0,6649; x_2^5 = 0,6004; R_{x_2} = 0,2562$$

$$R_x^4 X'' b^2 = 97,42 - 21,92 + 0,05 - 0,004 = \sim \underline{75,55}$$

$$R_x X'' b^2 = \underline{4492}$$

$$x_3 = 1,505; x_3^4 = 5,131; x_3^5 = 7,722; x_3^6 = 11,62; R_{x_3} = 0,2390$$

$$R_x^4 X'' b^2 = 97,42 - 36,53 + 0,402 - 0,0548 + 0,000014 = \sim \underline{61,24}$$

$$R_x X'' b^2 = \underline{4486}$$

$$x_4 = 2,107; x_4^4 = 19,71; x_4^5 = 41,52; x_4^6 = 87,69; R_{x_4} = 0,2218$$

$$R_x X'' b^2 = 97,42 - 51,14 + 1,547 - 0,295 + 0,000105 = \approx \underline{47,53}$$

$$R_x X'' b^2 = 4356.$$

$$x_6 = 3,311; x_6^4 = 120,2; x_6^5 = 397,9; x_6^6 = 1318; x_6^7 = 4362;$$

$$x_6^8 = 14440; x_6^9 = 47820; R_{x_6} = 0,1874$$

$$R_x X'' b^2 = 97,42 - 80,36 + 9,43 - 2,82 + 0,00158 - 0,00052 +$$

$$+ 0,0131 + 0,000828 = \approx \underline{23,68}$$

$$R_x X'' b^2 = \approx \underline{3598}$$

$$x_8 = 4,515; x_8^4 = 415,2; x_8^5 = 1876; x_8^6 = 8471; x_8^7 = 38250;$$

$$x_8^8 = 172700; x_8^9 = 779700;$$

$$x_8^{10} = 3520000; x_8^{11} = 15900000; x_8^{12} = 71790000; R_{x_8} = 0,1530$$

$$R_x X'' b^2 = 97,42 - 109,58 + 32,67 - 13,28 + 0,01015 - 0,00458 +$$

$$+ 0,157 + 0,000135 + 0,000143 - 0,000636 - 0,00016 = \approx \underline{7,40};$$

$$R_x X'' b^2 = \approx \underline{2066}$$

$$x_{11} = 6,02; x_{11}^4 = 1313; x_{11}^5 = 7907; x_{11}^6 = 476000; x_{11}^7 =$$

$$= 0,00002866 \cdot 10^{10}; x_{11}^8 = 0,0001725 \cdot 10^{10}; x_{11}^9 = 0,001038 \cdot 10^{10};$$

$$x_{11}^{10} = 0,006252 \cdot 10^{10}; x_{11}^{11} = 0,03764 \cdot 10^{10}; x_{11}^{12} = 0,2266 \cdot 10^{10};$$

$$x_{11}^{13} = 1,364 \cdot 10^{10}; x_{11}^{14} = 8,211 \cdot 10^{10}; R_x X'' b^2 = 97,42 - 146,1 +$$

$$+ 103,2 - 56,0 + 0,056 - 0,0355 + 1,57 + 0,179 + 0,0025 -$$

$$- 0,015 - 0,005 - 0,0028 - 0,0017 = \approx 202,4 - 202,2 = 0,2$$

$$X'' \text{ при } x_{11} = 6,02 \text{ сан.}$$

должно обращаться въ нуль согласно условіямъ закрѣпленія.
Слѣдовательно и

$$[R_x X'' b^2] = 0.$$

$x=6,02$

Мы видимъ, что это условіе выполняется въ предѣлахъ точности вычисленія ($0,1^0/0$). Этотъ результатъ до нѣкоторой степени служитъ провѣркой, составленія уравненія (157) и вычисленія его коэффиціентовъ. Изъ вычисленія значеній $R_x X'' b^2$ видно, что эта величина, а слѣдовательно и $R_x X''$ имѣеть одинъ максимумъ въ предѣлахъ отъ $x=0$ до $x=6,02$ и что этотъ максимумъ надо искать между $x_2 = 0,903$ сант. и $x_3 = 1,505$ сант. Возьмемъ $x = \underline{1,17}$;

$$R_{x=1,17} = 0,2486.$$

$$R_x^4 X'' b^2 = 97,42 - 28,396 + 0,147 - 0,016 = \approx 69,155$$

$$R_x b^2 X'' = \approx \underline{4501}$$

$$x = \underline{1,18}$$

$$R_{x=1,18} = 0,2482.$$

$$R_x^4 X'' b^2 = 97,42 - 28,64 + 0,152 - 0,016 = \approx 97,572$$

$$R_x X'' b^2 = \approx \underline{4508}$$

$$x = 1,19$$

$$R_{x=1,19} = 0,2478$$

$$R_x^4 X'' b^2 = 97,42 - 28,881 + 0,157 - 0,017 = \approx 28,898$$

$$R_x X'' b^2 = \approx \underline{4503}.$$

Итакъ, мы наибольшее значеніе $R_x X'' b^2 = 4508$ получаемъ при $x = 1,118$ сант. Это разсужденіе мы считаемъ вѣрнымъ и близкимъ къ тому, которое имѣетъ мѣсто въ иглѣ (сравнить съ полученнымъ на стр. 138 и 146)

$$\left[R_x X'' \right]_{\max} = \frac{4508}{35^2} = 3,679 = ni$$

Отсюда

$$n = \frac{3,679}{0,00357} = 1030; \quad A = \frac{1}{n} = 0,0009704$$

и наконецъ амплитуда

$$X_n A = 238 \cdot 0,0009705 = 0,2309 \text{ сант. въ концѣ иглы.}$$

§ 42. О методахъ Ritz'a и Тамарина.

Этими методами мы не воспользовались.

Укажемъ мѣсто, гдѣ мы остановились на методѣ Ritz'a ¹⁾

Переписываемъ уравненіе:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\left(R - \frac{R-r}{H} x \right)^4 \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right] = \lambda_i \left(R - \frac{R-r}{H} x \right)^2 X_i. \quad (124)$$

¹⁾ Walter Ritz. Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser variationsprobleme der matematischen Physik. Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. Band 135, Berlin 1908.

Составляемъ интегралъ:

$$\int_0^H \left[\left(R - \frac{R-r}{H} x \right)^4 \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 - \lambda_i \left(R - \frac{R-r}{H} x \right)^2 X_i^2 \right] dx \dots (158)$$

Условія закрѣпленія даютъ намъ право написать интегралъ въ видѣ

$$X_i = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) x^3 (H-x)^4 \dots (159)$$

Дѣйствительно легко видѣть, что здѣсь всѣ условія закрѣпленія:

$$(X_i)_{x=0} = \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)_{x=0} = \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)_{x=H} = \left(\frac{d^3 X_i}{dx^3} \right)_{x=H} = 0$$

удовлетворяются. Мы остановились на составленіи изъ (159) необходимыхъ для (158) выраженій

$$X_i^2; \quad \frac{dX_i}{dx}; \quad \frac{d^2 X_i}{dx^2},$$

которыя оказались чрезвычайно сложными.

Тамаркинъ ¹⁾ исходитъ изъ того же уравненія (124), которое встрѣчается у Крылова, Стеклова и Ritz'a. Это уравненіе, войди въ правую его часть R_x^4 , а не R_x^2 , привело бы насъ къ интегрированію линейнаго уравненія съ постоянными коэффициентами и интегралъ получился бы въ конечной формѣ. Но въ томъ видѣ, въ какомъ оно есть, уравненіе (124) въ конечномъ видѣ не интегрируется. Остановились мы передъ тѣмъ, что искомымъ четыремъ частнымъ интеграламъ (124) Тамаркинъ въ самомъ началѣ даетъ обозначенія v_1, v_2, v_3 и v_4 , изъ нихъ исходитъ, но къ нимъ, повидимому, не возвращается. Наше впечатлѣніе было, что за методомъ Я. Д. Тамаркина слѣдуетъ признать чисто математическій интересъ и не ожидать отъ него пока практическихъ приложений, которыя одни только и занимаютъ насъ.

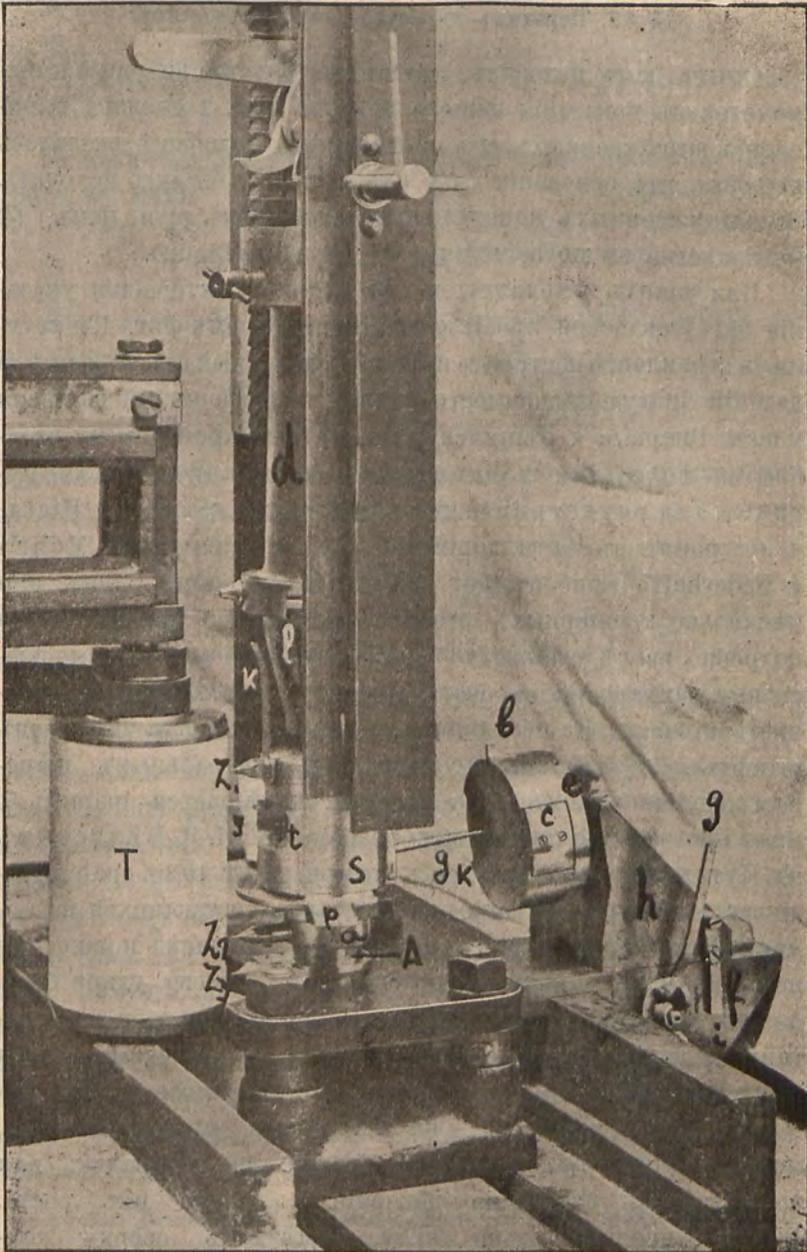
¹⁾ J. D. Tamarkine, Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques. Décembre 1909. „Сообщеніе Харьковскаго Математическаго Общества“.

§ 43. Переходъ къ неупругому динамометру.

Опытъ намъ показалъ, что вмѣшательство вибрацій динамометра въ показанія нашего прибора фиг. 1 сложно, вычисленіе вынужденныхъ его продольныхъ колебаній оказалось неимѣющимъ основанія $f(t)$, изъ котораго бы имъ исходить. Въ вынужденныхъ поперечныхъ колебаніяхъ иглы намъ $f(t)$ не извѣстно ни по величинѣ, ни по направленію.

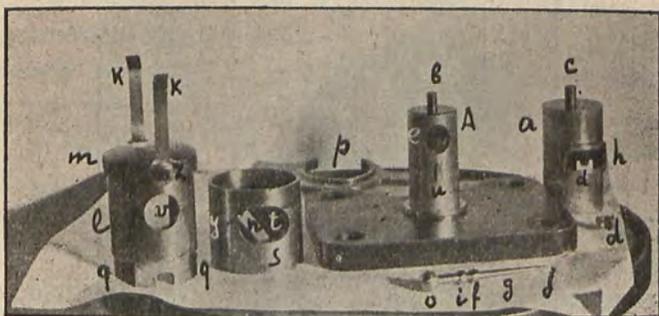
При такихъ условіяхъ, несмотря на практическія указанія (§ 11) заводской пробы даваемая приборомъ фиг. 1, я уступилъ стремленію построить приборъ, свободный отъ вибрацій и дающій чистую зависимость усилій отъ деформаций во время удара. Впервые я рѣшился пользоваться крешерными столбиками во время хода ихъ обжатія, какъ динамометрами для регистраціи измѣняющихся давленій. Итакъ, я построилъ въ Артиллерійской академіи при копрѣ Mohr'a & Federhaff'a приборъ фиг. 38—41, въ которомъ одинъ, или нѣсколько крешерныхъ столбиковъ, хорошо извѣстныхъ и подробно изслѣдованныхъ ¹⁾, съ ничтожной массой и не способные замѣтно вибрировать, служатъ динамометрами. Опишемъ приборъ. На неподвижномъ основаніи копра укрѣпленъ штифтъ z_3 и задѣланъ столбикъ A съ центральнымъ шаровымъ подшипникомъ e , въ который помѣщается шарикъ o иглы превосходно термически обработанной Н. И. Бѣляевымъ на Путиловскомъ заводѣ, такъ что при длинѣ 10 ст. она выдерживаетъ всѣ интересующіе насъ удары безъ остающихся деформаций. Когда я передъ тѣмъ ее дѣлалъ изъ лучшихъ и наиболѣе подходящихъ покупныхъ сортовъ стали, одного удара было достаточно, чтобы сломать иглу. Поршень снизу, а за нимъ гайка и контргайка удерживаютъ иглу безъ качки и зажатія въ гнѣздѣ e . На столбикъ A точно устанавливается при помощи звѣзды b фиг. 42, или резинового кружка a одинъ, или три крешерныхъ столбика b (фиг. 39) центрально для воспріятія и измѣренія давленій во время ихъ роста. Вынувъ предварительно иглу, надѣваемъ сверху кол-

¹⁾ Sarrau & Vielle Ibidem, стр. 387.



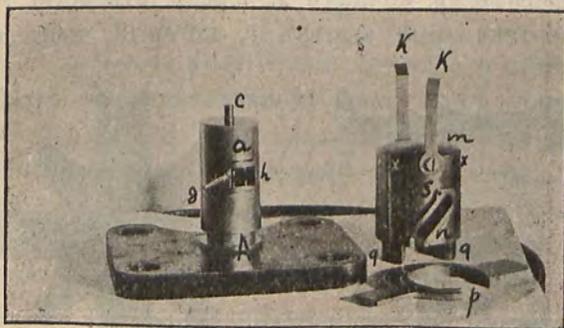
Фиг. 38. *Специальный станок для обработки*

пакъ *a*, направляемый шпонкою *и*. Центромъ своего дна онъ ложится на крешерные столбики. Въ горизонтальной прорѣзи *h* помѣщаются обѣ половины *d* и *d* второго подшипника и между ними захватывается шарикъ *i* иглы. Эти части въ



Фиг. 39.

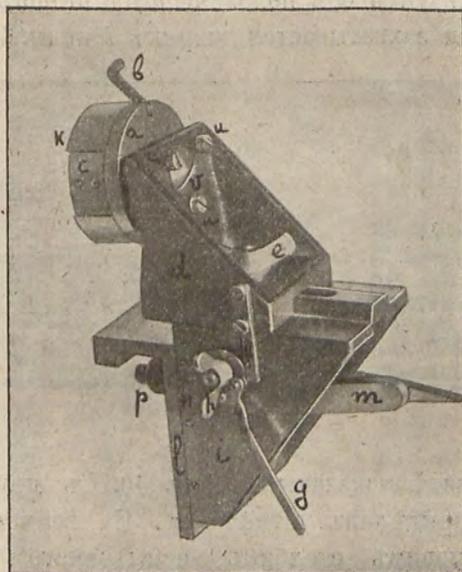
собранномъ видѣ показаны на фиг. 40. Съ другой стороны колпака *a* придѣланъ штифтѣтъ z_2 . На верхнее дно колпака *a* становимъ столбикъ испытываемаго матеріала *с*, или кольцо *a* (фиг. 19 и 20) одного діаметра съ колпакомъ *a* (фиг. 39). Въ кольцо по діаметру мы вставляемъ



Фиг. 40.

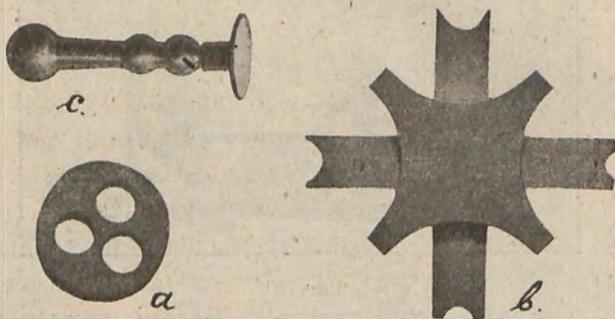
испытываемый на изгибъ образецъ *с* и сверху помѣщаемъ ножъ *b*. Кольцо и ножъ подвергнуты Н. И. Бѣляевымъ на Путиловскомъ заводѣ термической обработкѣ, отъ которой они выносятся безъ замѣтныхъ измѣненій множество ударовъ. Ножъ приходится въ точности посрединѣ между опорами и

всегда направленъ перпендикулярно образцу. Поверхъ его, или поверхъ образца *c* (фиг. 39) до прикосновенія съ нимъ



Фиг. 41.

сверху надѣваемъ колпакъ *l*, черезъ отверстіе *r* котораго виденъ вертикальный вырѣзь *v*, который, какъ направля-



Фиг. 42.

ющая, охватываетъ рамку прорѣзи *h* колпака *a*. На колпакъ *l* надѣвается снизу кольцо *s* съ винтовой прорѣзью *n*, охватывающею шарикъ *f* иглы. Верхняя часть кольца снабжена

круговымъ ноніусомъ противъ дѣлений *m*. Полугайка *p* снизу сцѣпляется съ рѣзбой *q* колпака *l* и намертво прижимаетъ кольцо *s*, когда оно при помощи ручки *y* установлено на желаемое дѣленіе ноніуса. Вырѣзъ гайки *p* пропускаетъ иглу *g* при сборкѣ. Въ части *m* въ колпакѣ *l* сдѣланы достаточные проходы для воздуха.

Спереди штифтъ z_1 можетъ при надобности наносить записи на барабанѣ Morin'a, одновременно со штифтами z_2 и z_3 , а крючки *k* приподнимаютъ колпакъ при взлетѣ бабы послѣ удара. Къ бабѣ я пристроилъ Amsler'овскій зацѣпъ и крамальеру, чтобъ баба вторично не упала послѣ взлета.

Верхняя сферическая поверхность колпака *l* въ возможно большой мѣрѣ обезпечиваетъ вертикальное осевое направленіе удара падающей бабы съ плоскимъ нижнимъ срѣзomъ. Столбики, вставляемые центрально черезъ отверстія *t* и *r*, передаютъ далѣе давленіе центрально внизъ, направляющія обезпечиваютъ правильныя движенія колпаковъ.

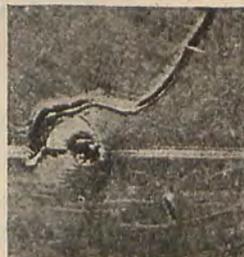
Игла своимъ жаломъ *j* чертитъ на листовомъ свинцѣ, прикатанномъ къ чашѣ *k* (фиг. 41) и прижатомъ щечками *c* съ винтами. Подъ каждой щечкой имѣется пружинка-антагонистъ.

Затворъ Treuille de Beaulieu и щеколда *b* прижимаютъ чашу къ кругу *a*, установленному такъ, чтобъ игла равномерно могла чертить по всей чашѣ. Для этого имѣется одинъ притягивающій винтъ *v* съ шаровой скрытой частью головки и три опорныхъ винта *u*. Все они изолированы фиброю на случай электрическаго хронографирования (стр. 8). Надлежащій нажимъ всей части объ иглу устанавливается эксцентрикомъ *g*, о который ударяется палецъ *f* при надвиганіи сюрпорта *d*. Чтобъ эксцентрикъ не смѣщался, зажимаемъ барашекъ *h* разъ на серію опытовъ. Передъ каждымъ опытомъ мы зажимаемъ барашекъ *l*. Сюрпорту *i* даны и вертикальныя движенія помощью рукояти *m*. Около *n* установленъ ноніусъ и дѣленія на *l* для точной вертикальной установки. Винтомъ *p* весь сюрпортъ прикрѣпляется наглухо къ фундаментной коробкѣ.

Ударныя пробы на приборѣ фиг. 38 не оправдали надеждъ на него возлагавшихся. На фиг. 43 и 44 показаны діаграммы обжатія образцовъ мѣди и желѣза ударомъ бабы въ 10 klg, брошенной съ высоты 250 и 85 сант. соответственно ¹⁾). Ударная проба на изгибъ, полученная на приборѣ фиг. 38 при участіи аппарата фиг. 19, дала діаграмму, фиг. 45. Зигзаги на ней ясно доказали присутствіе вибрацій. Тогда вмѣсто кольца *S* фиг. 39 и 40 я изготовилъ другое, не показанное



Фиг. 43.



Фиг. 44.

на чертежѣ. У него нижняя губа косою прорѣзи *u* срѣзана. Взявъ два столбика одной и той же твердой стали, я сбросилъ на нихъ бабу съ 85 сант. На первый столбикъ я ее сбросилъ при кольцѣ *S*, показанномъ на фиг. 39 и 40, а на второй столбикъ при кольцѣ *S* со срѣзанной нижней направляющей. Получились двѣ діаграммы вторая



Фиг. 45.

изъ нихъ доказала присутствіе сильныхъ вибрацій, сдерживавшихся массою частей $l + s + p$, пока шарикъ *f* ограничивался снизу въ своихъ движеніяхъ. Первая діаграмма къ сожалѣнію пропала. Она проходила какъ разъ по срединѣ частыхъ волнъ фиг. 46. Вибраціи я приписывалъ иглѣ и рѣшился ее укоротить до нельзя: срѣзалъ ее тотчасъ за ша-

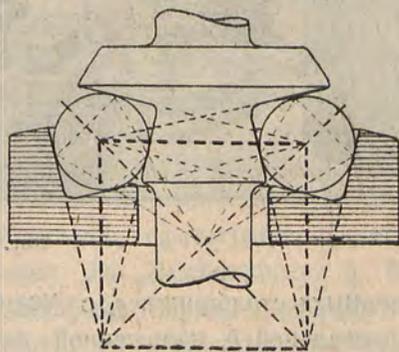
¹⁾ Отдѣльный кернъ на фиг. 44 значенія не имѣеть.

риками, надѣлъ металлическое зеркало (см. с фиг. 42), направилъ на зеркало пучекъ лучей, которые, отразившись, фокусомъ своимъ были направлены на фотографическую пластинку. Я ожидалъ успѣха, потому что укороченная такимъ образомъ игла должна значительно менѣе вибрировать, а ея записи возрасти 1) отъ удвоенія углового перемѣщенія и 2) отъ того, что отраженный пучекъ лучей въ нѣсколько разъ длиннѣе первоначальной иглы. Диаграммы обнаружили, что вибраціи происходятъ и въ другихъ частяхъ прибора, обнаружили и грубую, небрежную работу копра Mohr'a & Federhaff'a. Стараясь обнаружить недостатки лишь своего прибора, я пустилъ въ ходъ штифты z_1, z_2, z_3 , приспособилъ къ копру барабанъ Morin'a и при паденіи бабы съ 250 сантим. нашель, что въ моемъ приборѣ колебанія $l+s+p$ съ штифтомъ z_1 достигаютъ амплитуды въ ± 4 m/m, колебанія колпака a со штифтомъ z_2 достигаютъ амплитуды въ $\pm 1,2$ m/m и только столбикъ A , основаніе и штифтъ z_3 остаются неподвижными передъ барабаномъ Morin'a ¹⁾. Мнѣ пришлось отъ своего прибора отказаться.



Фиг. 46.

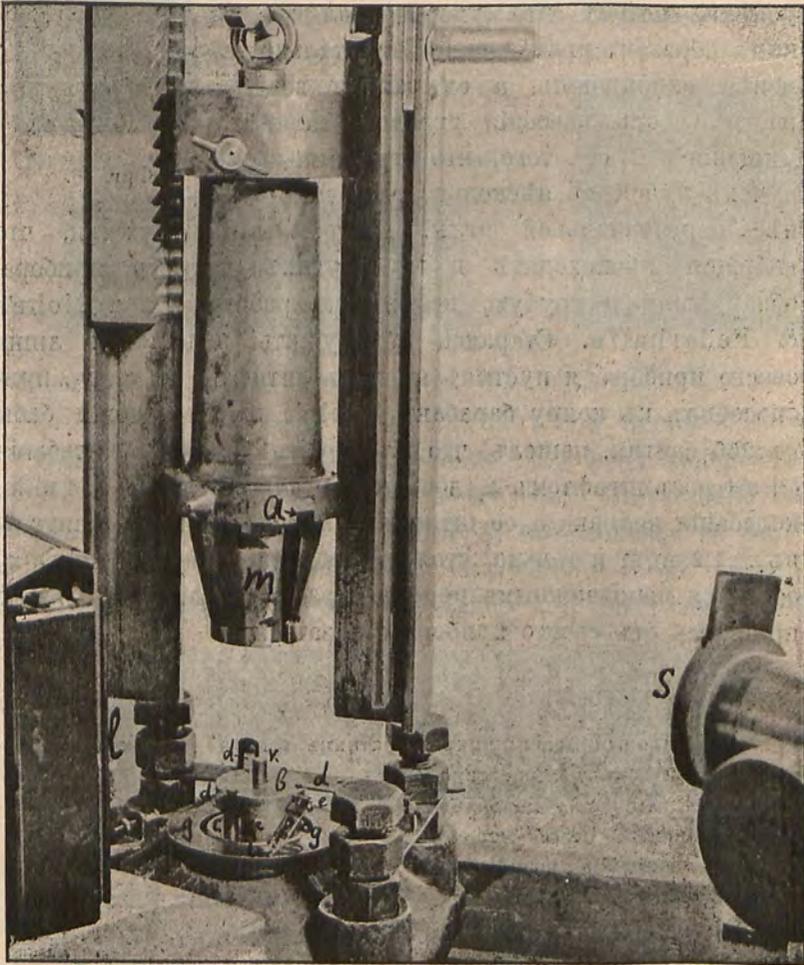
¹⁾ Шариковый подшипникъ-подпятникъ (фиг. 47), на которомъ барабанъ виситъ, такъ спроектированъ, что коническія поверхности шарикового пути чашекъ имѣютъ максимумъ возможнаго приближенія къ плоскости и цилиндру при условіи совершеннаго катанія безъ скольженія. Построеніе: на діаметръ чашекъ строимъ квадратъ и изъ его угловъ проводимъ касательныя къ шарикамъ (Pr. A. Gagarine. Roulements à billes. Génie civil, Paris 1899. Tome 35, № 23, page 320).



Фиг. 47.

§ 44. Последній типъ прибора:

Я перешелъ къ крайнимъ попыткамъ, чтобы настолько упростить приборъ, чтобы въ немъ ничего не осталось, что могло бы дрожать. Образецъ *k* (фиг. 48) отдѣленъ отъ кре-



Фиг. 48.

пешныхъ столбиновъ *e*, служащихъ динамометрами, каленой наковальней *b*, положенной на *e*. Направляющія для *b* сведены къ плоскимъ пружинамъ *d*, не позволяющимъ *b*

вылетать вбокъ. Изъ нихъ лѣвую видно лучше всего съ прикрѣпленнымъ винтомъ и натягивающей гайкой. Въ бабѣ *m* я сдѣлалъ прорѣзь, бока прорѣзи зачернилъ, а наверху вставилъ вогнутое сферическое металлическое зеркало *a*. Въ наковальнѣ *b* я по радиусу высверлилъ и нарѣзалъ дирку, ввинтилъ въ нее ось *e*, на которую надѣлъ пластинку *f* съ раздвоеннымъ хвостомъ внизу. Къ основанію копра привинчено кольцо *g* и въ немъ винтикъ *i* заставляетъ своею головкою хвостъ *f* быть въ постоянномъ прикосновеніи къ кольцу *g*. Надъ самою осью *e* къ пластинкѣ *f* въ пазахъ фацетами прихваченъ кусочекъ зеркальнаго стекла высеребранный сверху для того, чтобъ дать лишь одно изображеніе. Поверхъ наклеенъ кусочекъ черной бумаги съ отверстиемъ въ 1 кв. мм.

Записи производились слѣдующимъ образомъ: пучокъ лучей отъ лампы М. И. Семенова *s* падаетъ на сферическое зеркало *a*, отражается внизъ и падаетъ на плоское зеркальце *f* и отъ него зайчикъ попадаетъ на чувствительную пластинку, вставленную въ фотографическій аппаратъ *l*. Сферическое зеркало улавливаетъ лучи въ самый моментъ прикосновенія бабы къ испытуемому образцу. На фиг. 49 видно, какъ во время паденія бабы и деформации образца *k*, фокусъ постепенно перемѣщается изъ 1 въ 3 на чувствительной пластинкѣ *l*. Въ то же время сжатіе крешерныхъ столбиковъ *c* вызываетъ наклонъ плоскаго зеркальца *f* и такимъ образомъ увеличеніе усилій сопровождается подъемомъ зайчика на пластинкѣ *l*.

На фиг. 50 въ натуральную величину мы видимъ діаграмму сжимающаго удара по образцу стали, полученную на приборѣ фиг. 49. На этой діаграммѣ предѣлъ упругости рѣзко обозначенъ и, на наше счастье, періоды чрезвычайно быстрыхъ колебаній наковальни *b*, происходившихъ въ плоскости, перпендикулярной фотографической пластинкѣ, сфотографировались ввидѣ перловъ по всей траекторіи. Въ „Замѣчаніяхъ“ А. Н. Крылова „о крешерахъ и индикаторахъ“ первая діаграмма на приложенной таблицѣ доказываетъ, что свободныя колебанія не искажаютъ діаграмму, когда они чрезвычайно мелки. Но



если при этомъ направление ихъ колебаній перпендикулярно плоскости діаграммы, то они вовсе перестаютъ эту діаграмму искажать, а между тѣмъ полученные такимъ образомъ перлы вводятъ элементъ времени и даютъ намъ мѣру измѣненій скорости вычерчивания діаграммы.

Наэтомъ пока прервалась наша работа.

Приведеніе этого лабораторнаго изслѣдованія къ заводской пробѣ потребуетъ еще работы: надо будетъ пользоваться очень хорошимъ копромъ (въ копрѣ Mohr & Federhaff'a Артиллерійской Академіи разстояніе между параллелями колеблется въ предѣлахъ $2^{1/2}$ m/m), надо будетъ несовершенныя направляющія пружины *d* усовершенствовать, не увеличивая ихъ массы, и достичь того, чтобъ при каждой пробѣ испытуемый образецъ сжимался безъ перекося, и чтобы всѣ три крешерныхъ столбика сжимались поровну. (Это имѣло мѣсто лишь иногда, какъ частный случай и тогда только получалась діаграммы фиг. 50). Наконецъ необходимо опредѣлить періодъ колебаній наковальни *b* и установить координатную сѣтку для того, чтобъ одною діаграммою быть въ состояніи связать дѣйствительныя времена,

Фиг. 49.

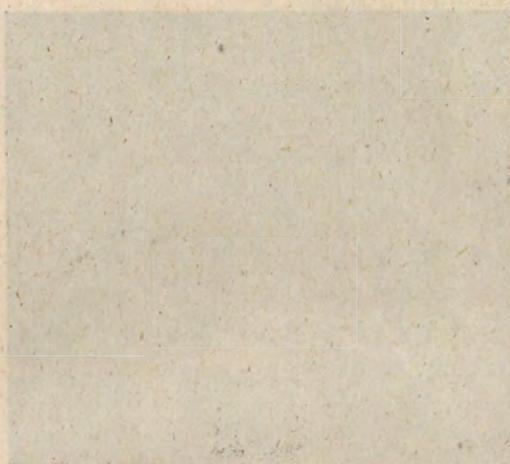
усилія и деформаціи для всѣхъ фазъ явленія, начиная съ
перваго прикосновенія и кончая взлетомъ бабы.



Фиг. 50.

Намъ кажется, что мы не только находимся теперь на
правильномъ пути, но и близки къ окончательному разрѣ-
шенію задачи постройки прибора для изслѣдованія удара
при нѣкоторыхъ скоростяхъ.

до кінця літньої сесії всіх членів комісії і доповідати їй про виконання своїх обов'язків.



1917

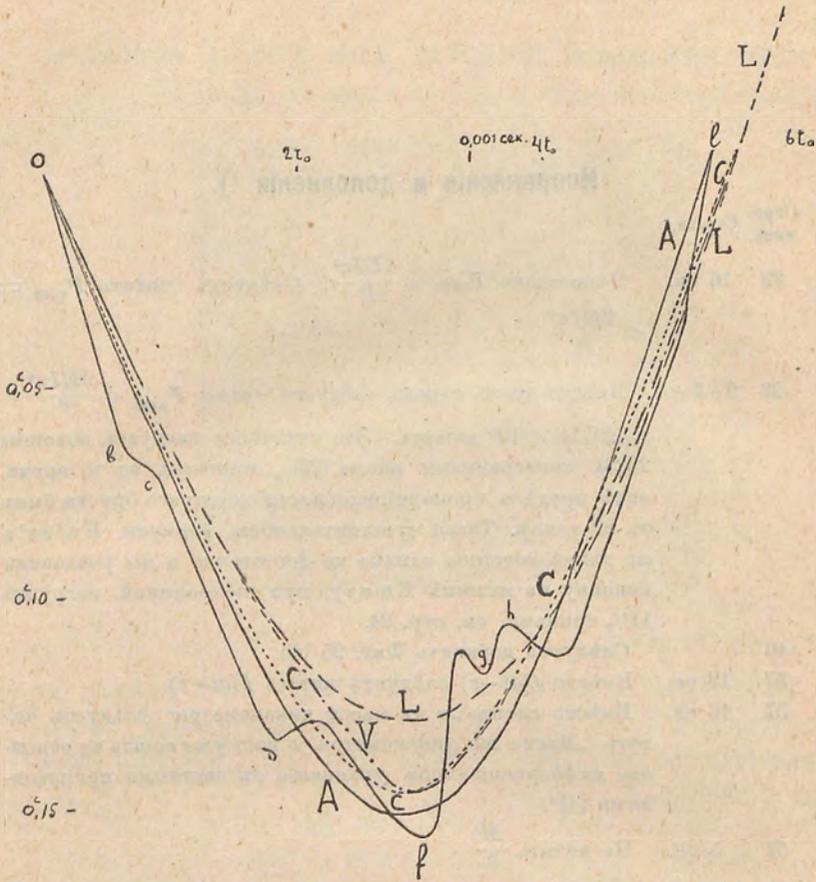
Відомості про діяльність комісії за період з 1-го січня по 31-е грудня 1917 року. Комісія виконала свої обов'язки згідно з указом Президента Республіки від 1-го січня 1917 року.

Исправленія и дополненія ¹⁾.

Страница. Строка.

- 23 16 св. Напечатано $P_{\text{крит.}} = \frac{4EI\pi^2}{l^2}$. Слѣдуетъ читать $P_{\text{крит.}} = \frac{2EI\pi^2}{l^2}$
- 23 2—7 св. Вмѣсто этихъ строкъ слѣдуетъ читать $P_{\text{крит.}} = \frac{2EI\pi^4}{l^2} = 23714 \times 10^6$ динамъ. Это отвѣчаетъ нагрузкѣ колонны 23284 килограммами массы (23¹/₄ тоннами), въ то время, какъ предѣлъ пропорціональности короткаго бруска былъ въ 29 тоннъ. Такая чувствительность формулы Euler'а къ длинѣ колонны однако не достаточна и мы раздавили колонну на машинѣ Емеру при половинной нагрузкѣ 11¹/₂ тоннами, см. стр. 24.
- 46 Слѣдуетъ добавить Фиг. 25 bis.
- 57 12 св. Вмѣсто $f(at-r)$ слѣдуетъ читать $f(at-z)$.
- 57 12 св. Вмѣсто словъ: „и на массу динамометра“ слѣдуетъ читать: „Масса же динамометра у насъ уже вошла въ основное дифференціальное уравненіе съ частными производными (4)“.
- 57 5 св. Не читать $\frac{M'}{3}$
- 58 5 и 8 св. „ „ „
- 58 8 св. Вмѣсто 0,319583 читать 0,35768939.
- 58 10 св. Вмѣсто + читать — между обоими членами правой части ур-нія.
- 58 7 св. Вмѣсто „воспользуется“ читать „воспользуемся“.
- 58 5 св. Вмѣсто $[f'(at-0)]$ читать $[-f'(at-0)]$
- 58 4 св. Читать: или $f''(at) - \frac{1}{ml} f'(at) = f''(at-2l) + \frac{1}{ml} f'(at-2l) \dots (9)$
- 59 2 св. Добавить: $w = 0$ для всѣхъ точекъ, $\frac{dw}{dt} = 0$ для всѣхъ то-

¹⁾ Къ статьѣ «Приборы, дающіе зависимость между усиліями и деформациями во время удара».



Фиг. 25 bis.

a, b, c...l ————— действительная траектория бабы на барабанѣ Morin.

A ————— ея основной тонъ.

Траектория свободного колебания динамометра, вычисленная

V — — — по приближительному способу St.-Venant.

L — — — — — по точному способу Love.

C по точному способу Fourier.

Страница. Строка.

чекъ, кромѣ наковальни, для которой $\left(\frac{dw}{dt}\right)_{z=0} = V$.

59 8 стр. Вместо $\frac{v}{a}$ читать $\frac{V}{a}$.

Страница. Строка.

59 1 стр. Вместо $\int \frac{\xi}{ml} \left[-\frac{V}{ml} \right]$ читать $\int_0^{\xi} \frac{\xi}{l^{ml}} \left[-\frac{V}{a} \right]$

60 3 св. Вместо \int читать \int_0^{ξ}

61 7 и 8 св. Вместо словъ: „расходящимися ... аналитически“ читать: „передвинули эти же кривыя вправо на время, отвечающее $2l$, получая такимъ образомъ второй членъ (6) при $z=0$. Вычтя ординаты $f(\xi-2l)$ изъ ординатъ $f(\xi)$, мы начертили на Фиг. 25 bis кривую L , по амплитудѣ болѣе другихъ отстающую отъ основного тона действительной траекторіи бабы A . Амплитуда L равна 0,132 сант. вмѣсто 0,154 сант., періодъ 0,00326 секунды.

67 2 св. Вместо 0,319585 читать 0,357689.

67 5-14 св. Вместо этихъ строкъ читать:

$\theta_1 = 0,564274 = 32^\circ 19' 50''$	$\theta_1^2 = 0,31841$	$\frac{1}{\theta_1} = 1,7722$
$\theta_2 = 3,251175 = 186^\circ 16' 43''$	$\theta_2^2 = 10,57017$	$\frac{1}{\theta_2} = 0,3076$
$\theta_3 = 6,339547 = 363^\circ 13' 45''$	$\theta_3^2 = 40,18989$	$\frac{1}{\theta_3} = 0,1577$
$\theta_4 = 9,462566 = 542^\circ 9' 54''$	$\theta_4^2 = 89,54023$	$\frac{1}{\theta_4} = 0,1057$
$\theta_5 = 12,594762 = 721^\circ 37' 36''$	$\theta_5^2 = 158,6290$	$\frac{1}{\theta_5} = 0,0794$

$\sin \theta_1 = 0,53483$	$\sin 2\theta_1 = 0,90380$
$\sin \theta_2 = -0,10936$	$\sin 2\theta_2 = 0,21742$
$\sin \theta_3 = 0,05633$	$\sin 2\theta_3 = 0,11248$
$\sin \theta_4 = -0,03778$	$\sin 2\theta_4 = 0,07550$
$\sin \theta_5 = 0,02839$	$\sin 2\theta_5 = 0,05675$

70 6 св. Вместо 0,5367 читать 0,564274

” 8 ” ” 0,2493987 ” 0,24942

” 11 ” ” 0,0006013 ” 0,00058

71 1 и 2 св. Читать $B_1 = 0,27772$; $B_2 = -0,0005174$; $B_3 = 0,0000368$

” ” ” $B_4 = -0,00000746$; $B_5 = 0,00000238$

72 9 и 10 св. $0,003248$ | $0,0005638$ | $0,0002891$ | $0,0001937$ | $0,0001455$
 $0,14853$ | $0,00005658$ | $0,00000207$ | $0,00000028$ | $0,000000068$

87 2 св. Вместо 0,1561 и 0,003415 читать 0,14853 и 0,003248.

Страница. Строка.

- 74—92 Въ §§ 19—23 вместо $\frac{1}{m} = 0,319585$ слѣдуетъ полагать $\frac{1}{m} = 0,357689$. Въ виду того, что это мало видоизмѣняетъ кривыя *D* Фиг. 26 и ξ Фиг. 28 мы этой замѣны не дѣлаемъ.
- 112 Нижнюю часть Фиг. 30 сдвинуть влѣво, чтобы нижній 0 пришелся противъ верхняго 0.
- 162 3 и 4 св. Не читать.

1912 г.

Князь А. Гагаринъ.

