

Министерство образования и науки Российской Федерации
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.А.МАРТЫНОВ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ
2004

УДК 534 (075.8)

Мартынов Б.А. Теория колебаний. Приближенные методы анализа нелинейных систем: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 60 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория колебаний» учебного плана специальности 071500 (код ОКСО 210301) «Радиофизика и электроника» (направление подготовки дипломированных специалистов 654200 «Радиотехника»). Посвящено некоторым часто употребляемым при решении радиофизических задач приближенным методам анализа квазилинейных систем: методу гармонического баланса, методу малого параметра, методу Ван дер Поля, методу медленно меняющихся амплитуд, а также методу Крылова – Боголюбова – Митропольского. Приведены достаточно простые примеры применения упомянутых методов, позволяющие познакомиться со многими специфическими явлениями, которые могут наблюдаться в нелинейных колебательных (в том числе автоколебательных) системах.

Предназначено студентам специальности 071500 «Радиофизика и электроника» радиофизического факультета и может быть полезно студентам специальности 201700 «Радиотехника» при изучении специальной дисциплины «Электромагнитные колебания в нелинейных системах».

Ил. 19. Библиогр.: 26 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2004

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с общим определением нелинейной динамической системы [2, 5, 11, 15, 19] величины, используемые для задания ее состояния и называемые обычно динамическими переменными, удовлетворяют соотношениям, сводящимся к дифференциальным уравнениям, из которых по меньшей мере одно уравнение должно быть нелинейным. Для подобных совокупностей дифференциальных уравнений, как правило, не удастся получить точную аналитическую форму решения. Поэтому приходится прибегать к различным приближенным подходам. Ниже рассмотрены приближенные методы, наиболее часто употребляемые анализа квазилинейных (т. е. «слабо» нелинейных) систем, а именно: метод гармонического баланса, метод малого параметра (метод Пуанкаре), метод Ван дер Поля и метод медленно меняющихся амплитуд. Кроме того, материал, включенный в приложение VII, дает возможность составить представление о методе Крылова – Боголюбова – Митропольского. Приложения I – VI посвящены вопросам, которые носят вспомогательный характер и могут быть без ущерба для изложения вынесены за пределы основной части пособия. За рамками данного учебного пособия остались известные методы Ритца и Галеркина [8], разработанный Курокавой модифицированный метод комплексных амплитуд [13, 18], предложенный Вайнштейном и Вакманом метод разделения частот [6], в основе которого лежит использование понятия аналитического сигнала, а также метод Евтянова [7] и некоторые другие.

Приводимое в последующем рассмотрение опирается на представление динамических переменных суммами так называемых базисных функций, соответствующих различным типам колебаний. Поясним идею такого представления в случае линейной электрической цепи с постоянными параметрами, которая подвергается воздействию ЭДС e , периодически изменяющейся во времени: $e(t) = e(t + T_e)$, где T_e – период. Представив эту цепь структурной схемой, изображенной на рис.1, предположим, что внутри линейного двухполюсника L , содержатся элементы, обуславливающие потери энергии, но отсутствуют источники колебаний. Тогда нетрудно прийти к выводу, что в установившемся режиме, т. е. при $t \rightarrow +\infty$, все токи и напряжения в цепи выражаются функциями периода T_e . Имея в виду разложение какой-нибудь из этих функций в ряд Фурье по гармоникам частоты $\omega_e = 2\pi/T_e$, можно под типом колебаний (*колебательной модой*) понимать ту или иную гармоническую составляющую, либо, если это почему-то удобно, некоторое сочетание гармонических компонент.

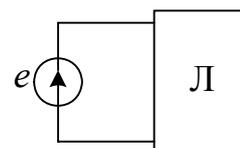


Рис.1

При воздействиях на линейную систему, выражаемых почти периодическими функциями времени, колебательные моды также могут вводиться в употребление на основе рассмотрения спектральных разложений токов и напряжений. Для линейной системы с постоянными параметрами нахождение амплитуд и фаз любых гармонических составляющих не вызывает принципиальных затруднений, поскольку согласно известному принципу суперпозиции (принципу наложения) для них могут быть получены отдельные соотношения.

Представление динамических переменных через базисные функции, именуемое далее *модовым описанием*, часто применяется и в случае нелинейной системы, находящейся в режиме периодических или почти периодических колебаний. Принцип суперпозиции при этом использоваться не может, что существенно усложняет задачу, в решении которой возможны некоторые особенности, характерные для нелинейных систем. Так, например, из-за нелинейности системы, как правило, возникают гармонические компоненты динамических переменных с новыми (отсутствующими в исходном воздействии) частотами, причем значения многих из упомянутых новых частот могут оказаться неизвестными заранее. В отличие от линейной системы с постоянными параметрами в случае нелинейных систем по большей части приходится иметь дело с соотношениями, в которые входят искомые величины, относящиеся не только к какой-либо одной моде. Следует, кроме того, учесть, что в нелинейных системах, принадлежащих к классу автоколебательных [11, 14, 18], колебательный режим устанавливается и в отсутствие внешних воздействий, изменяющихся во времени.

Модовое описание вводится также применительно к анализу нестационарных режимов, т. е. режимов отличных от установившихся. При этом базисные функции имеют более сложный вид, чем в случае стационарных режимов. Использование модового описания может оказаться целесообразным, в частности, при рассмотрении переходных процессов в нелинейных системах, близких к линейным и консервативным.

1. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

1.1. Идея метода гармонического баланса

Один из вариантов модового описания установившихся колебаний в нелинейной динамической системе основывается, как указано выше, на представлении переменных, которыми задается состояние системы, дискретными суммами гармонических компонент. Если исходить при отыскании амплитуд и начальных фаз (либо значений частот) этих компонент из соотношений, выводимых отдельно для каждой из спектральных составляющих

(хотя получаемые соотношения могут содержать величины, относящиеся и к другим компонентам), то такой подход соответствует принципу (методу) гармонического баланса [8, 16, 23].

Поясним сначала, как могут быть получены подобные соотношения на примере динамической системы, для анализа процессов в которой используется математическая модель в виде дифференциального уравнения, записываемого при помощи нелинейной функции f :

$$f(D, u, t) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь D – оператор дифференцирования по времени t , а u – динамическая переменная.

Пусть заранее известно, что переменная u в первом приближении сводится к моде, выражаемой только одной гармонической компонентой $U \cos(\omega t + \varphi)$, амплитуду U которой и, в зависимости от характера задачи, частоту ω , либо начальную фазу φ необходимо найти. Нужные для этого соотношения можно получить, если подставить приведенное выражение для моды в (1.1) и, выполнив тождественные преобразования, выделить члены с зависимостью от времени вида $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$, после чего приравнять суммы коэффициентов при $\cos \omega t$ и при $\sin \omega t$ нулю.

Таким же образом находятся с помощью метода гармонического баланса необходимые соотношения в случаях, когда требуется учет большего числа спектральных компонент переменной u .

Отметим также, что, основываясь на принципе гармонического баланса, можно при решении многих задач анализа установившихся режимов обойтись без составления дифференциальных уравнений для динамических переменных. Так часто поступают, например, при нахождении стационарных амплитуд и фаз (либо частот) гармонических компонент напряжений или токов, возникающих в автоколебательных системах резонансного типа. При этом учет нелинейности реализуется путем введения средних импедансов и адмиттансов (крутизн) активных элементов (приборов с отрицательным сопротивлением, транзисторов и др.). Исходными уравнениями, составляемыми по методу гармонического баланса, оказываются в таких случаях соотношения, связывающие комплексные амплитуды упомянутых гармонических компонент [18].

1.2. Установившиеся колебания квазилинейного осциллятора Рэлея

Обратимся к автономной системе, математической моделью которой является уравнение Рэлея [25, 26]

$$z'' + \mu[(z')^2 - 1]z' + z = 0. \quad (1.2)$$

Здесь μ – положительный постоянный параметр, а штрихом отмечена производная по безразмерному времени τ (см. приложение I).

Если временно снять требование положительности μ и приравнять этот параметр нулю, то (1.2) превратится в уравнение гармонического осциллятора [2, 19]

$$z'' + z = 0.$$

Предполагая, что начало отсчета времени выбрано таким образом, чтобы при $\tau = 0$ значение z равнялось нулю, а производная z' была положительной, запишем решение последнего уравнения, как

$$z(\tau) = a \sin \tau, \quad (1.3)$$

где a – амплитуда гармонических колебаний, определяемая в данном случае начальным значением производной z' : $a = z'(0)$.

Если μ не равно нулю, то при $|z'| \ll 1$ вместо (1.2) может рассматриваться уравнение линейного осциллятора

$$z'' - \mu z' + z = 0. \quad (1.4)$$

Решения этого уравнения при $\tau \rightarrow +\infty$ для отрицательных μ стремятся к нулю, а для $\mu > 0$ неограниченно нарастают [19].

Левая часть нелинейного уравнения (1.2) отличается от левой части (1.4) дополнительным слагаемым $\mu(z')^3$, которое, как показано Рэлеем в классическом труде «Теория звука» [26], препятствует неограниченному росту $|z|$. Благодаря этому слагаемому решение уравнения (1.2) для $\mu > 0$ носит при больших τ характер периодических колебаний.

Если $|\mu| \ll 1$, то, как видно из (1.2), рассматриваемый осциллятор – квазилинейная (слабо нелинейная) система. Установившиеся колебания квазилинейного осциллятора Рэля близки по форме к гармоническим, и решение для z при соответствующем выборе начала отсчета времени можно в первом приближении выразить формулой (1.3). Амплитуда a при этом не зависит от начальных условий и должна отыскиваться из уравнения (1.2).

Воспользуемся для нахождения a методом гармонического баланса. Подставляя (1.3) в (1.2) и применяя тригонометрическое тождество

$$\cos^3 \tau = \frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau, \quad (1.5)$$

придем к следующему равенству:

$$\mu \left(\frac{3}{4} a^3 - a \right) \cos \tau + \frac{\mu}{4} a^3 \cos 3\tau = 0.$$

Если приравнять нулю коэффициент перед $\cos \tau$ в левой части последнего соотношения, то получится стационарное значение амплитуды $a = 2/\sqrt{3}$.

Ответ на вопрос, могут ли быть в действительности колебания с найденной амплитудой, зависит от того, устойчиво или неустойчиво найденное решение. К сожалению, применяемый вариант метода гармонического баланса предназначен только для поиска решений, а исследование их устойчивости приходится выполнять при помощи других подходов. Посредством рассматриваемого ниже метода медленно меняющихся амплитуд (либо его первоначаль-

чальной версии – метода Ван дер Поля) можно убедиться, что при $\mu > 0$ найденное выше из уравнения Рэлея стационарное решение для амплитуды колебаний устойчиво (и притом асимптотически устойчиво).

Необходимо иметь в виду, что утверждение о синусоидальной форме установившихся колебаний квазилинейного осциллятора Рэлея справедливо лишь в первом приближении. На самом деле из-за присущей системе нелинейности зависимость переменной z от τ отличается от (1.3). Это проявляется, в частности, в том, что спектр колебаний содержит наряду с основной гармоникой нечетные высшие (третью, пятую и т. д.). При малых по сравнению с единицей значениях положительного параметра μ упомянутые отличия весьма малы. Поэтому для их анализа следует обратиться к процедуре, дающей возможность учитывать малые порядка μ и величины более высокого порядка малости, например, к рассматриваемому ниже методу малого параметра, позволяющему также получить оценки для обусловленных нелинейностью поправок к периоду установившихся колебаний.

1.3. Главный резонанс при гармоническом воздействии на осциллятор Дуффинга

Воспользуемся методом гармонического баланса для анализа режима, который с течением времени устанавливается в осцилляторе Дуффинга, подвергающемся воздействию внешней синусоидальной силы. Полагая в уравнении (II.5), приводимом в приложении II, $\gamma = \varepsilon \cos \Omega\tau$, имеем

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \mu \frac{dz}{d\tau} + z + z^3 = \varepsilon \cos \Omega\tau. \quad (1.6)$$

В последующем считается, что $0 < \mu \ll 1$.

Для этого уравнения характер решения $z(\tau)$, соответствующего установившемуся колебательному режиму, существенно зависит от того, как выбраны амплитуда внешнего воздействия ε и частота Ω .

Предполагая далее, что $0 < \varepsilon \ll 1$, рассмотрим вариант установившегося режима, анализ которого при помощи приближенных методов встречает наименьшие трудности. Речь пойдет о ситуации, когда при близкой к единице безразмерной частоте Ω период установившихся колебаний осциллятора Дуффинга оказывается равным периоду изменения внешнего воздействия. Нелинейностью рассматриваемой динамической системы обусловлено отклонение формы установившихся колебаний от синусоидальной, так что в спектре решения уравнения (1.6) помимо первой гармоники, изменяющейся с частотой Ω , содержатся и другие гармонические компоненты. Как показано ниже, для амплитуды первой гармоники решения $z(\tau)$ характерна резонансная зависимость от Ω . Поэтому данный режим, для которого отношение периодов вынуждающей силы и установившихся колебаний равно единице, на-

зывают *главным резонансом*. Заметим, что при других способах выбора частоты Ω возможны иные отношения упомянутых периодов, соответствующие более сложным режимам, которые требуют отдельного рассмотрения.

Чем меньше амплитуда ε , тем меньше нелинейные искажения установившихся колебаний. Считая ε достаточно малой для того, чтобы в первом приближении было допустимо пренебрежение этими искажениями, не будем принимать во внимание гармоники, изменяющиеся с частотами, отличными от Ω . Тогда можно представить решение уравнения (1.6) при больших τ как

$$z(\tau) = b \cos(\Omega\tau + \varphi), \quad (1.7)$$

где b – не зависящая от τ стационарная амплитуда.

Подставим теперь (1.7) в (1.6) и, используя наряду с (1.5) тождества

$$\cos(\Omega\tau + \varphi) = \cos\Omega\tau \cos\varphi - \sin\Omega\tau \sin\varphi,$$

$$\sin(\Omega\tau + \varphi) = \sin\Omega\tau \cos\varphi + \cos\Omega\tau \sin\varphi,$$

получим соотношение, сравнивая в котором коэффициенты перед $\cos\Omega\tau$ и $\sin\Omega\tau$ в разных слагаемых, придем к следующим равенствам:

$$(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}b^2)b \cos\varphi - \mu\Omega b \sin\varphi = \varepsilon, \quad (1.8)$$

$$(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}b^2)b \sin\varphi + \mu\Omega b \cos\varphi = 0. \quad (1.9)$$

В эти равенства входят малые величины разных порядков малости. Разность $1 - \Omega^2$, заменяемая в последующем приближенным выражением $2(1 - \Omega)$, считается далее малой величиной порядка μ . Тогда, как видно из (1.9), амплитуда b может рассматриваться как величина порядка $\mu^{1/2}$. С учетом этого из (1.8) получается, что ε – малая величина порядка $\mu^{3/2}$. Приравнявая сумму квадратов левых частей (1.8) и (1.9) квадрату ε и полагая частоту Ω в произведении $\mu\Omega b$ равной единице, придем после тождественных преобразований к следующей связи между Ω , ε и b :

$$\Omega = 1 + \frac{3}{8}b^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{b^2} - \mu^2}. \quad (1.10)$$

Необходимое требование вещественности правой части (1.10) соблюдается при условии, что амплитуда b не превышает так называемого резонансного значения $b_{res} = \varepsilon/\mu$. Для частоты Ω_{res} , соответствующей этому значению, справедливо выражение $\Omega_{res} = 1 + \frac{3}{8}b_{res}^2$, согласующееся с оценкой периода малых по амплитуде собственных колебаний консервативного осциллятора Дуффинга (см. приложение III).

Вопрос о возможном виде амплитудно-частотных характеристик $b(\Omega)$ рассматривается ниже с учетом получаемого при помощи метода Ван дер Поля условия устойчивости найденных решений.

2. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

2.1. Понятие о методе малого параметра

Приближенный анализ установившихся режимов многих динамических систем может проводиться при помощи метода возмущений [8, 22]. Один из вариантов этого метода, называемый в теории колебаний методом малого параметра, был впервые использован А.Пуанкаре в его работах по небесной механике [24] для интегрирования нелинейных уравнений.

С целью пояснения основной идеи метода малого параметра рассмотрим динамическую систему, процессы в которой описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx^{(s)}}{dt} = f^{(s)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}; t), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Возможен случай, соответствующий автономной системе, когда отсутствует явная зависимость всех функций $f^{(s)}$ от времени t . В противоположном случае неавтономной системы правые части (2.1) считаются периодическими функциями t , имеющими один и тот же период. В обоих случаях задача заключается в отыскании частных решений, отвечающих периодическим колебаниям, т. е. выражаемых периодическими функциями времени. При этом предполагается, что общее решение уравнений неизвестно.

Ограничимся далее кругом практических задач, отличающихся тем, что в правых частях уравнений удастся выделить некоторую группу членов, которые можно считать малыми по сравнению с остальными «ведущими» членами [17]. Отбросив малые члены и разрешив задачу для упрощенной системы, можно либо ограничиться полученным решением, либо, принимая его за первое приближение, возвратиться к исходным уравнениям и применить к ним какой-нибудь специально разработанный для данной задачи метод последовательных приближений.

Этот прием лежит в основе метода Пуанкаре отыскания периодических решений. Для того чтобы придать задаче точную математическую постановку, А.Пуанкаре ввел в рассмотрение так называемый «малый параметр», предположив, что правые части уравнений (2.1) зависят не только от переменных $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}; t$, но и от некоторого параметра μ и являются аналитическими функциями этого параметра. При таком предположении, считая μ достаточно малым, можно представить уравнения (2.1) в виде:

$$\frac{dx^{(s)}}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k f_k^{(s)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}; t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

где величины $f_0^{(s)}, f_1^{(s)} \dots$ не зависят от μ , а выражения $\mu f_1^{(s)} + \mu^2 f_2^{(s)} + \dots$ складываются из малых членов.

Отбрасывая в уравнениях (2.2) малые члены, получим упрощенную систему уравнений

$$\frac{dx_0^{(s)}}{dt} = f_0^{(s)}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}; t), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

В частности, это могут быть n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что соответствует исходной динамической системе, относящейся к классу *квазилинейных* [2].

Полагая, что система (2.3) имеет периодические решения, допустим, что каким-нибудь из них является некоторая совокупность функций

$$x_0^{(1)}(t), x_0^{(2)}(t), \dots, x_0^{(n)}(t). \quad (2.4)$$

Следуя вышеуказанному приему, можно принять (2.4) в качестве первого (нулевого) приближения периодического решения системы (2.2) и в дальнейшем прибегнуть к представлению решения этой системы рядом по степеням малого параметра μ :

$$x^{(s)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

где $x_k^{(s)}(t)$ – периодические функции.

Если искомое периодическое решение исходной системы (2.1) мало отличается от (2.4), то $x_0^{(1)}(t), x_0^{(2)}(t), \dots, x_0^{(n)}(t)$ называют *порождающим* решением, а дифференциальные уравнения (2.3) – *порождающей* системой. Строго говоря, имеется в виду, что существует периодическое решение системы (2.2), обращающееся при $\mu = 0$ в соответствующее решение системы (2.3). При этом молчаливо предполагается, что периодическому решению упрощенной системы (2.3) действительно отвечает периодическое решение полной системы (2.2), мало отличающееся от (2.4) при достаточно малом μ . Однако такого рода утверждение будет, вообще говоря, несправедливо. Как отмечается в [17], Пуанкаре был, по-видимому, первым, кто с достаточной четкостью показал, что сколь угодно малые изменения правых частей дифференциальных уравнений (в любой задаче) могут вызывать резкие качественные изменения в характере решений этих уравнений.

В частности, Пуанкаре показал, что не всегда периодическому решению упрощенной системы соответствует периодическое решение основной системы. Может случиться, что для периодического решения системы (2.3) не существует периодического решения исходной системы, но может также случиться, что таких решений будет несколько и даже бесчисленное множество. Другими словами, может оказаться, что задача отыскания периодических решений системы (2.2) и такая же задача для системы (2.3) не имеют между собой ничего общего. Отсюда возникает задача выяснения условий, при которых заданному периодическому решению системы (2.3) отвечает

одно и только одно периодическое решение системы (2.2). Изучению этой и связанных с нею задач посвящена теория Пуанкаре, основные положения которой (с должными обоснованиями) излагаются в [17].

Ниже рассматриваются примеры практического использования метода малого параметра для исследования установившихся режимов в квазилинейных динамических системах второго порядка. При этом основное внимание уделяется особенностям процедуры применения метода и не приводятся доказательства существования и единственности отыскиваемых периодических решений дифференциальных уравнений.

Необходимо обратить внимание на одно принципиальное затруднение, которое может возникать при непосредственном применении разложения (2.5) в случае, когда малый параметр μ сказывается на значении периода T искомого решения системы (2.2). Дело в том, что при T , зависящем от μ , из равенства

$$x^{(s)}(t + T(\mu)) = x^{(s)}(t)$$

отнюдь не вытекают подобные равенства для функций $x_k^{(s)}(t)$, содержащихся в разложении (2.5). Данное обстоятельство не должно показаться неожиданным. В упомянутом случае в разложение периодической функции по степеням μ могут входить так называемые «вековые (секулярные) члены», неограниченно растущие при $t \rightarrow \infty$. Это можно видеть на примере разложения функции $\sin(1 + \mu)t$, период которой, равный $\frac{2\pi}{1 + \mu}$, зависит от μ :

$$\sin(1 + \mu)t = \sin t + \mu t \cos t - \frac{1}{2} \mu^2 t^2 \sin t + \dots$$

Пользоваться подобными рядами, несмотря на их сходимость в целом, в практических расчетах, где приходится ограничиваться конечным числом членов разложения, нельзя.

С затруднениями такого рода сталкивались астрономы XVIII века, когда пытались, интегрируя при помощи рядов дифференциальные уравнения движения планет, получить периодические зависимости координат планет от времени. Для преодоления подобных затруднений приходилось применять различные способы освобождения решений от вековых членов [3]. Ниже используется предложенный А.М.Ляпуновым прием, который заключается в преобразовании уравнений исходной системы к так называемому «собственному времени». В последующем вводится такое безразмерное время

$$\theta = \frac{2\pi}{T(\mu)} t, \quad (2.6)$$

чтобы периоду $T(\mu)$ при любом μ всегда соответствовало 2π единиц этого «собственного» времени. В зарубежной литературе процедуру, основанную на (2.6), связывают, как правило, с именем Линдштедта [22, 23].

2.1. Установившийся режим в автономном LC – генераторе

2.2.1. Преобразование исходного уравнения (переход к «собственному» времени). Выбор начальных условий

Дифференциальное уравнение свободного от внешних воздействий одноконтурного генератора на нелинейном элементе с характеристикой, аппроксимируемой кубическим полиномом, может быть во многих случаях (см. приложение I) приведено к виду:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z = \mu \left[\frac{dz}{d\tau} - \sigma \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 \right]. \quad (2.7)$$

Здесь безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, ω_0 – резонансная частота LC – контура. Постоянный положительный параметр μ предполагается далее много меньшим единицы, благодаря чему рассматриваемая динамическая система, как видно из (2.7), может считаться близкой к линейной и консервативной.

Если бы параметр μ оказался равным нулю, то (2.7) превратилось бы в уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z = 0.$$

Общим решением этого уравнения описываются колебания синусоидальной формы, имеющие период 2π по τ , т. е. период $2\pi/\omega_0$ по t .

Воспользуемся методом малого параметра для нахождения периодического решения уравнения (2.7) при $\mu \neq 0$. Примем в качестве исходного предположение об отличии периода искомого решения (по τ) от 2π , что подтверждается приводимыми ниже результатами. Это отличие, которое тем меньше, чем меньше по сравнению с единицей положительный параметр μ , может быть учтено в выражении для периода посредством малой поправки, обращаемой в нуль при $\mu = 0$. На этом основании для периода по t считается справедливым выражение

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \mu h), \quad (2.8)$$

где множитель h рассматривается далее как функция μ , представимая степенным рядом:

$$h(\mu) = h_0 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \dots \quad (2.9)$$

Входящие в разложение (2.9) коэффициенты h_0, h_1, h_2, \dots могут последовательно отыскиваться на различных стадиях реализуемой ниже процедуры метода малого параметра.

Для того чтобы избежать упомянутого выше возможного затруднения, связанного с появлением вековых членов в разложении искомого решения по степеням μ , положим, что

$$\tau = [1 + \mu h(\mu)]\theta, \quad (2.10)$$

т. е. перейдем к «собственному» времени θ . Как легко видеть, принимая во внимание (2.8), формула (2.10) согласуется с (2.6), так что период искомого решения по θ не зависит от μ и равняется 2π . Обозначая производную z по θ точкой, на основании (2.10) имеем

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\theta} = (1 + \mu h) \frac{dz}{d\tau}. \quad (2.11)$$

Умножая (2.7) на $(1 + \mu h)^2$ и учитывая (2.11), получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} + z = \mu f(z, \dot{z}, \mu), \quad (2.12)$$

где

$$f(z, \dot{z}, \mu) = (1 + \mu h)\dot{z} - \sigma\dot{z}^2 - \frac{\dot{z}^3}{1 + \mu h} - (2h + \mu h^2)z. \quad (2.13)$$

В соответствии с процедурой метода малого параметра будем исходить из представления искомого решения уравнения (2.12) следующим рядом по степеням μ :

$$z(\theta) = z_0(\theta) + \mu z_1(\theta) + \mu^2 z_2(\theta) + \dots, \quad (2.14)$$

причем благодаря переходу к «собственному» времени не только $z(\theta)$ может предполагаться периодической функцией (периода 2π), но и $z_0(\theta)$, $z_1(\theta)$, $z_2(\theta)$, ...

Как и должно быть для автономной системы, уравнение (2.12) не содержит явно времени и потому остается прежним при изменении начала отсчета θ . Это дает возможность, не нарушая общности рассуждений, принять,

что в начальный момент времени величина $\dot{z} = \frac{dz}{d\theta}$ для искомого периодического решения равняется нулю. В самом деле, как предполагается, для такого решения $z(\theta_0) = z(\theta_0 + 2\pi)$ при любом фиксированном θ_0 . Следовательно, в интервале $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ должен существовать такой момент времени, когда производная $\frac{dz}{d\theta}$ обращается в нуль. Этот момент можно принять за начальный, полагая, что ему отвечает $\theta_0 = 0$. Таким образом, отыскание периодического решения уравнения (2.12) будет проводиться при начальном условии $\dot{z}(0) = 0$ и согласующихся с ним нулевых начальных условиях для производных по θ от функций, которые содержатся в разложении (2.14):

$$\dot{z}_0(0) = 0, \dot{z}_1(0) = 0, \dot{z}_2(0) = 0, \dots$$

2.2.2. Начальная стадия процедуры метода малого параметра (нулевое приближение). Первое и второе приближения

Подставляя разложение (2.14) в дифференциальное уравнение (2.12) и полагая $\mu = 0$, приходим к порождающему уравнению

$$\ddot{z}_0 + z_0 = 0,$$

решение которого при начальном условии $\dot{z}_0(0) = 0$ записывается как

$$z_0(\theta) = a \cos \theta, \quad (2.15)$$

где амплитуда a определяется на следующей стадии процедуры.

Выделяя в (2.12) после подстановки в него (2.14) малые слагаемые порядка μ и принимая во внимание (2.13), получим

$$\ddot{z}_1 + z_1 = f(z_0, \dot{z}_0, 0) = \dot{z}_0 - \sigma \dot{z}_0^2 - \dot{z}_0^3 - 2h_0 z_0. \quad (2.16)$$

Учитывая (2.15), перейдем от (2.16) к уравнению

$$\ddot{z}_1 + z_1 = \left(\frac{3}{4} a^2 - 1 \right) a \sin \theta - \frac{\sigma}{2} a^2 (1 - \cos 2\theta) - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\theta - 2h_0 a \cos \theta. \quad (2.17)$$

При выводе выражения для правой части (2.17) использованы тригонометрические тождества

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta.$$

С целью обоснования необходимости некоторых применяемых в последующем условий рассмотрим общее решение линейного дифференциального уравнения

$$\ddot{u} + u = 2p \cos \theta + 2q \sin \theta.$$

Поскольку в это решение

$$u(\theta) = \dot{u}(0) \sin \theta + u(0) \cos \theta + (p\theta + q) \sin \theta - q\theta \cos \theta$$

помимо периодических слагаемых входят вековые члены, оно оказывается непериодическим. Исключением является случай, когда $p = q = 0$.

Как вытекает из сказанного, для того чтобы в решении уравнения (2.17) отсутствовали вековые члены, т. е. чтобы функция $z_1(\theta)$ была периодической, нужно приравнять нулю коэффициенты перед $\cos \theta$ и $\sin \theta$ в правой части (2.17). В результате при $a \neq 0$, получается, во-первых, что $h_0 = 0$. Это означает, что упомянутая выше поправка к периоду установившихся колебаний – малая величина более высокого порядка, чем μ . Во-вторых, оказывается, что амплитуда порождающего решения $a = 2/\sqrt{3}$. Для $h_0 = 0$ и $a = 2/\sqrt{3}$ можно вместо (2.17) записать уравнение

$$\ddot{z}_1 + z_1 = \frac{\sigma}{2} a^2 (\cos 2\theta - 1) - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\theta,$$

общее решение которого

$$z_1(\theta) = \frac{1}{32} a^3 \sin 3\theta - \frac{\sigma}{6} a^2 (3 + \cos 2\theta) + x \sin \theta - y \cos \theta \quad (2.18)$$

содержит константы x и y . Используя начальное условие $\dot{z}_1(0) = 0$, получим, что $x = -\frac{3}{32}a^3$. Константа y определяется на следующей стадии процедуры.

Подставив (2.14) в (2.12), записанное с учетом выражения (2.13) для его правой части, выделим в разложениях по степеням μ левой и правой частей получившегося соотношения слагаемые, пропорциональные μ^2 . После некоторых тождественных преобразований, выполняемых с учетом того, что $h_0 = 0$, $a = 2/\sqrt{3}$, придем к следующему уравнению для z_2 :

$$\ddot{z}_2 + z_2 = (1 - 2\sigma\dot{z}_0 - 3\dot{z}_0^2)\dot{z}_1 - 2h_1z_0,$$

или

$$\ddot{z}_2 + z_2 = (2 \cos 2\theta - 1 + 2\sigma a \sin \theta)\dot{z}_1(\theta) - 2h_1a \cos \theta, \quad (2.19)$$

где
$$\dot{z}_1(\theta) = \frac{3}{32}a^3(\cos 3\theta - \cos \theta) + \frac{\sigma}{3}a^2 \sin 2\theta + y \sin \theta.$$

Использование тригонометрических тождеств

$$\begin{aligned} 2 \cos 2\theta \cos 3\theta &= \cos \theta + \cos 5\theta, & 2 \cos 2\theta \cos \theta &= \cos \theta + \cos 3\theta, \\ 2 \cos 2\theta \sin \theta &= \sin 3\theta - \sin \theta, & 2 \sin \theta \sin 2\theta &= \cos \theta - \cos 3\theta \end{aligned}$$

позволяет записать (2.19) в виде уравнения

$$\ddot{z}_2 + z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{9}\sigma^2 - 4h_1 \right) \cos \theta - 2y \sin \theta + \dots \quad (2.20)$$

Не приведенные в правой части (2.20) слагаемые не содержат $\sin \theta$ и $\cos \theta$.

Для выполнения условий периодичности решения $z_2(\theta)$ приравняем в (2.20) коэффициенты перед $\sin \theta$ и $\cos \theta$ нулю и получим, что

$$y = 0, \quad h_1 = \frac{1}{16} + \frac{2}{9}\sigma^2. \quad (2.21)$$

Выражаемый вторым из равенств (2.21) коэффициент h_1 дает возможность оценить (с точностью до величин порядка μ^2) поправку к периоду установившихся колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + h_1\mu^2 + \dots).$$

Вводя для круговой частоты основной гармоники автоколебаний генератора обозначение $\omega = 2\pi/T$, запишем на основании (2.14) выражение для z с учетом слагаемых, порядок малости которых не выше μ :

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \omega t + \frac{\mu}{12\sqrt{3}} (\sin 3\omega t - 3 \sin \omega t) - \frac{2}{9}\mu\sigma(\cos 2\omega t - 3). \quad (2.22)$$

Как видно из (2.22), в спектре колебаний помимо основной гармоники содержатся высшие гармонические составляющие, что свидетельствует о нелинейных искажениях, т. е. об определенных, хотя и малых, отклонениях формы установившихся колебаний от синусоидальной.

2.3. Резонанс второго рода в LC - генераторе

2.3.1. Вводные замечания и предварительные преобразования

Воздействие внешнего источника гармонических колебаний на LC – генератор может существенно сказываться на характере протекающих в нем процессов. Остановимся сначала на случае, когда период T_e колебаний внешнего источника близок к периоду T автоколебаний автономного, т. е. свободного от изменяющихся во времени воздействий, LC – генератора. В этом случае в подвергающемся внешнему воздействию (неавтономном) генераторе возможен установившийся режим периодических колебаний, период которых совпадает с T_e . Иными словами, может наблюдаться *синхронизация* колебаний LC – генератора внешними гармоническими колебаниями, называемая также *явлением захватывания* [11, 18]. Из-за близости T_e к T и из-за того, что зависимость амплитуды основной гармоники установившихся колебаний от T_e представляется кривой с максимумом, т. е. носит резонансный характер, этот случай обозначают как *главный резонанс*.

Если период T_e мало отличается от $T/2$, то в неавтономном автогенераторе могут установиться колебания, период которых строго равен $2T_e$. Такой эффект удвоения периода колебаний получил наименование *резонанса второго рода*. В этом случае, как показано ниже при помощи метода малого параметра, отмечаются резонансные зависимости амплитуды основной гармоники установившихся колебаний от частоты и амплитуды колебаний внешнего источника.

Предположим, что в дифференциальном уравнении (I.6) неавтономного LC – генератора (см. приложение I) $\gamma = \lambda \cos \Omega \tau$, где λ – нормированная амплитуда внешнего воздействия:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z + \mu \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 + \sigma \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 - \frac{dz}{d\tau} \right] = \lambda \cos \Omega \tau. \quad (2.23)$$

Здесь μ – малый по сравнению с единицей положительный параметр, $\tau = \omega_0 t$, ω_0 – частота настройки LC – контура, а Ω равняется частоте внешнего воздействия ω_e , отнесенной к ω_0 . Таким образом, отсчитываемый по τ период колебаний, воздействующих на генератор, равен $2\pi/\Omega$. Далее для нормированной частоты Ω используется выражение

$$\Omega = \frac{2}{\sqrt{1 - \mu h}}, \quad (2.24)$$

где величина h может рассматриваться как мера относительного отклонения частоты внешнего воздействия ω_e от $2\omega_0$. При $|\mu h| \ll 1$, как легко видеть,

$$\Omega \approx 2 + \mu h.$$

Нас интересует режим колебаний с удвоенным по сравнению с $2\pi/\Omega$ периодом. Последующий анализ удобно проводить, если перейти от τ к другому безразмерному времени

$$\theta = \frac{\Omega}{2} \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \mu h}}, \quad (2.25)$$

которое, как и в случае автономной системы, можно назвать «собственным». Заметим, что при заданных μ и Ω величина h , как видно из (2.24), заранее известна (в противоположность тому, что имело место для автономного генератора). Принимая во внимание (2.25), запишем следующую связь между производными по θ и по τ :

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\theta} = \sqrt{1 - \mu h} \frac{dz}{d\tau}. \quad (2.26)$$

Умножая исходное уравнение (2.23) на $1 - \mu h$ и учитывая (2.26), получим уравнение, преобразованное к «собственному» времени:

$$\ddot{z} + z = \lambda \cos 2\theta + \mu f(z, \dot{z}, \theta, \mu), \quad (2.27)$$

где

$$f(z, \dot{z}, \theta, \mu) = \sqrt{1 - \mu h} \dot{z} - \sigma \dot{z}^2 - \frac{\dot{z}^3}{\sqrt{1 - \mu h}} + hz - h\lambda \cos 2\theta. \quad (2.28)$$

2.3.2. Применение процедуры метода малого параметра

Как и ранее, для искомого периодического решения (периода 2π) используется представление рядом (2.14) по степеням малого параметра μ . При $\mu = 0$ из (2.27) с учетом (2.14) получается уравнение нулевого приближения (порождающее уравнение):

$$\ddot{z}_0 + z_0 = \lambda \cos 2\theta,$$

решение которого можно записать в виде

$$z_0 = a \sin(\theta - \varphi) - \frac{\lambda}{3} \cos 2\theta, \quad (2.29)$$

где амплитуда a и фазовый угол φ пока не определены и для их нахождения необходим переход к следующей стадии процедуры (первому приближению).

Выделяя в (2.27) после подстановки в него разложения (2.14) малые величины порядка μ , приходим к уравнению

$$\ddot{z}_1 + z_1 = f(z_0, \dot{z}_0, \theta, 0) = \dot{z}_0 - \dot{z}_0^3 + hz_0 - \sigma\dot{z}_0^2 - h\lambda \cos 2\theta, \quad (2.30)$$

где согласно (2.29)

$$\dot{z}_0 = a \cos(\theta - \varphi) + \frac{2}{3} \lambda \sin 2\theta, \quad (2.31)$$

$$\dot{z}_0^2 = \frac{2}{3} \lambda a \sin(\theta + \varphi) + \text{пост. составл.} + 2\text{-я, } 3\text{-я и } 4\text{-я гармоника,} \quad (2.32)$$

$$\dot{z}_0^3 = \left(\frac{2}{3} \lambda^2 + \frac{3}{4} a^2 \right) a \cos(\theta - \varphi) + \text{высшие гармоника.} \quad (2.33)$$

Вводя обозначения $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ и выражая $\sin(\theta - \varphi)$, $\cos(\theta - \varphi)$, $\sin(\theta + \varphi)$, содержащиеся в (2.29, 2.31, 2.32, 2.33), через комбинации произведений x и y на $\cos \theta$ и $\sin \theta$, преобразуем (2.30) к виду:

$$\ddot{z}_1 + z_1 = 2P(x, y) \cos \theta + 2Q(x, y) \sin \theta + \dots \quad (2.34)$$

Здесь

$$P(x, y) = \left(1 - \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{3}{4} a^2 \right) \frac{x}{2} - \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{3} \sigma \lambda \right) y, \quad (2.35)$$

$$Q(x, y) = \left(1 - \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{3}{4} a^2 \right) \frac{y}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{3} \sigma \lambda \right) x, \quad (2.36)$$

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Слагаемые, не написанные в правой части (2.34), не содержат $\cos \theta$ и $\sin \theta$. Для того чтобы в решении уравнения (2.34) отсутствовали вековые члены, т. е. решение было периодическим, приравняем нулю множители перед $\cos \theta$ и $\sin \theta$. Тогда, принимая во внимание формулы (2.35, 2.36) для $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\left(1 - \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{3}{4} a^2 \right) x = \left(\frac{2}{3} \sigma \lambda + h \right) y, \quad (2.37)$$

$$\left(1 - \frac{2}{3} \lambda^2 - \frac{3}{4} a^2 \right) y = \left(\frac{2}{3} \sigma \lambda - h \right) x. \quad (2.38)$$

При выводе из (2.37), (2.38) выражения для a можно, не теряя общности, считать, что x и y отличны от нуля. Это позволяет, перемножив (2.37) и (2.38), получить после деления на xy равенство, из которого следует, что

$$\frac{3}{4}a^2 = 1 - \frac{2}{3}\lambda^2 + V, \quad (2.39)$$

где

$$V = \pm \sqrt{\frac{4}{9}\sigma^2\lambda^2 - h^2}. \quad (2.40)$$

Как обосновывается ниже с помощью метода Ван дер Поля, при знаке «минус» перед радикалом в выражении для V (даже если при этом правая часть (2.39) является вещественной положительной величиной) решение для амплитуды a не реализуется, поскольку оказывается неустойчивым. Анализ соотношений (2.39, 2.40) показывает, что резонанс второго рода невозможен для $h^2 \geq \frac{2\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^4}{9}$ (при любых λ) и

для $\lambda \geq \frac{|\sigma|}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{3}{2}}$ (при любых h). Опираясь на (2.39, 2.40), нетрудно

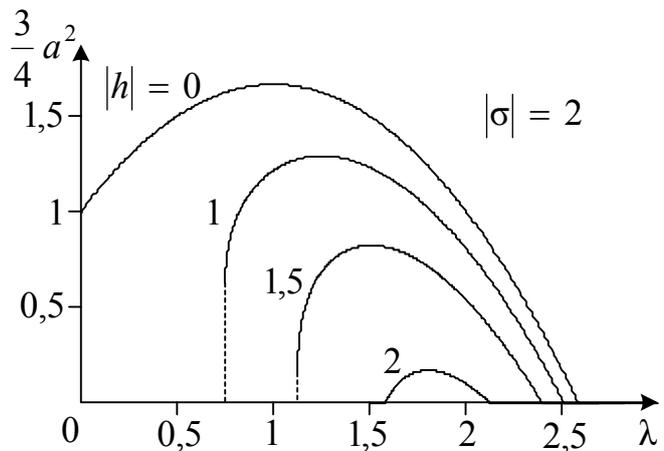


Рис.2

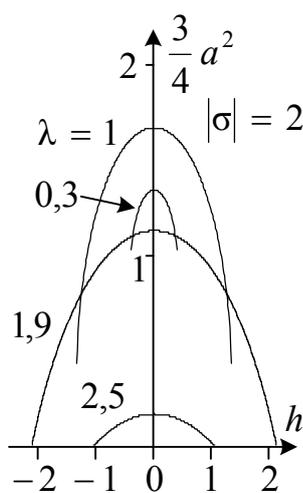


Рис.3

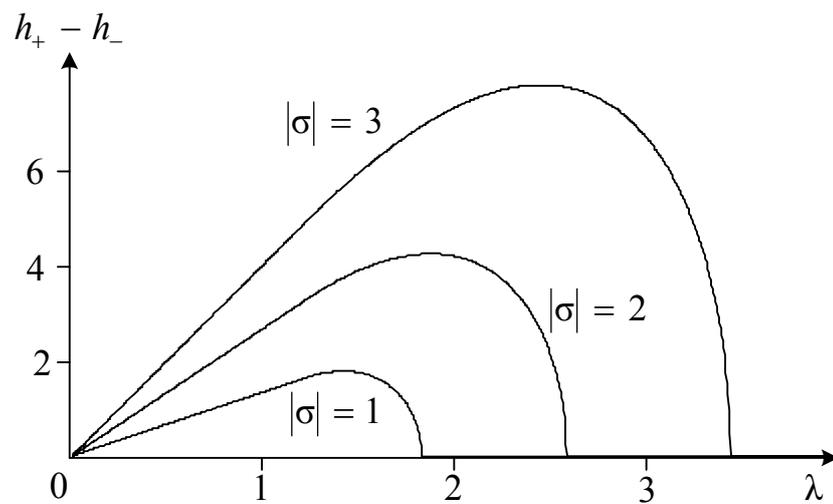


Рис.4

убедиться в резонансном характере зависимостей a как от амплитуды внешнего воздействия (рис.2), так и от h , т. е. от частоты ω_e (рис.3). При $0 < h^2 \leq \frac{2\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^4}{9}$ эффект удвоения периода колебаний, т. е. $a > 0$, обеспечивается в некотором интервале амплитуд λ (рис.2), отличную от нуля нижнюю границу которого называют «порогом», а для верхней – используется наименование «потолок» [11].

Разностью $h_+ - h_-$ определяется нормированная ширина области частот внешнего воздействия, в которой наблюдается резонанс 2-го рода:

$$h_+ - h_- = \begin{cases} \frac{4}{3} |\sigma| \lambda, & \lambda \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ 2\sqrt{\frac{4}{9} \sigma^2 \lambda^2 - \left(\frac{2}{3} \lambda^2 - 1\right)^2}, & \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \lambda \leq \frac{|\sigma|}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{3}{2}}. \end{cases}$$

На рис.4 для трех значений $|\sigma|$ показано, как эта разность зависит от амплитуды λ .

3. МЕТОД ВАН ДЕР ПОЛЯ

3.1 Общие черты процедуры метода Ван дер Поля для квазилинейной системы 2-го порядка

Метод Ван дер Поля, являющийся первоначальным вариантом широко используемого метода медленно меняющихся амплитуд, обладает сам по себе обширной сферой применения [22]. Поскольку последующее рассмотрение посвящено приложениям метода Ван дер Поля к анализу близких к консервативным квазилинейных систем 2-го порядка, познакомимся с основными особенностями процедуры этого метода на примере уравнения

$$\ddot{Z} + Z = \mu F(Z, \dot{Z}, \theta, \mu), \quad (3.1)$$

где μ – малый параметр, а точкой над символом обозначается производная по времени θ .

При $\mu = 0$ общее решение получающегося из (3.1) уравнения гармонического осциллятора может быть представлено как

$$Z(\theta) = x \sin \theta - y \cos \theta, \quad (3.2)$$

где x и y – произвольные константы, часто называемые амплитудами квадратурных компонент.

В соответствии с методикой, развитой Ван дер Полем, решение уравнения (3.1) при малых μ ищется в аналогичном (3.2) виде

$$Z(\theta) = X(\theta) \sin \theta - Y(\theta) \cos \theta, \quad (3.3)$$

где для множителей перед $\sin \theta$ и $\cos \theta$ характерно изменение с течением времени θ , происходящее тем медленнее, чем меньше μ . Упомянутая медленность изменения X и Y во времени понимается в том смысле, что производные \dot{X} и \dot{Y} – малые величины, а вторые производные \ddot{X} и \ddot{Y} имеют более высокий порядок малости, чем \dot{X} и \dot{Y} .

Легко видеть, что выражения для производных \dot{Z} и \ddot{Z}

$$\dot{Z} = \dot{X} \sin \theta - \dot{Y} \cos \theta + X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad (3.4)$$

$$\ddot{Z} = \ddot{X} \sin \theta - \ddot{Y} \cos \theta + 2\dot{X} \cos \theta + 2\dot{Y} \sin \theta - X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (3.5)$$

состоят из слагаемых различных порядков малости. Подставим (3.3, 3.4, 3.5) в (3.1) и, представляя правую часть разложением подобным тригонометрической форме ряда Фурье, отбросим члены, порядок малости которых выше μ , \dot{X} и \dot{Y} . Выполняемое далее приравнивание коэффициентов при $\cos \theta$ и $\sin \theta$ в обеих частях приводит к соотношениям вида

$$\dot{X} = \mu P(X, Y), \quad \dot{Y} = \mu Q(X, Y), \quad (3.6)$$

что иллюстрируется ниже конкретными примерами. Для соотношений (3.6) употребляется наименование «укороченные уравнения».

3.2 Условия устойчивости установившегося режима при главном резонансе в осцилляторе Дуффинга

С помощью метода Ван дер Поля можно выяснить, при каких условиях устойчивы полученные выше решения для установившегося режима неавтономного осциллятора Дуффинга. Предварительно преобразуем исходное уравнение (1.5), используя установленные при поиске его решений методом гармонического баланса оценки порядков малости различных величин, содержащихся в этом уравнении. Полагая в (1.5) $z = \mu^{1/2} Z$, $\varepsilon = \mu^{3/2} \lambda$, придем к уравнению

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + Z = \mu \left(\lambda \cos \Omega \tau - Z^3 - \frac{dZ}{d\tau} \right). \quad (3.7)$$

Далее введем новую независимую переменную $\theta = \Omega \tau$, а нормированную частоту Ω , которая в данной задаче считается мало отличающейся от единицы, запишем в следующем виде:

$$\Omega = \frac{1}{1 - \mu h}. \quad (3.8)$$

При $|\mu h| \ll 1$ из (3.8) получается приближенная формула $\Omega \approx 1 + \mu h$. Учитывая (3.8), производную Z по θ можно выразить через производную по τ :

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{d\theta} = (1 - \mu h) \frac{dZ}{d\tau}.$$

Умножая (3.7) на $(1 - \mu h)^2$ и переходя к производным по θ , получим уравнение вида (3.1):

$$\ddot{Z} + Z = \mu[(2h - \mu h^2)Z - (1 - \mu h)^2 Z^3 - (1 - \mu h)\dot{Z} + (1 - \mu h)^2 \lambda \cos \theta]. \quad (3.9)$$

Выражая Z в соответствии с (3.3), принимая во внимание (3.4, 3.5) и учитывая, что

$$Z^3 = \frac{3}{4}(X^2 + Y^2)(X \sin \theta - Y \cos \theta) + (3Y^2 - X^2) \frac{X}{4} \sin 3\theta + (3X^2 - Y^2) \frac{Y}{4} \cos 3\theta,$$

получим следующие аналитические выражения для функций $P(X, Y)$ и $Q(X, Y)$, входящих в правые части укороченных уравнений (3.6):

$$P(X, Y) = \frac{\lambda}{2} - hY + \frac{3}{8}(X^2 + Y^2)Y - \frac{X}{2}, \quad (3.10)$$

$$Q(X, Y) = hX - \frac{3}{8}(X^2 + Y^2)X - \frac{Y}{2}. \quad (3.11)$$

В установившемся режиме амплитуды X и Y принимают не изменяющиеся с течением времени (стационарные) значения x и y :

$$X = x = \text{const}(\theta), \quad Y = y = \text{const}(\theta),$$

удовлетворяющие, как следует из (3.6), уравнениям

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (3.12)$$

Принимая во внимание выражения (3.10, 3.11) и используя обозначение

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.13)$$

запишем (3.12) в виде следующей системы уравнений:

$$(h - \frac{3}{8}a^2)y + \frac{x}{2} = \frac{\lambda}{2}, \quad (3.14)$$

$$(h - \frac{3}{8}a^2)x - \frac{y}{2} = 0. \quad (3.15)$$

Приравнивая сумму квадратов левых частей (3.14, 3.15) квадрату правой части (3.14), придем к равенству

$$(h - \frac{3}{8}a^2)^2 a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) легко вывести соотношение

$$h = \frac{3}{8}a^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{a^2} - 1}, \quad (3.17)$$

которое согласуется с равенством (1.10), полученным при помощи метода гармонического баланса.

Дифференцируя равенство (3.16) по a и рассматривая при этом h как функцию a , придем после тождественных преобразований к следующей используемой в дальнейшем формуле:

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}a^2 - h\right)\left(\frac{9}{8}a^2 - h\right) = \left(\frac{3}{8}a^2 - h\right)a \frac{dh}{da}. \quad (3.18)$$

Для условий устойчивости решений уравнений (3.12) при $\mu > 0$ применима установленная в приложении IV общая форма в виде неравенств (IV.4, IV.5). Опираясь на (3.10, 3.11), приведем относящиеся к данному случаю выражения для частных производных, входящих в эти неравенства:

$$P'_X(x, y) = \frac{3}{4}xy - \frac{1}{2}, \quad P'_Y(x, y) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{8}y^2 - h,$$

$$Q'_X(x, y) = h - \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{8}y^2, \quad Q'_Y(x, y) = -\frac{3}{4}xy - \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что, поскольку $P'_X + Q'_Y = -1$, условие (IV.4) выполнено. Условие (IV.5) после ряда тождественных преобразований может быть выражено неравенством

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}a^2 - h\right)\left(\frac{9}{8}a^2 - h\right) > 0,$$

которое, если учесть (3.18), равносильно неравенству

$$\left(\frac{3}{8}a^2 - h\right)\frac{dh}{da} > 0. \quad (3.19)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от расстройки, рассчитываемая при помощи формулы (3.17), выражается однозначной функцией $a(h)$ только для амплитуд λ , не превышающих граничного значения $\hat{\lambda} \approx 1,433$ (см. приложение V). В этом случае, как можно убедиться при помощи (3.19), все получаемые решения устойчивы. Для более сложной зависимости $a(h)$ при $\lambda > \hat{\lambda}$ (см. пример

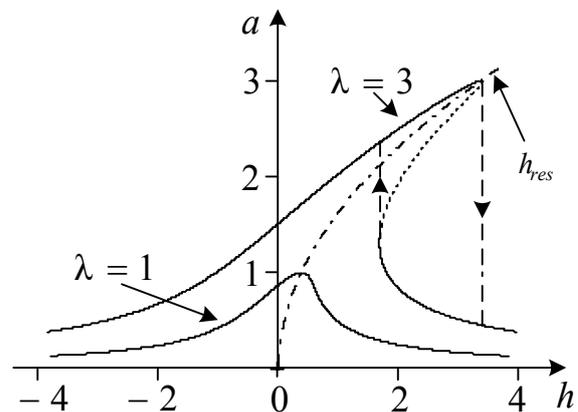


Рис.5

на рис.5) характерно наличие интервала расстроек h , каждой из которых отвечает три различных значения a . При этом устойчивыми оказываются решения только для наибольшего и наименьшего значений амплитуды. При промежуточных значениях амплитуды вынужденных колебаний, которым соответствует пунктирный участок на рис.5, нарушается условие (3.19). Отличительной особенностью резонансной кривой осциллятора Дуффинга при $\lambda > \hat{\lambda}$ является скачкообразное изменение амплитуды a на границах упомянутого интервала расстроек, отмеченное на рис.5 отрезками вертикальных штриховых линий.

3.3 Условия устойчивости резонанса второго рода в LC -генераторе

Выбрав (2.27) в качестве исходного уравнения и вводя вместо z другую искомую величину Z при помощи подстановки

$$z = Z - \frac{\lambda}{3} \cos 2\theta,$$

придем к уравнению (3.1), где стоящая в правой части функция

$$F(Z, \dot{Z}, \theta, \mu) = \sqrt{1 - \mu h} \left(\dot{Z} + \frac{2}{3} \lambda \sin 2\theta \right) - \sigma \left(\dot{Z} + \frac{2}{3} \lambda \sin 2\theta \right)^2 - \\ - \frac{\left(\dot{Z} + \frac{2}{3} \lambda \sin 2\theta \right)^3}{\sqrt{1 - \mu h}} + h \left(Z - \frac{\lambda}{3} \cos 2\theta \right) - h \lambda \cos 2\theta.$$

Выражая Z в соответствии с (3.3), принимая во внимание (3.4, 3.5) и выделяя в тригонометрическом разложении правой части члены, пропорциональные $\cos \theta$ и $\sin \theta$, нетрудно прийти к совпадающим по виду с (2.35, 2.36) выражениям для функций, которые входят в укороченные уравнения (3.6), не содержащие величин более высокого порядка малости, чем μ :

$$P(X, Y) = \left(W - \frac{3}{4} X^2 - \frac{3}{4} Y^2 \right) \frac{X}{2} - \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{3} \sigma \lambda \right) Y, \quad (3.20)$$

$$Q(X, Y) = \left(W - \frac{3}{4} X^2 - \frac{3}{4} Y^2 \right) \frac{Y}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{3} \sigma \lambda \right) X, \quad (3.21)$$

где $W = 1 - \frac{2}{3} \lambda^2$.

Стационарные решения системы (3.6), обозначаемые соответственно через x и y , связаны соотношениями вида (3.12), из которых, учитывая (3.20, 3.21), несложно получить равносильное (2.39) выражение для стационарной амплитуды a :

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \sqrt{\frac{W + V}{3}}, \quad (3.22)$$

где $V = \pm \sqrt{\frac{4}{9} \sigma^2 \lambda^2 - h^2}$.

Анализ устойчивости стационарных решений может проводиться с применением условий (IV.4, IV.5), сформулированных в приложении IV. Учитывая результаты вычисления частных производных:

$$P'_X(x, y) = \frac{W}{2} - \frac{9}{8} x^2 - \frac{3}{8} y^2, \quad P'_Y(x, y) = -\frac{h}{2} - \frac{\sigma \lambda}{3} - \frac{3}{4} xy, \\ Q'_X(x, y) = \frac{h}{2} - \frac{\sigma \lambda}{3} - \frac{3}{4} xy, \quad Q'_Y(x, y) = \frac{W}{2} - \frac{3}{8} x^2 - \frac{9}{8} y^2,$$

можно показать, что условие (IV.5) после тождественных преобразований сводится к неравенству

$$V \frac{3}{4} a^2 > 0, \quad (3.23)$$

которое нарушается при «минусе» перед знаком радикала в выражении для V и при $V = 0$. Неравенство (IV.4) записывается в виде условия

$$a > \sqrt{\frac{2}{3} W},$$

которое, как видно из (3.22), заведомо выполняется в случае положительности V .

4. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД

4.1. Приведение дифференциального уравнения к системе уравнений первого порядка (переход к вспомогательным переменным)

Ниже излагается вариант общей процедуры метода медленно меняющихся амплитуд, предложенный М.И.Конторовичем [11]. Обратимся сначала к дифференциальному уравнению n -го порядка

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = \mu f(z, z', \dots, z^{(n-1)}; t). \quad (4.1)$$

Здесь μ – малый параметр, f – ограниченная (при любом фиксированном t) функция переменных $z, z', \dots, z^{(n-1)}$ в некоторой области их изменения и удовлетворяющая дополнительным условиям, которые удобнее будет сформулировать позднее.

Коэффициенты a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 предполагаются вещественными числами, притом такими, что для корней p_k полинома

$$L(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (4.2)$$

выполняются следующие условия. Эти корни являются либо чисто мнимыми числами ($p_k = j\omega_k$), либо комплексными числами ($p_k = \sigma_k + j\omega_k$) с вещественными частями, которые малы в том смысле, что $|\sigma_k| \ll |\omega_k|$ и σ_k допустимо считать малыми величинами порядка μ . Среди корней p_k нет кратных. Заметим также, что в силу вещественности коэффициентов полинома $L(p)$ корни p_k образуют комплексно сопряженные пары. Дифференциальные уравнения квазилинейных систем, близких к консервативным, как правило, можно привести к виду (4.1), удовлетворив при этом упомянутым условиям.

Преобразуем уравнение (4.1) по Лапласу и, учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{dt} \exp(-pt) dt = p\bar{z} - z(0), \quad \int_0^{\infty} \frac{d^2z}{dt^2} \exp(-pt) dt = p^2\bar{z} - pz(0) - z'(0), \dots \quad (4.3)$$

получим

$$L(p)\bar{z} = \mu\bar{f} + H(p), \quad (4.4)$$

где \bar{z} , \bar{f} – преобразованные по Лапласу от соответствующих функций, $H(p)$ – полином от p степени более низкой, чем n , с коэффициентами, зависящими от начальных значений переменной z и ее производных z' , ..., $z^{(n-1)}$. Разделив левую и правую части (4.4) на $L(p)$, имеем

$$\bar{z} = \frac{\mu\bar{f}}{L(p)} + \frac{H(p)}{L(p)}.$$

Дробно-рациональные функции $\frac{1}{L(p)}$ и $\frac{H(p)}{L(p)}$ можно представить (учитывая отсутствие кратных корней у полинома, стоящего в знаменателе) следующими разложениями на простейшие дроби:

$$\frac{1}{L(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{(a_{-1})_k}{p - p_k}, \quad \frac{H(p)}{L(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{(b_{-1})_k}{p - p_k},$$

где $(a_{-1})_k$ и $(b_{-1})_k$ – вычеты соответствующих функций в полюсе p_k .

Если ввести вспомогательные функции \bar{z}_k , удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{z}_k = \frac{(a_{-1})_k \mu\bar{f} + (b_{-1})_k}{p - p_k}, \quad (4.5)$$

то очевидно, что

$$\bar{z} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k. \quad (4.6)$$

Соотношение (4.5) можно переписать так:

$$(p - p_k)\bar{z}_k = (a_{-1})_k \mu\bar{f} + (b_{-1})_k. \quad (4.7)$$

Будем рассматривать \bar{z}_k как преобразованную функцию от оригинала $z_k(t)$. Тогда использование для z_k первого из равенств (4.3) позволяет преобразовать (4.7) к виду:

$$z_k(0) + \int_0^{\infty} \left(\frac{dz_k}{dt} - p_k z_k \right) \exp(-pt) dt = (b_{-1})_k + (a_{-1})_k \mu \int_0^{\infty} f \exp(-pt) dt.$$

Для того чтобы удовлетворить последнему соотношению достаточно (и необходимо) положить

$$\frac{dz_k}{dt} - p_k z_k = (a_{-1})_k \mu f(z, z', \dots, z^{(n-1)}; t), \quad z_k(0) = (b_{-1})_k. \quad (4.8)$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений и начальных условий (4.8), эквивалентной уравнению (4.1) и начальным условиям для этого уравнения.

Выражая $z, z', \dots, z^{(n-1)}$ через вспомогательные переменные z_k , можно перейти от f к функции, зависящей от аргументов $z_1, z_2, \dots, z_n; t$. Как следует из (4.6), $z = \sum_{k=1}^n z_k$. Необходимые выражения для производных $z', \dots, z^{(n-1)}$

могут быть получены при помощи одного соотношения для коэффициентов $(a_{-1})_k$, вывод которого опирается на рассмотрение интеграла, взятого по окружности C от функции $\frac{p^s}{L(p)}$, где s – целое неотрицательное число, не превышающее $n - 2$. Пусть радиус окружности C с центром в точке $(0, 0)$ комплексной плоскости p достаточно велик для того, чтобы внутри этой окружности лежали все особенности подынтегральной функции. Тогда упомянутый интеграл, с одной стороны, выражается через сумму вычетов функции $\frac{p^s}{L(p)}$

в точках $p = p_k$, т. е.

$$\oint_C \frac{p^s}{L(p)} dp = 2\pi j \sum_{k=1}^n (a_{-1})_k p_k^s,$$

и, с другой стороны, – равен нулю, так как подынтегральная функция при стремлении модуля p к бесконечности стремится к нулю не медленнее, чем $|p|^{-2}$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^n (a_{-1})_k p_k^s = 0. \quad (4.9)$$

Умножив дифференциальные уравнения (4.8) на p_k^s и просуммировав по k , с учетом (4.9) находим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n p_k^s z_k = \sum_{k=1}^n p_k^{s+1} z_k. \quad (4.10)$$

Полагая сначала $s = 0$, получим

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n p_k z_k. \quad (4.11)$$

Дифференцируя (4.11) по t и используя уравнение (4.10) при $s = 1$, имеем

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n p_k z_k = \sum_{k=1}^n p_k^2 z_k.$$

Аналогично для целого положительного m , не превышающего $n - 1$, можем записать

$$\frac{d^m z}{dt^m} = \sum_{k=1}^n p_k^m z_k. \quad (4.12)$$

Подставляя $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ в (4.8) и перенося малое слагаемое $-\sigma_k z_k$ в правую часть, можно с помощью (4.12) привести уравнения первого порядка к следующему виду:

$$\frac{dz_k}{dt} - j\omega_k z_k = \mu \Phi_k(z_1, z_2, \dots, z_n; t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.13)$$

Следует упомянуть также о возможности получения системы уравнений (4.13) посредством линейных алгебраических преобразований [19], т. е. без применения интегрального преобразования Лапласа.

4.2. Составление укороченных уравнений

Выберем в качестве исходной специальную форму (4.13) системы дифференциальных уравнений для вспомогательных комплексных переменных z_1, z_2, \dots, z_n . При $\mu = 0$ имеем уравнения

$$\frac{dz_k}{dt} - j\omega_k z_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.14)$$

с решениями

$$z_k(t) = z_k(0) \exp(j\omega_k t). \quad (4.15)$$

Каждому уравнению системы (4.14) можно поставить в соответствие принадлежащее той же системе другое уравнение, у которого множитель во втором слагаемом в левой части выражается комплексно сопряженным мнимым числом ($j\omega_k$ вместо $-j\omega_k$). Сумма решений этих двух уравнений, которая должна быть вещественной (в силу вещественности z , складывающегося из z_1, z_2, \dots, z_n) может быть записана в виде

$$2 \operatorname{Re}[z_k(0) \exp(j\omega_k t)],$$

т. е. $2z_k(0)$ представляет собой комплексную амплитуду гармонических колебаний с частотой ω_k .

Считая μ отличным от нуля, перейдем от z_k к новым комплексным переменным A_k , положив по аналогии с (4.15)

$$z_k = \frac{1}{2} A_k \exp(j\omega_k t). \quad (4.16)$$

Здесь коэффициенты A_k могут быть названы изменяющимися во времени комплексными амплитудами. Тогда вместо (4.13) можно записать

$$\frac{dA_k}{dt} = \mu F_k(A_1, A_2, \dots, A_n; t), \quad (4.17)$$

где

$$F_k(A_1, A_2, \dots, A_n; t) = 2 \exp(-j\omega_k t) \Phi_k \left(\frac{1}{2} A_1 \exp(j\omega_1 t), \dots, \frac{1}{2} A_n \exp(j\omega_n t); t \right) -$$

ограниченные при фиксированных t функции. В силу малости μ из (4.17) следует, что коэффициенты A_k изменяются с течением времени медленно. Поэтому их принято называть медленно меняющимися амплитудами (ММА).

Неотъемлемым элементом описываемой процедуры метода ММА является разбиение каждой функции F_k на две части, для одной из которых, обозначаемой далее как $M_k(A_1, A_2, \dots, A_n; t)$, характерна медленность изменения во времени, а другая – $F_k^{(1)}(A_1, A_2, \dots, A_n; t)$ – представляет собой состоящую из

«быстро осциллирующих» слагаемых функцию без постоянной составляющей. Последнее означает, что $\int_0^t F_k^{(1)}(A_1, A_2, \dots, A_n; t) dt$ – ограниченная функция от t при любых $t > 0$ (при интегрировании величины A_1, A_2, \dots, A_n считаются постоянными) [11]. К предположению о возможности такого разбиения сводятся упомянутые выше условия, которым должна удовлетворять функция $f(z, z', \dots, z^{(n-1)}; t)$, содержащаяся в уравнении (4.1).

Строгие обоснования [4, 11] показывают, что при малом μ допустимо и не приводит к большим погрешностям отбрасывание из (4.17) членов $\mu F_k^{(1)}$. В таком приближении, когда оставляемые медленно меняющиеся члены μM_k имеют тот же порядок малости, что и отбрасываемые быстро осциллирующие, заключается основная особенность метода ММА. В результате получается система укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{dA_k}{dt} = \mu M_k(A_1, A_2, \dots, A_n; t). \quad (4.18)$$

Примечание. Нетрудно показать, что можно проводить переход от z_k к A_k при помощи видоизмененной по сравнению с (4.16) формулы

$$z_k = \frac{1}{2} A_k \exp(j\nu_k t),$$

где ν_k отличается от ω_k на малую величину порядка μ . Такая модификация метода ММА во многих случаях целесообразна.

4.3. Процессы установления и устойчивость установившихся колебаний автономного LC-генератора

С помощью изложенного выше метода ММА могут быть проанализированы нестационарные явления в одноконтурном генераторе. Ограничиваясь схемами с нелинейным активным элементом, характеристика которого аппроксимирована кубическим полиномом, будем исходить из уравнения (2.7), записанного в следующем виде:

$$z'' + z = \mu f(z'), \quad (4.19)$$

где μ – малый по сравнению с единицей положительный параметр, штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ ,

$$f(z') = z' - \sigma(z')^2 - (z')^3.$$

Преобразуя (4.19) по Лапласу, получим соотношение

$$L(p)\bar{z} = \bar{f}, \quad (4.20)$$

в котором полином $L(p) = p^2 + 1$ имеет чисто мнимые корни $p_{1,2} = \pm j$.

Полагая, что $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, и учитывая разложение

$$\frac{1}{L(p)} = \frac{-j/2}{p-j} + \frac{j/2}{p+j},$$

запишем вытекающие из (4.20) равенства

$$(p-j)\bar{z}_1 = -\frac{j}{2}\mu\bar{f}, \quad (p+j)\bar{z}_2 = \frac{j}{2}\mu\bar{f},$$

из которых, переходя к оригиналам, получим равносильную (4.19) систему двух уравнений первого порядка

$$z'_1 - jz_1 = -\frac{j}{2}\mu f(z'), \quad (4.21)$$

$$z'_2 + jz_2 = \frac{j}{2}\mu f(z'), \quad (4.22)$$

где согласно (4.11) $z' = j(z_1 - z_2)$.

Нетрудно убедиться в том, что z_1 и z_2 являются комплексно сопряженными величинами. Поскольку сумма $z_1 + z_2$ равняется вещественной величине z , $\text{Im } z_2 = -\text{Im } z_1$. Складывая (4.21) с (4.22) и принимая во внимание вещественность суммы $z'_1 + z'_2$, получим равенство $\text{Im}[j(z_2 - z_1)] = 0$, откуда вытекает, что $\text{Re } z_2 = \text{Re } z_1$. Таким образом, $z_2 = z_1^*$.

В соответствии с методом ММА положим теперь в (4.21)

$$z_1 = \frac{1}{2} A \exp(j\tau), \quad z_2 = z_1^* = \frac{1}{2} A^* \exp(-j\tau)$$

и после умножения на $2 \exp(-j\tau)$ оставим в получившемся соотношении медленно меняющиеся члены, отбросив быстро осциллирующие слагаемые. В результате придем к укороченному уравнению

$$\frac{dA}{d\tau} = \mu \left(1 - \frac{3}{4} |A|^2 \right) \frac{A}{2}, \quad (4.23)$$

правая часть которого содержит вклады, обусловленные только входящими в правую часть (4.21) слагаемыми $\mu \frac{z_1}{2}$ и $-\mu \frac{3}{2} z_1^2 z_1^*$.

Далее выразим комплексную амплитуду A через модуль и аргумент:

$$A = \rho \exp(j\varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.23), предварительно умноженное на $\exp(-j\varphi)$, получим после деления вещественных и мнимых слагаемых вещественные укороченные уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu \left(1 - \frac{3}{4} \rho^2 \right) \frac{\rho}{2}, \quad (4.24)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \quad (4.25)$$

Решение первого из этих уравнений записывается в виде:

$$\rho(\tau) = a \left\{ 1 + \left[a^2 / \rho^2(0) - 1 \right] \exp(-\mu\tau) \right\}^{-1/2}, \quad (4.26)$$

где $a = 2/\sqrt{3}$ представляет собой амплитуду установившихся колебаний, значение которой совпадает с тем, что получено выше для автономного осциллятора Рэлея.

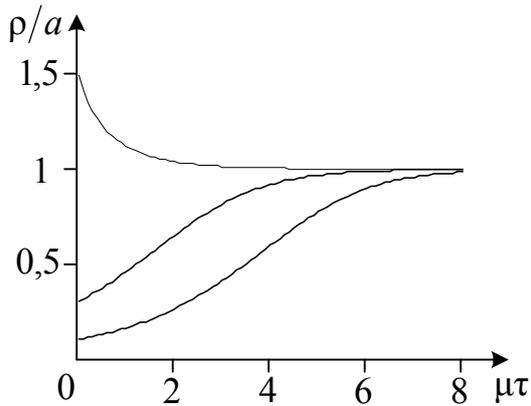


Рис.6

На рис.6 показано, как изменяется во времени амплитуда ρ в процессе установления колебаний при различных начальных значениях $\rho(0)$. Как видно из (4.26), отклонения амплитуды ρ от стационарного значения a с течением времени стремятся к нулю, на основании чего можно сделать вывод, что колебания генератора, отвечающие решению $\rho = a$, устойчивы по отношению к возмущениям амплитуды и устойчивость при этом асимптотическая.

Из укороченного уравнения (4.25) вытекает, что фазовый угол φ от времени не зависит и может иметь произвольное постоянное значение. Следовательно, в частности, приращение φ , вызванное каким-либо внешним фактором (действовавшим в течение конечного промежутка времени), не будет с течением времени ни нарастать, ни убывать. Это значит, что колебания рассматриваемого генератора устойчивы по отношению к возмущениям фазы, хотя эта устойчивость не является асимптотической.

4.4. Резонансное воздействие источника гармонических колебаний на LC – генератор (главный резонанс)

Обратимся теперь к рассмотрению неавтономного одноконтурного генератора, подвергающегося воздействию малых по амплитуде гармонических колебаний, частота ω_e которых близка к резонансной частоте ω_0 колебательного контура. Основываясь на приведенном в приложении I уравнении (I.6), где μ считается далее малым по сравнению с единицей положительным параметром, учтем внешнее воздействие на генератор, положив $\gamma = \mu\lambda \cos \Omega t$. Тогда уравнение (I.6) может быть представлено в виде:

$$z'' + z = \mu f(z', \tau), \quad (4.27)$$

где штрихом отмечена операция дифференцирования по $\tau = \omega_0 t$,

$$f(z', \tau) = z' - \sigma(z')^2 - (z')^3 + \lambda \cos \Omega \tau.$$

Для близкой к единице нормированной частоты Ω , равной отношению ω_e к ω_0 , в последующем используется выражение, содержащее малую относительную расстройку μh :

$$\Omega = 1 + \mu h. \quad (4.28)$$

Подобно тому, как это реализовано выше в случае уравнения (4.19) для автономного генератора, можно при помощи преобразования Лапласа перейти от уравнения (4.27) к равносильной ему системе уравнений первого порядка

$$z_1' - jz_1 = -\frac{j}{2} \mu f(z', \tau), \quad z_2' + jz_2 = \frac{j}{2} \mu f(z', \tau). \quad (4.29)$$

Здесь z_1, z_2 – вспомогательные комплексные переменные, сумма которых равняется z . При этом, как и ранее, $z_2 = z_1^*$, а производная $z' = j(z_1 - z_2)$.

Умножив (4.23) на $2 \exp(-j\Omega\tau)$, подставив в получившееся соотношение

$$z_1 = \frac{1}{2} A \exp(j\Omega\tau), \quad z_2 = \frac{1}{2} A^* \exp(-j\Omega\tau)$$

и удерживая после тождественных преобразований только те слагаемые, которые медленно изменяются во времени, с учетом (4.28) получим укороченное уравнение

$$\frac{dA}{d\tau} = \mu \left(1 - \frac{3}{4} |A|^2 - 2jh\right) \frac{A}{2} - j\mu \frac{\lambda}{2}.$$

Укороченные уравнения для модуля ρ и аргумента φ комплексной амплитуды A могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu P(\rho, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu Q(\rho, \varphi), \quad (4.30)$$

где

$$P(\rho, \varphi) = \left(1 - \frac{3}{4} \rho^2\right) \frac{\rho}{2} - \frac{\lambda}{2} \sin \varphi, \quad Q(\rho, \varphi) = -h - \frac{\lambda}{2\rho} \cos \varphi. \quad (4.31)$$

Для стационарных (не зависящих от времени) решений системы (4.30), обозначаемых далее ρ_0, φ_0 ,

$$P(\rho_0, \varphi_0) = 0, \quad Q(\rho_0, \varphi_0) = 0,$$

откуда с учетом (4.31) следует, что

$$\frac{\lambda}{\rho_0} \sin \varphi_0 = 1 - \frac{3}{4} \rho_0^2, \quad \frac{\lambda}{\rho_0} \cos \varphi_0 = -2h. \quad (4.32)$$

Исключая из (4.32) стационарное значение фазового угла φ_0 , получим соотношение

$$2|h| = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_0}\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4} \rho_0^2\right)^2}, \quad (4.33)$$

полезное с точки зрения выяснения характера зависимости стационарной амплитуды ρ_0 от нормированной расстройки h . При этом должны быть приняты во внимание условия устойчивости стационарного решения, которые в данном случае следующим образом записываются согласно приведенным в приложении (IV) выражениям (IV.4, IV.5):

$$P_\rho' + Q_\varphi' < 0, \quad P_\rho' Q_\varphi' - P_\varphi' Q_\rho' > 0. \quad (4.34)$$

$$\lambda^{(1)} = 2\frac{\sqrt{3}}{9}, \lambda^{(2)} = 2\frac{\sqrt{4}}{9}, \lambda^{(3)} = 2\frac{\sqrt{5}}{9}, \lambda^{(4)} = 2\frac{\sqrt{8}}{9}, \lambda^{(5)} = 2\frac{\sqrt{14}}{9}$$

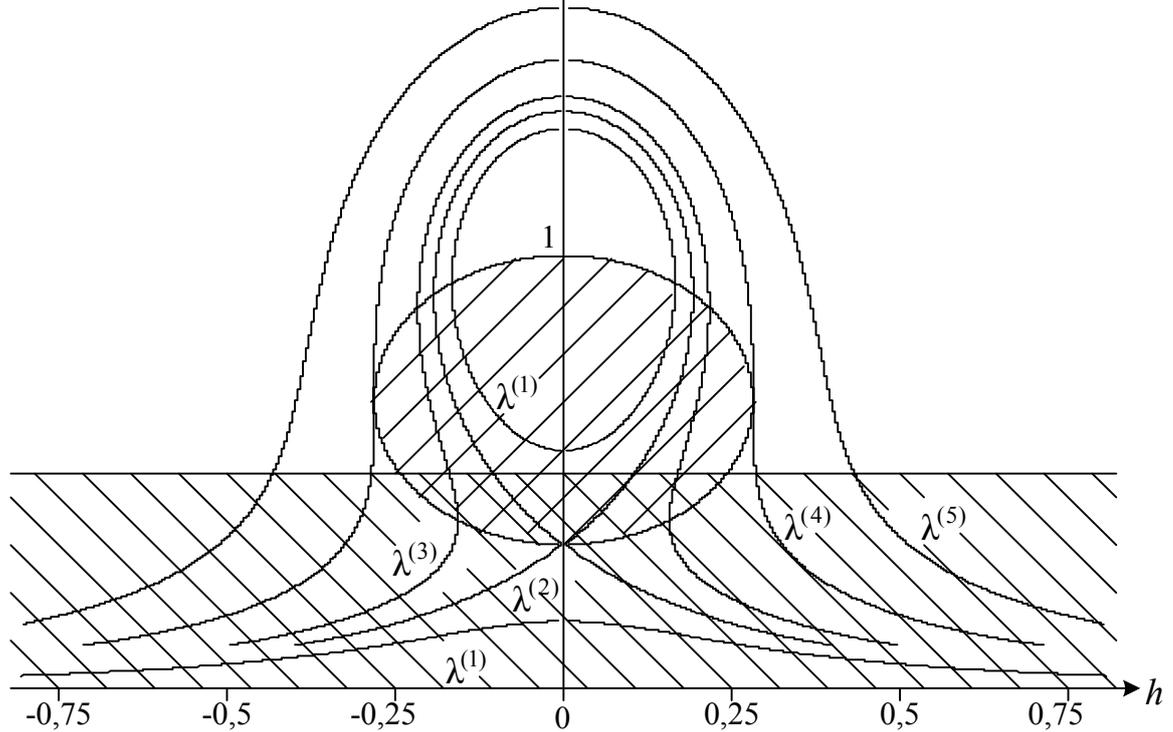


Рис.7

Вычисляя частные производные функций $P(\rho, \varphi)$ и $Q(\rho, \varphi)$ в точке ρ_0, φ_0 , имеем

$$\begin{aligned} P'_\rho &= \frac{1}{2} - \frac{9}{8}\rho_0^2, & P'_\varphi &= -\frac{\lambda}{2}\cos\varphi_0 = h\rho_0, \\ Q'_\rho &= \frac{\lambda}{2\rho_0^2}\cos\varphi_0 = -\frac{h}{\rho_0}, & Q'_\varphi &= \frac{\lambda}{2\rho_0}\sin\varphi_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\rho_0^2. \end{aligned}$$

Тогда условия (4.34) сводятся к неравенствам

$$\frac{3}{2}\rho_0^2 > 1, \quad \left(\frac{9}{4}\rho_0^2 - 2\right)^2 + 12h^2 > 1, \quad (4.35)$$

последнему из которых можно придать аналогичную (3.19) компактную форму [18]:

$$\frac{d\rho_0}{d|h|} < 0,$$

где производная $\frac{d\rho_0}{d|h|}$, равная $\left(\frac{d|h|}{d\rho_0}\right)^{-1}$, определяется из (4.33).

По результатам расчетов при помощи формулы (4.33) на рис.7 построено для различных λ семейство зависимостей ρ_0 от h . Штриховкой на этом рисунке показаны области неустойчивых решений, где нарушаются условия (4.35). Характерной особенностью устойчивых решений является то,

что они отвечают режиму гармонических (в первом приближении) колебаний LC -генератора, частота которых оказывается совпадающей с частотой внешнего источника. Внешний источник как бы навязывает автоколебательной системе частоту генерации, что соответствует режиму принудительной синхронизации, называемому также *явлением захватывания*.

4.5. Двухконтурный генератор

4.5.1. Предварительные замечания и вспомогательные соотношения

На рис.8 приведена схема автономного транзисторного генератора с колебательной системой в виде двух связанных через емкость C резонансных контуров, потери энергии в которых считаются малыми. Предполагая в последующем выполнение анализа этой схемы с помощью метода ММА, будем исходить сразу из соотношений между преобразованными по Лапласу от напряжений и токов, не записывая в явном виде полную систему дифференциальных уравнений для мгновенных значений.

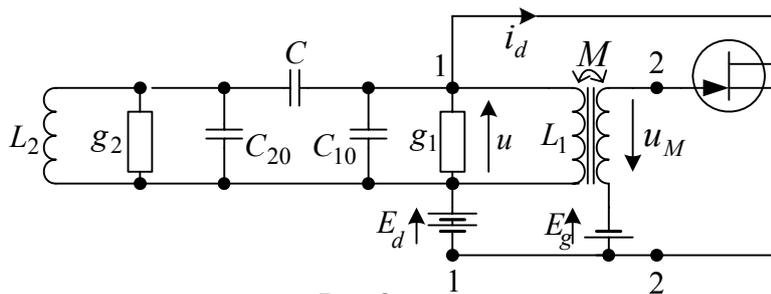


Рис.8

Для содержащихся в упомянутых соотношениях операторных адмиттансов (операторных входных проводимостей [12]) некоторых электрических цепей используются следующие обозначения:

$Y_C(p) = pC$ – операторный адмиттанс емкости связи между контурами,

$Y_{10}(p) = g_1 + pC_{10} + \frac{1}{pL_1}$, $Y_{20}(p) = g_2 + pC_{20} + \frac{1}{pL_2}$ – операторные адмиттансы параллельных соединений соответствующих резистивных, емкостных и индуктивных элементов. Тогда, считая ток затвора полевого транзистора пренебрежимо малым, можем записать, что

$$\bar{i}_d = Y(p)\bar{u}(p), \quad (4.36)$$

где $Y(p) = Y_{10}(p) + \frac{Y_C(p)Y_{20}(p)}{Y_C(p) + Y_{20}(p)}$.

Если прибегнуть к использованию операторных адмиттансов

$$Y_1(p) = Y_{10}(p) + Y_C(p), \quad Y_2(p) = Y_{20} + Y_C(p),$$

то нетрудно преобразовать $Y(p)$ к виду:

$$Y(p) = \frac{1}{Y_2(p)} [Y_1(p)Y_2(p) - Y_C^2(p)]. \quad (4.37)$$

Вводя обозначения

$$C_1 = C_{10} + C, C_2 = C_{20} + C, \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \alpha_1 = \frac{g_1}{2C_1}, \alpha_2 = \frac{g_2}{2C_2},$$

имеем

$$Y_1(p) = \frac{C_1}{p}(p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2), \quad Y_2(p) = \frac{C_2}{p}(p^2 + 2\alpha_2 p + \omega_2^2). \quad (4.38)$$

Нетрудно убедиться в том, что для выбранных на рис.8 направлений отсчета напряжений u и u_M положительная обратная связь в схеме обеспечивается при $M > 0$ и что в отсутствие тока затвора напряжение обратной связи

$$u_M = \frac{M}{L_1} u. \quad (4.39)$$

Отсюда, если учесть (4.36–4.38) и обозначить через k_C коэффициент связи между контурами ($k_C = \frac{C}{\sqrt{C_1 C_2}}$), следует, что

$$\bar{u}_M(p) = \frac{U(p)}{V(p)} \bar{i}(p), \quad (4.40)$$

где

$$V(p) = (p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2)(p^2 + 2\alpha_2 + \omega_2^2) - k_C^2 p^4, \quad (4.41)$$

$$U(p) = \omega_1^2 M p (p^2 + 2\alpha_2 p + \omega_2^2). \quad (4.42)$$

4.5.2. Переход к дифференциальным уравнениям для вспомогательных комплексных переменных

Исключая из рассмотрения случай слабой связи между контурами и принимая во внимание, что в силу малости потерь в контурах

$$\alpha_1 \ll \omega_1, \quad \alpha_2 \ll \omega_2,$$

воспользуемся найденными в приложении VI приближенными выражениями для корней полинома $V(p)$:

$$p_1 = p_3^* = j\Omega_1 - \delta_1, \quad p_2 = p_4^* = j\Omega_2 - \delta_2.$$

Вводя в употребление безразмерные величины $\eta_1 = \Omega_1^2 / \omega_1^2$, $\eta_2 = \Omega_2^2 / \omega_1^2$ и так называемую взаимную расстройку контуров $\xi = \omega_2^2 / \omega_1^2$, можно для нахождения положительных величин δ_1 и δ_2 использовать вытекающие из (VI.16, VI.19, VI.21) формулы

$$\delta_{1,2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\eta_{1,2} - \alpha_1 \xi - \alpha_2}{(1 - k_C^2)(\eta_{1,2} - \eta_{2,1})} = \frac{(\eta_{1,2} - \xi)F_{1,2}}{(1 - k_C^2)(\eta_{1,2} - \eta_{2,1})}, \quad (4.43)$$

где

$$F_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\eta_{1,2} - 1}{\eta_{1,2} - \xi}, \quad (4.44)$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2(1 - k_C^2)} \left[1 + \xi \pm \sqrt{(1 - \xi)^2 + 4k_C^2 \xi} \right]. \quad (4.45)$$

На рис.9 для трех различных k_C построены зависимости $\eta_1(\xi)$ и $\eta_2(\xi)$, образующие фрагмент известного графика Вина.

Поскольку все корни полинома $V(p)$ простые, вместо (4.40) можно записать

$$\bar{u}_M(p) = \bar{i}_d(p) \sum_{s=1}^4 \frac{(c_{-1})_s}{p - p_s}, \quad (4.46)$$

где $(c_{-1})_s$ – вычет дробно-рациональной функции $\frac{U(p)}{V(p)}$ в полюсе p_s :

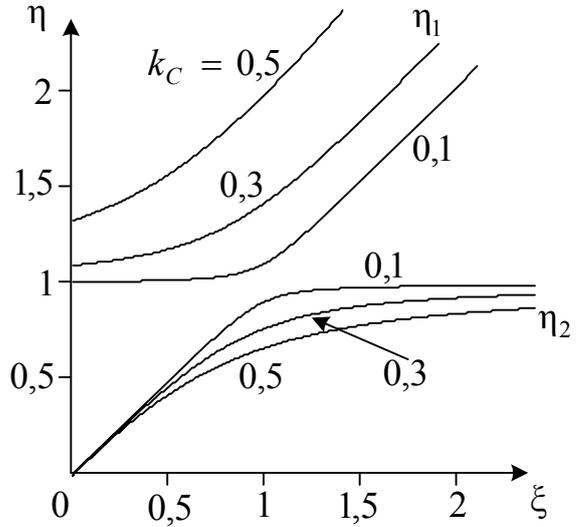


Рис.9

$$(c_{-1})_s = \frac{U(p_s)}{V'(p_s)} = \frac{\omega_1^2 M p_s (p_s^2 + 2\alpha_2 p_s + \omega_s^2)}{(1 - k_C^2) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^4 (p_s - p_r)}. \quad (4.47)$$

При приближенном нахождении вычетов $(c_{-1})_s$ с помощью формулы (4.47) будем считать $\delta_1, \delta_2, \alpha_2$ пренебрежимо малыми величинами. Тогда, учитывая также (4.43),

$$(c_{-1})_1 = (c_{-1})_3 = \frac{\omega_1^2 M (\eta_1 - \xi)}{2(1 - k_C^2)(\eta_1 - \eta_2)} = \frac{\omega_1^2 M}{2} \frac{\delta_1}{F_1}, \quad (4.48)$$

$$(c_{-1})_2 = (c_{-1})_4 = \frac{\omega_1^2 M (\xi - \eta_2)}{2(1 - k_C^2)(\eta_1 - \eta_2)} = \frac{\omega_1^2 M}{2} \frac{\delta_2}{F_2}. \quad (4.49)$$

Выражая напряжение u_M суммой вспомогательных комплексных переменных z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$u_M = \sum_{s=1}^4 z_s,$$

положим на основании (4.46)

$$\bar{z}_s(p) = \frac{(c_{-1})_s}{p - p_s} \bar{i}_d(p),$$

откуда следует, что

$$(p - p_s) \bar{z}_s(p) = (c_{-1})_s \bar{i}_d(p), \quad s = 1, 2, 3, 4. \quad (4.50)$$

Переходя к оригиналам, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz_s}{dt} - p_s z_s = (c_{-1})_s i_d, \quad s = 1, 2, 3, 4, \quad (4.51)$$

в отношении правых частей которых утверждается, что они могут быть представлены произведениями малого параметра на нелинейные функции. Как можно показать, $z_3 = z_1^*$, $z_4 = z_2^*$.

Ток стока i_d предполагается однозначной функцией напряжений u_g и u_d , которые с учетом (4.39) следующим образом (см. рис.8) выражаются через напряжение u_M :

$$u_g = E_g + u_M, \quad u_d = E_d - \frac{L_1}{M} u_M.$$

При фиксированных E_g , E_d , L_1 и M ток i_d может считаться однозначной функцией u_M . В последующем эта функция приближенно представляется кубическим полиномом:

$$i_d(u_M) = a_0 + a_1 u_M + a_2 u_M^2 + a_3 u_M^3, \quad (4.52)$$

где $a_1 > 0$, $a_3 < 0$ и $u_M = 2 \operatorname{Re}(z_1 + z_2)$.

4.5.3. Составление укороченных уравнений

Выбирая из (4.51) первые два уравнения

$$\frac{dz_1}{dt} - j\Omega_1 z_1 = (c_{-1})_1 i_d - \delta_1 z_1, \quad (4.53)$$

$$\frac{dz_2}{dt} - j\Omega_2 z_2 = (c_{-1})_2 i_d - \delta_2 z_2, \quad (4.54)$$

положим в них в соответствии с методом ММА

$$z_1 = \frac{1}{2} A_1 \exp(j\Omega_1 t), \quad z_2 = \frac{1}{2} A_2 \exp(j\Omega_2 t). \quad (4.55)$$

Далее предполагается, что частоты Ω_1 и Ω_2 не находятся в рациональном отношении. Принимая во внимание сделанные предположения, можно записать для i_d следующее разложение по гармоникам, состоящее из конечного числа членов [11, 18]:

$$i_d = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \dot{I}_{mn} \exp[j(m\Omega_1 + n\Omega_2)t], \quad (4.56)$$

где $|m| + |n| \leq 3$, $\dot{I}_{-m,-n} = \dot{I}_{m,n}^*$; при $\omega_{mn} = m\Omega_1 + n\Omega_2 > 0$ коэффициент $\dot{I}_{m,n}$ является комплексной амплитудой гармонической компоненты, изменяющейся с частотой ω_{mn} . Если воспользоваться вводимыми для транзистора средними крутизнами $S_1(|A_1|, |A_2|)$ и $S_2(|A_1|, |A_2|)$ [11, 18], выражения комплексных амплитуд тока, которым отвечают частоты Ω_1 и Ω_2 , можно представить в следующем виде:

$$\dot{I}_{10} = S_1(|A_1|, |A_2|)A_1, \quad \dot{I}_{01} = S_2(|A_1|, |A_2|)A_2, \quad (4.57)$$

где при аппроксимации зависимости тока стока от напряжения u_M кубическим полиномом (4.52)

$$S_1(|A_1|, |A_2|) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2),$$

$$S_2(|A_1|, |A_2|) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2).$$

Имея в виду (4.56), умножим после подстановки (4.55) уравнение (4.53) на $2 \exp(-j\Omega_1 t)$, уравнение (4.54) на $2 \exp(-j\Omega_2 t)$. Выполнив тождественные преобразования и отбросив «быстро осциллирующие слагаемые», получим укороченные уравнения

$$\frac{dA_1}{dt} = (c_{-1})_1 \dot{I}_{10} - \delta_1 A_1, \quad \frac{dA_2}{dt} = (c_{-1})_2 \dot{I}_{01} - \delta_2 A_2, \quad (4.58)$$

где в последующем удобно заменить δ_1 и δ_2 выражениями, вытекающими из (4.48, 4.49):

$$\delta_1 = \frac{2(c_{-1})_1 F_1}{\omega_1^2 M}, \quad \delta_2 = \frac{2(c_{-1})_2 F_2}{\omega_1^2 M}. \quad (4.59)$$

Подставляя в (4.58) $A_1 = \rho_1 \exp(j\varphi_1)$, $A_2 = \rho_2 \exp(j\varphi_2)$ и учитывая (4.57, 4.59), нетрудно перейти к системе четырех вещественных укороченных уравнений. Ограничиваясь только уравнениями, содержащими производные $\frac{d\rho_1}{dt}$ и $\frac{d\rho_2}{dt}$, можем записать

$$\frac{d\rho_1}{dt} = P(\rho_1, \rho_2), \quad \frac{d\rho_2}{dt} = Q(\rho_1, \rho_2), \quad (4.60)$$

где

$$P(\rho_1, \rho_2) = (c_{-1})_1 \rho_1 \left[S_1(\rho_1, \rho_2) - \frac{2F_1}{\omega_1^2 M} \right], \quad (4.61)$$

$$Q(\rho_1, \rho_2) = (c_{-1})_2 \rho_2 \left[S_2(\rho_1, \rho_2) - \frac{2F_2}{\omega_1^2 M} \right]. \quad (4.62)$$

4.5.4. Стационарные решения укороченных уравнений. Устойчивость стационарных решений

Уравнениям (4.60) удовлетворяют четыре варианта стационарных (не зависящих от времени) решений:
тривиальное решение $\rho_1 = \rho_2 = 0$, отвечающее состоянию равновесия, т. е. отсутствию колебаний;
решения, в случае которых равняется нулю только какая-нибудь одна вещественная амплитуда (ρ_1 или ρ_2), что означает реализацию в схеме одного из двух одночастотных (одномодовых) режимов;

решение, соответствующее двухчастотному (двухмодовому) режиму, когда как ρ_1 , так и ρ_2 одновременно отличны от нуля.

Для выяснения условий, при выполнении которых устойчив тот или иной режим можно воспользоваться полученными в приложении IV общими соотношениями, которые в данном случае приводятся к виду:

$$P'_{\rho_1} + Q'_{\rho_2} < 0, \quad (4.63)$$

$$P'_{\rho_1} Q'_{\rho_2} - P'_{\rho_2} Q'_{\rho_1} > 0. \quad (4.64)$$

Покажем сначала, что в случае зависимости тока стока транзистора от u_M , аппроксимируемой кубическим полиномом, двухчастотный режим неустойчив. Стационарные амплитуды ρ_{10} и ρ_{20} , отвечающие этому режиму, связаны уравнениями

$$S_1(\rho_{10}, \rho_{20}) = \frac{2F_1}{\omega_1^2 M}, \quad S_2(\rho_{10}, \rho_{20}) = \frac{2F_2}{\omega_1^2 M}. \quad (4.65)$$

Вычисляя частные производные функций $P(\rho_1, \rho_2)$ и $Q(\rho_1, \rho_2)$ по ρ_1 и ρ_2 при $\rho_1 = \rho_{10} \neq 0$, $\rho_2 = \rho_{20} \neq 0$ с учетом (4.61, 4.62, 4.65) имеем

$$P'_{\rho_1} = (c_{-1})_1 \frac{3}{2} a_3 \rho_{10}^2, \quad P'_{\rho_2} = (c_{-1})_1 3a_3 \rho_{10} \rho_{20},$$

$$Q'_{\rho_1} = (c_{-1})_2 3a_3 \rho_{10} \rho_{20}, \quad Q'_{\rho_2} = (c_{-1})_2 \frac{3}{2} a_3 \rho_{20}^2.$$

Как легко видеть, подстановка этих выражений в (4.64) дает отрицательную величину в правой части, т. е. при соответствующей мягкой характеристике аппроксимации вида (4.52) условие (4.64) для двухчастотного режима не выполняется.

Рассмотрим теперь условия устойчивости одночастотных режимов. Одному из них соответствует $\rho_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_{10} \neq 0$, другому – $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho_{20} \neq 0$. При этом отличные от нуля амплитуды ρ_{10} и ρ_{20} определяются из уравнений

$$S_1(\rho_{10}, 0) = \frac{2F_1}{\omega_1^2 M}, \quad (4.66)$$

$$S_2(0, \rho_{20}) = \frac{2F_2}{\omega_1^2 M}. \quad (4.67)$$

Поскольку, как видно из (4.62), в случае первого из рассматриваемых одночастотных режимов $Q'_{\rho_1} = 0$, условия устойчивости (4.63, 4.64) сводятся для него к неравенствам $P'_{\rho_1} < 0$, которое при $a_3 < 0$ выполнено, и $Q'_{\rho_2} < 0$. Последнее, учитывая (4.62), может быть заменено равносильным неравенством

$$S_2(\rho_{10}, 0) < \frac{2F_2}{\omega_1^2 M}. \quad (4.68)$$

Выполнение условия (4.68) заведомо обеспечивается, если $S_2(0, 0) < \frac{2F_2}{\omega_1^2 M}$, что, в частности, означает отсутствие ненулевых решений уравнения (4.67).

В случае, когда имеется отличное от нуля решение ρ_{20} , условие (4.68) можно преобразовать к виду $S_2(\rho_{10}, 0) < S_2(0, \rho_{20})$. Из этого неравенства, если учесть выражения для средних крутизн, выводится следующее условие устойчивости одночастотного режима колебаний с частотой Ω_1 :

$$\rho_{10} > \frac{\rho_{20}}{\sqrt{2}}, \quad (4.69)$$

применимое в интервале значений взаимной расстройки ξ , при которых имеются отличные от нуля решения уравнений (4.66, 4.67) для стационарных амплитуд ρ_{10} , ρ_{20} . Справедливое в упомянутом интервале условие устойчивости одночастотного режима, соответствующего моде с частотой Ω_2 , выглядит аналогично:

$$\rho_{20} > \frac{\rho_{10}}{\sqrt{2}}. \quad (4.70)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Дифференциальные уравнения схем с LC -контуром и безынерционным нелинейным элементом

I.1. Колебательный контур, шунтированный нелинейным резистором, и дуальная схема

В изображенной на рис.10 схеме ток i через нелинейный резистор НЛ предполагается однозначной функцией напряжения u , аппроксимируемой кубическим полиномом:

$$i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad (I.1)$$

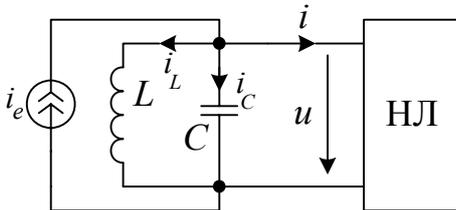


Рис.10

где a_0 , a_1 , a_2 , a_3 – постоянные коэффициенты, причем коэффициент a_3 в последующем считается положительным. Идеальным источником тока i_e учитываются возможные внешние воздействия. С помощью приведенной схемы, построенной из идеализированных элементов, удобно проводить анализ процессов, которые могут протекать в целом ряде конкретных

устройств, содержащих LC -контур. При этом предполагается, в частности, что потери энергии в реальном колебательном контуре учитываются посредством параллельно подключенного постоянного сопротивления, которое отнесено к схеме двухполюсника НЛ с соответствующей корректировкой коэффициента a_1 в аппроксимирующей функции (I.1).

Подобным же образом осуществляется учет того обстоятельства, что имеющиеся в действительности источники внешнего воздействия не являются источниками тока с бесконечным внутренним сопротивлением. Если, например, допустима замена реального источника параллельным соединением идеального источника тока и постоянного резистивного элемента, то последний включается в состав двухполосника НЛ, что также должно найти отражение в значении коэффициента a_1 .

Для вывода дифференциальных уравнений воспользуемся прежде всего первым законом Кирхгофа, согласно которому сумма токов, протекающих через индуктивность, емкость и резистор, равняется току i_e :

$$i_L + i_C + i = i_e.$$

Выражая ток i_L через полный магнитный поток (потокосцепление) ψ , а ток i_C через производную напряжения u по времени, имеем

$$\frac{\psi}{L} + C \frac{du}{dt} + i(u) = i_e. \quad (I.2)$$

Умножая последнее соотношение на L , учитывая (I 1) и используя выражение для напряжения на индуктивности через производную по времени от потокосцепления:

$$u = \frac{d\psi}{dt}, \quad (I.3)$$

получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2\psi}{dt^2} + \psi + L \left[a_0 + a_1 \frac{d\psi}{dt} + a_2 \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + a_3 \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^3 \right] = Li_e. \quad (I.4)$$

Перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, где через ω_0 обозначена резонансная частота LC -контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Введем также безразмерные величины z и γ вместо соответственно ψ и i_e . При положительном коэффициенте a_1 определим z и γ согласно формулам:

$$z = \omega_0 (\psi + La_0) \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}, \quad \gamma = \omega_0 Li_e \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

Тогда путем умножения на $\omega_0 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$ уравнение (I.4) можно привести к виду:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z + \mu \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 + \sigma \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 + \frac{dz}{d\tau} \right] = \gamma, \quad (I.5)$$

где $\mu = a_1 \omega_0 L$, $\sigma = \frac{a_2}{\sqrt{a_1 a_3}}$.

В случае отрицательного a_1 положим, что $a_1 = -g$, $z = \omega_0(\psi + La_0)\sqrt{\frac{a_3}{g}}$,

$\gamma = \omega_0 Li_e \sqrt{\frac{a_3}{g}}$, и, умножая (I.4) на $\omega_0 \sqrt{\frac{a_3}{g}}$, получим

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z + \mu \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 + \sigma \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 - \frac{dz}{d\tau} \right] = \gamma, \quad (\text{I.6})$$

где $\mu = g\omega_0 L$, $\sigma = \frac{a_2}{\sqrt{ga_3}}$.

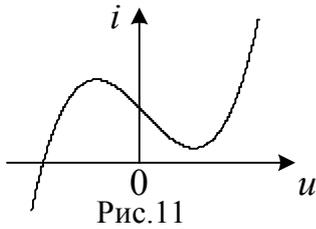


Рис.11

Заметим, что при $a_1 < 0$ некоторому интервалу значений u , включающему точку $u = 0$, отвечает падающий участок зависимости $i(u)$. Пример подобной зависимости, содержащей участок отрицательного дифференциального сопротивления, приведен на рис.11. Благодаря отрицательному сопротивлению двухполюсника НЛ рассматриваемая схема (рис.10)

способна сама в отсутствие переменных внешних воздействий создавать (генерировать) незатухающие колебания, т. е. является автоколебательной системой [11, 14, 18]. Из сказанного следует, что при $a_1 < 0$ и $a_3 > 0$ эта схема представляет собой LC – генератор на двухполюснике с N – образной вольт-амперной характеристикой [19].

В частном случае, когда $\sigma = \gamma = 0$, из (I.6) вытекает уравнение Рэля [26]:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \mu \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \frac{dz}{d\tau} + z = 0. \quad (\text{I.7})$$

Умножая на $\sqrt{3}$ соотношение, получаемое после дифференцирования (I.7) по τ , и вводя новую переменную

$$\zeta = \sqrt{3} \frac{dz}{d\tau} = u \sqrt{\frac{3a_3}{g}},$$

придем к уравнению Ван дер Поля [2, 10]:

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \mu(\zeta^2 - 1) \frac{d\zeta}{d\tau} + \zeta = 0. \quad (\text{I.8})$$

Обратимся теперь к изображенной на рис.12 схеме, содержащей нелинейный двухполюсник, в отношении которого предполагается, что у него в отличие от предыдущего не ток – однозначная функция напряжения, а напряжение u выражается однозначной функцией тока i . Если эта функция $u(i)$ получается из первоначальной зависимости i от u (см., например, рис.11) одновременной заменой i на u и u на i , то представленная на рис.12 схема является дуальным аналогом схемы, приведенной на рис.10.

Если обозначить через q заряд емкости C , то дифференциальные уравнения схемы с двухполюсником S -типа

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + u(i) = e,$$

можно получить либо непосредственно, основываясь на теории цепей, либо преобразуя уравнения (I.2, I.3) путем замены u на i , i на u , C на L , L на C и ψ на q , i_e на e .

Благодаря дуальности многие результаты анализа одной из схем могут использоваться при рассмотрении другой. В частности, при аппроксимации функции $u(i)$, соответствующей характеристике S -типа, кубическим полиномом без квадратичного члена из последней системы двух дифференциальных уравнений первого порядка нетрудно получить уравнения Рэлея и Ван дер Поля.

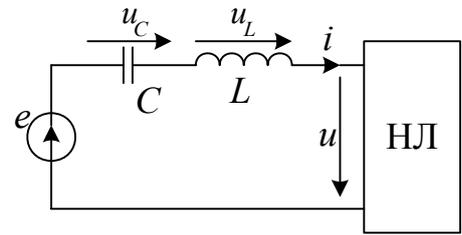


Рис.12

I.1.2. Транзисторный LC-генератор с трансформаторной обратной связью

Покажем теперь, что к полученным выше дифференциальным уравнениям можно при некоторых условиях свести дифференциальные уравнения одноконтурного транзисторного генератора с индуктивной (трансформаторной) обратной связью (рис.13). Обозначая через ψ потокосцепление контурной катушки, имеем для напряжения на контуре u то же выражение (I.3), что и в случае схемы, представленной на рис.10. Допустим, что ток затвора полевого транзистора пренебрежимо мал. Тогда $\psi = Li_L$ и, следовательно,

$$u = L \frac{di_L}{dt}. \quad (I.9)$$

Принятое допущение означает также, что на затворах включенной в цепь затвора катушки обратной связи напряжение

$$u_M = M \frac{di_L}{dt}. \quad (I.10)$$

Из (I.9, I.10) вытекает, что в таком случае

$$u_M = \frac{M}{L} u,$$

а напряжение между затвором и истоком

$$u_g = E_g + u_M = E_g + \frac{M}{L} u. \quad (I.11)$$

В соответствии с обозначениями, указанными на рис.13, напряжение между стоком и истоком

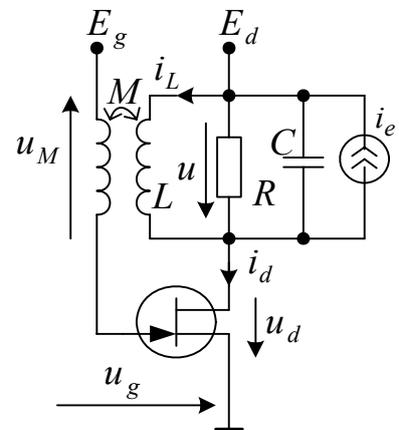


Рис.13

$$u_d = E_d - u. \quad (I.12)$$

Предположим, что ток стока i_d – однозначная функция напряжений u_g и u_d . При фиксированных E_g , E_d , M и L его можно, принимая во внимание (I.11, I.12) считать однозначной функцией одной переменной величины u .

Согласно первому закону Кирхгофа

$$C \frac{du}{dt} + i_L + \frac{u}{R} - i_d(u) = i_e. \quad (I.13)$$

Обозначая разность между током через резистивный элемент R и током стока через $i(u)$ и выражая ток i_L через потокосцепление ψ , приходим к уравнению (I.2). Предполагая допустимой аппроксимацию $i(u)$ кубическим полиномом (I.1) с положительным коэффициентом при старшей степени, можно при $a_1 < 0$ привести дифференциальное уравнение транзисторного генератора к виду (I.6). Как показывает специальное рассмотрение, отрицательность коэффициента a_1 обеспечивается при условии, что

$$\frac{M}{L} g_{21} > \frac{1}{R} + g_{22}, \quad (I.14)$$

где g_{21} , g_{22} – определенные при $u_g = E_g$ и $u_d = E_d$ дифференциальные (малосигнальные) параметры полевого транзистора (g_{21} , $g_{22} > 0$). Неравенство (I.14) называется условием самовозбуждения транзисторного генератора.

II. Уравнение Дуффинга

Изображенная на рис.14 симметричная механическая конструкция состоит из двух одинаковых пружин с неподвижно закрепленными крайними концами и присоединенного к другим концам пружин недеформируемого те

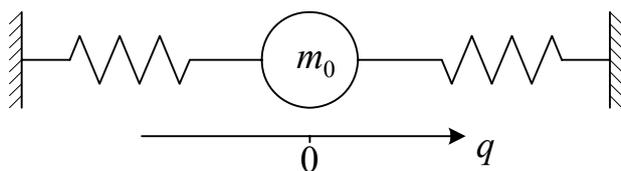


Рис.14

ла массы m_0 . Предполагается, что это тело может перемещаться лишь вдоль линии, параллельной координатной оси q . Изменения состояния рассматриваемой системы во времени можно анализировать с помощью следующего дифференциального

уравнения, выражающего второй закон Ньютона:

$$m_0 \frac{d^2 q}{dt^2} = F(q). \quad (II.1)$$

В отсутствие внешних воздействий, если также пренебречь диссипацией энергии, под $F(q)$ понимается возвращающая сила, обусловленная упругими свойствами пружин. Из-за симметрии структуры эта сила выражается нечетной функцией координаты q : $F(q) = -F(-q)$. В последующем используется приближенное представление функции $F(q)$ кубическим полиномом:

$$F(q) = -kq - sq^3, \quad (\text{II.2})$$

причем коэффициенты k и s считаются положительными, т. е. рассматривается только вариант с жесткими пружинами. При малых по сравнению с $\frac{k}{s}$ значениях q^2 сила $F(q) \approx -kq$, что согласуется с законом Гука и позволяет перейти (в первом приближении) от (II.1) к уравнению гармонического осциллятора (линейного осциллятора без потерь):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{k/m_0}$ – частота колебаний.

Не ограничиваясь случаем малых q^2 , изменим форму записи исходного уравнения. Для этого, умножая (II.1) на $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{s}{k}}$, введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и безразмерную переменную $z = q \sqrt{\frac{s}{k}}$, после чего, принимая во внимание (II.2), придем к соотношению

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z + z^3 = 0, \quad (\text{II.3})$$

называемому уравнением Дуффинга. Это уравнение представляет собой математическую модель одной из разновидностей нелинейных осцилляторов, именуемой консервативным осциллятором Дуффинга.

Учет имеющихся в реальной системе потерь энергии сводится по большей части к добавлению в исходное соотношение диссипативного члена, пропорционального производной $\frac{dq}{dt}$. В таком случае уравнение Дуффинга может быть приведено к виду:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \mu \frac{dz}{d\tau} + z + z^3 = 0, \quad (\text{II.4})$$

где μ – положительный безразмерный коэффициент, который служит мерой диссипации и в большинстве задач считается много меньшим единицы.

Предположим теперь, что кроме упругой силы $F(q)$ на тело массы m_0 , входящее в состав рассматриваемой структуры, воздействует еще какая-нибудь внешняя сила. Дополнительный член, которым в уравнении Дуффинга учитывается эта сила, записывается далее в правой части:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \mu \frac{dz}{d\tau} + z + z^3 = \gamma. \quad (\text{II.5})$$

Помимо конструкции, представленной на рис.14, имеются и другие системы, математические модели которых сводятся при определенных допущениях к уравнению Дуффинга. В качестве одного из примеров можно

привести электрический колебательный контур с нелинейной индуктивностью, реализуемой при помощи катушки с ферромагнитным сердечником [8, 19].

III. Собственные колебания консервативного осциллятора Дуффинга

По характеру решений уравнения (II.3), можно составить представление об основных свойствах собственных колебаний консервативного осциллятора Дуффинга. Умножив (II.3) на $2 \frac{dz}{d\tau}$, получим после тождественных преобразований соотношение

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 + z^2 + \frac{z^4}{2} \right] = 0. \quad (\text{III.1})$$

Как видно из (III.1), стоящая в квадратных скобках сумма не зависит от времени. Приравняем эту сумму тому значению, которое она принимает в точке, где $\frac{dz}{d\tau} = 0$, а z достигает максимума или минимума, обозначаемых соответственно через b и $-b$:

$$\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 + z^2 + \frac{z^4}{2} = b^2 + \frac{b^4}{2}. \quad (\text{III.2})$$

Из (III.2) следует, что

$$\frac{dz}{d\tau} = \pm \sqrt{(b^2 - z^2) \left(1 + \frac{b^2 + z^2}{2} \right)}. \quad (\text{III.3})$$

Предполагая, что z первоначально уменьшается, выберем в (III.3) нижний знак перед радикалом и перейдем от z к новой переменной ψ согласно формуле $z = b \cos \psi$. Вводя обозначение $m = \frac{b^2}{2(1 + b^2)}$, преобразуем (III.3) в соотношение

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{(1 + b^2)(1 - m \sin^2 \psi)},$$

равносильное равенству

$$\sqrt{1 + b^2} d\tau = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \psi}}. \quad (\text{III.4})$$

Пусть при $\tau = 0$ переменная ψ также равна нулю, что соответствует максимуму z . Тогда, интегрируя (III.4), получим

$$\sqrt{1 + b^2} \tau = u(\psi, m), \quad (\text{III.5})$$

где через $u(\psi, m)$ обозначена специальная функция, именуемая неполным эллиптическим интегралом первого рода [1]:

$$u(\psi, m) = \int_0^\psi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (\text{III.6})$$

Выражением

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (\text{III.7})$$

определяется полный эллиптический интеграл первого рода. Вместо положительного параметра m в определениях приведенных функций часто используется величина $k = \sqrt{m}$, называемая модулем эллиптического интеграла. Из (III.6) и (III.7), в частности, вытекает, что

$$u(\psi, 0) = \psi, \quad K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad K\left(\frac{1}{4}\right) \approx 1,69, \quad K\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,85.$$

Как нетрудно убедиться, если n – произвольное целое число, то

$$u\left(n \frac{\pi}{2}, m\right) = nK(m).$$

Задавая фиксированное значение m , можно видеть, что $u(\psi, m)$ – непрерывная при всех значениях ψ функция, а ее производная $\frac{\partial u}{\partial \psi}$ всегда положительна. Отсюда следует, что ψ является однозначной непрерывной функцией от u . Для этой функции, введенной Якоби и называемой амплитудой от u принято обозначение $\text{am}(u, m)$, т. е. $\psi = \text{am}(u, m)$. Если $u = nK(m)$, то

$\text{am}(u, m)$ принимает значения $n \frac{\pi}{2}$, соответствующие точкам пересечения графика этой функции с прямой линией $\frac{\pi u}{2K(m)}$. Отклонение δ_{am} графика $\text{am}(u, m)$ от упомянутой прямой представляется осциллирующей функцией u , что

для $m = \frac{1}{2}$ и $m = \frac{1}{4}$ иллюстрируется рис.15.

Выражение

$$\text{cn}(u, m) = \cos(\text{am}(u, m))$$

определяет эллиптический косинус от u , являющийся одной из трех введенных Якоби эллиптических функций [1, 8]. Функция $\text{cn}(u, m)$ – периодическая

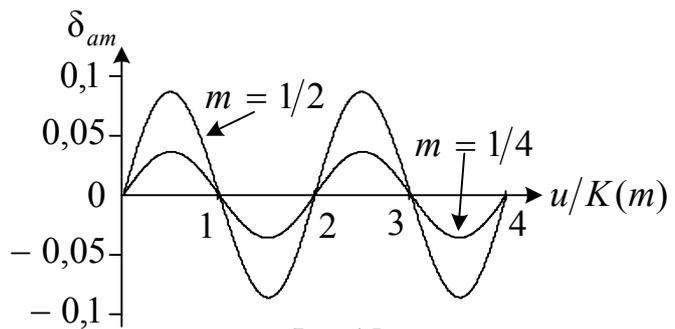


Рис.15

с периодом $4K(m)$. Это следует из того, что при изменении ψ на 2π аргумент u изменяется на $4K$. Очевидно, что $\operatorname{cn}(u, 0) = \cos u$.

С учетом сказанного можно следующим образом представить зависимость z от безразмерного времени τ для собственных колебаний консервативного осциллятора Дуффинга:

$$z(\tau) = b \operatorname{cn}(\sqrt{1 + b^2} \tau, m),$$

где при выбранном способе отсчета τ максимальное значение b совпадает с начальным значением $z(0)$, а $m = \frac{b^2}{2(1 + b^2)}$.

Период собственных колебаний (по τ) вычисляется по формуле $\frac{4K(m)}{\sqrt{1 + b^2}}$, из которой, в частности, при $b \gg 1$ для периода получается при-

ближенная оценка $\frac{4}{b} K\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{7,4}{b}$.

Используя степенной ряд, получаемый для $K(m)$ из (III.7),

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \dots \right],$$

нетрудно показать, что в случае, когда $b \ll 1$, период колебаний в первом приближении равен $2\pi(1 - \frac{3}{8}b^2)$.

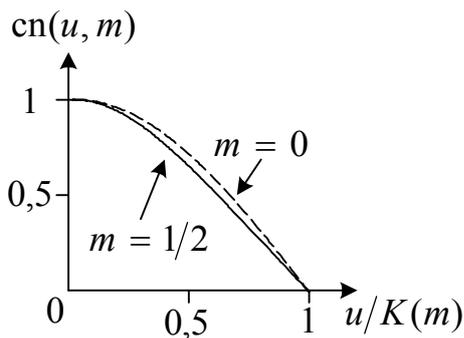


Рис.16

При очень малых b собственные колебания консервативного осциллятора Дуффинга практически не отличаются по форме от гармонических колебаний. О характере искажения формы колебаний при больших b можно судить по графику первой четверти цикла изменения эллиптической функции $\operatorname{cn}(u, 0,5)$ (сплошная линия на рис.16). Чем больше m , тем более быстрым оказывается изменение $\operatorname{cn}(u, m)$ вблизи экстремумов. По-

следний вывод согласуется также с характером зависимости δ_{am} от u (рис.15).

IV. Условия (признаки) асимптотической устойчивости стационарных решений нелинейной системы второго порядка

Рассмотрение возможности существования различных режимов некоторых динамических систем сводится во многих случаях к анализу устойчивости стационарных, т. е. не зависящих от времени t , решений системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dX}{dt} = P(X, Y), \quad \frac{dY}{dt} = Q(X, Y). \quad (\text{IV.1})$$

С целью получения ответа на вопрос, устойчиво или неустойчиво стационарное решение x, y этой системы по отношению к малым возмущениям, воспользуемся процедурой линеаризации. Для этого положим в (IV.1)

$$X = x + \xi, \quad Y = y + \eta$$

где ξ, η – вещественные функции t , которые описывают отклонения переменных X и Y от стационарных значений x и y , удовлетворяющих уравнениям

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Учитывая (IV.2) и отбрасывая в правых частях уравнений (IV.1) величины, порядок малости которых выше, чем у ξ и η , в первом приближении имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = P'_X \xi + P'_Y \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = Q'_X \xi + Q'_Y \eta, \quad (\text{IV.3})$$

где частные производные от P и Q по X и Y вычисляются в точке (x, y) .

Как следует из теории дифференциальных уравнений, общее решение полученной системы линейных уравнений первого приближения с течением времени стремится к нулю тогда и только тогда, когда отрицательны вещественные части обеих корней (λ_1, λ_2) ее характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (P'_X + Q'_Y)\lambda + P'_X Q'_Y - P'_Y Q'_X = 0.$$

Записывая выражения для λ_1 и λ_2 (либо при помощи теоремы Гурвица [12]), нетрудно показать, что сформулированное требование выполняется лишь в том случае, если одновременно справедливы два неравенства:

$$P'_X + Q'_Y < 0, \quad (\text{IV.4})$$

$$P'_X Q'_Y - P'_Y Q'_X > 0. \quad (\text{IV.5})$$

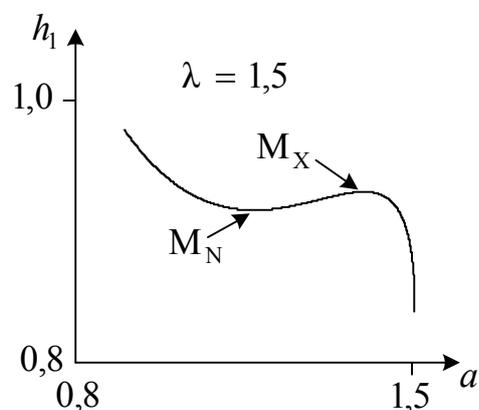
Принимая во внимание выводы, вытекающие из работ А.М.Ляпунова по общей теории устойчивости движения [9, 11], можно утверждать, что эти неравенства являются условиями (признаками) асимптотической устойчивости стационарного решения x, y уравнений (IV.1). Заметим также, что при добавлении в правые части уравнений (IV.1) одного и того же постоянного положительного множителя условия (IV.4, IV.5) останутся прежними.

V. К зависимости формы резонансной кривой неавтономного осциллятора Дуффинга от амплитуды внешней силы

Начальный этап процедуры расчета резонансных кривых осциллятора Дуффинга, базирующейся на формуле (3.17), сводится к нахождению при фиксированных значениях λ зависимостей $h_1(a)$ и $h_2(a)$, отвечающих соответственно верхнему и нижнему знакам перед радикалом:

$$h_{1,2}(a) = \frac{3}{8} a^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{a^2} - 1}.$$

Легко видеть, что $h_2(a)$ – функция, монотонно возрастающая (до тех пор, пока выражение под радикалом остается неотрицательным) при любых λ . В то же время, как показывают вычисления, h_1 монотонно убывает с ростом нормированной амплитуды a лишь при λ , меньших некоторого граничного значения $\hat{\lambda}$. Для больших, чем $\hat{\lambda}$, амплитуд внешней силы функция $h_1(a)$ оказывается немонотонной и ее график содержит точку максимума M_X и точку минимума M_N (рис.17), в которых производная $\frac{dh_1}{da}$ обращается в нуль. Основываясь на том, что при $\lambda = \hat{\lambda}$ равенство этой производной нулю обеспечивается только в одной точке – точке перегиба кривой $h_1(a)$, найдем значение $\hat{\lambda}$



Обозначая выражение под знаком радикала в приведенной выше формуле через R , имеем

$$\frac{dh_1}{da} = \frac{3}{4} a - \frac{\lambda^2}{2a^3} R^{-1/2}, \quad \frac{d^2h_1}{da^2} = \frac{3}{4} + \frac{3\lambda^2}{2a^4} R^{-1/2} - \frac{\lambda^4}{2a^6} R^{-3/2}.$$

Принимая во внимание, что в точке перегиба вторая производная обращается в нуль, и учитывая равенство нулю первой производной, придем к двум соотношениям, исключая из которых амплитуду a , получим, что

$$\hat{\lambda} = 2^{5/2} 3^{-5/4} \approx 1,433.$$

Переходя от функций $h_1(a)$ и $h_2(a)$ к обратным функциям $a(h_1)$ и $a(h_2)$, которыми (с учетом условий устойчивости) определяется форма резонансной кривой, можно на основании проведенного рассмотрения сделать вывод, что при $\lambda < \hat{\lambda}$ имеет место однозначная зависимость амплитуды вынужденных колебаний осциллятора от частоты, а при $\lambda > \hat{\lambda}$ в некотором частотном интервале получаются два возможных (устойчивых) значения амплитуды (см. рис.5).

VI. Собственные колебания в системе двух связанных LC – контуров при малой диссипации

На рис.18 изображены два колебательных контура, связанных через емкость C . Диссипация (рассеяние энергии) в контурах считается незначительной и учитывается введенными в схему шунтирующими резистивными элементами, проводимости которых g_1 и g_2 предполагаются малыми. При составлении дифференциальных уравнений данной схемы выберем в качестве искомым величин напряжения u_{C1}, u_{C2} и токи i_{L1}, i_{L2} .

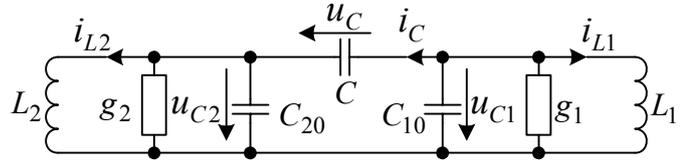


Рис.18

Предварительно запишем выражения для напряжения на емкости связи C

$$u_C = u_{C1} - u_{C2}$$

и для тока через эту емкость

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \left(\frac{du_{C1}}{dt} - \frac{du_{C2}}{dt} \right). \quad (\text{VI.1})$$

На основании первого закона Кирхгофа имеем соотношения

$$C_{10} \frac{du_{C1}}{dt} + g_1 u_{C1} + i_{L1} + i_C = 0,$$

$$C_{20} \frac{du_{C2}}{dt} + g_2 u_{C2} + i_{L2} - i_C = 0,$$

преобразуемые с учетом (VI.1) в уравнения

$$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} + g_1 u_{C1} + i_{L1} = C \frac{du_{C2}}{dt}, \quad (\text{VI.2})$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + g_2 u_{C2} + i_{L2} = C \frac{du_{C1}}{dt}, \quad (\text{VI.3})$$

где $C_1 = C_{10} + C$, $C_2 = C_{20} + C$.

Напряжения u_{C1} и u_{C2} могут быть выражены через производные по времени токов i_{L1} и i_{L2} соответственно:

$$u_{C1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}, \quad u_{C2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}. \quad (\text{VI.4})$$

Два последних соотношения вместе с (VI.2, VI.3) образуют исходную систему линейных дифференциальных уравнений, решения которой будут отыскиваться далее с применением преобразования Лапласа [12].

Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ индуктивность L_1 обтекается током, равным I , т. е. примем, что $i_{L1}(0) = I$. Начальные условия для тока i_{L2} и напряжений u_{C1} , u_{C2} будем считать нулевыми:

$$i_{L2}(0) = 0, \quad u_{C1}(0) = 0, \quad u_{C2}(0) = 0.$$

Умножая каждое из уравнений (VI.2–VI.4) на $\exp(-pt)$, интегрируя по времени t в пределах от нуля до ∞ и принимая во внимание начальные условия, придем к соотношениям

$$pC_1\bar{u}_{C1} + g_1\bar{u}_{C1} + \bar{i}_{L1} = pC\bar{u}_{C2}, \quad (\text{VI.5})$$

$$pC_2\bar{u}_{C2} + g_2\bar{u}_{C2} + \bar{i}_{L2} = pC\bar{u}_{C1}, \quad (\text{VI.6})$$

$$\bar{u}_{C1} = L_1(p\bar{i}_{L1} - I), \quad \bar{u}_{C2} = pL_2\bar{i}_{L2}, \quad (\text{VI.7})$$

где \bar{u}_{C1} , \bar{u}_{C2} , \bar{i}_{L1} , \bar{i}_{L2} – преобразованные по Лапласу от соответствующих функций. Заметим, что при вычислении преобразованной от производной $\frac{di_{L1}}{dt}$ учтено ненулевое начальное условие для тока i_{L1} . Подставляя \bar{u}_{C1} , \bar{u}_{C2} из (VI.7) в (VI.5, VI.6), получим следующую систему уравнений для \bar{i}_{L1} , \bar{i}_{L2} :

$$(p^2L_1C_1 + pg_1L_1 + 1)\bar{i}_{L1} - p^2L_2C\bar{i}_{L2} = (pC_1 + g_1)L_1I, \quad (\text{VI.8})$$

$$(p^2L_2C_2 + pg_2L_2 + 1)\bar{i}_{L2} - p^2L_1C\bar{i}_{L1} = -pL_1CI. \quad (\text{VI.9})$$

Складывая уравнение (VI.8), умноженное на p^2L_1C , с уравнением (VI.9), умноженным на $p^2L_1C_1 + pg_1L_1 + 1$, придем к соотношению

$$[(p^2L_1C_1 + pg_1L_1 + 1)(p^2L_2C_2 + pg_2L_2 + 1) - p^4L_1L_2C^2]\bar{i}_{L2} = -pL_1CI, \quad (\text{VI.10})$$

из которого находится выражение для \bar{i}_{L2} .

Обозначим коэффициент связи между контурами через k_C , их парциальные частоты – через ω_1 и ω_2 , показатели затухания – через α_1 и α_2 :

$$k_C = \frac{C}{\sqrt{C_1C_2}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad \alpha_1 = \frac{g_1}{2C_1}, \quad \alpha_2 = \frac{g_2}{2C_2}.$$

Умножая (VI.10) на $\omega_1^2\omega_2^2$ и выполняя тождественные преобразования, получим, что

$$\bar{i}_{L2} = -\omega_1^2\omega_2^2L_1CI \frac{p}{V(p)}, \quad (\text{VI.11})$$

где

$$V(p) = (p^2 + 2\alpha_1p + \omega_1^2)(p^2 + 2\alpha_2p + \omega_2^2) - k_C^2p^4. \quad (\text{VI.12})$$

Для функции $V(p)$, являющейся полиномом четвертой степени от p , запишем также выражение

$$V(p) = (1 - k_C^2)(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4), \quad (\text{VI.13})$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 – суть корни уравнения

$$(1 - k_C^2)p^4 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)p^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2)p^2 + 2(\alpha_1\omega_2^2 + \alpha_2\omega_1^2)p + \omega_1^2\omega_2^2 = 0. \quad (\text{VI.14})$$

Если бы α_1 и α_2 равнялись нулю, т. е. для консервативной системы, то (VI.14) превратилось бы в биквадратное уравнение

$$(1 - k_C^2)(p^{(0)})^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(p^{(0)})^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0, \quad (\text{VI.15})$$

имеющее чисто мнимые корни

$$p_1^{(0)} = j\Omega_1, \quad p_2^{(0)} = j\Omega_2, \quad p_3^{(0)} = -j\Omega_1, \quad p_4^{(0)} = -j\Omega_2,$$

где Ω_1, Ω_2 , называемые нормальными частотами (или частотами связи), положительны и могут быть найдены при помощи формулы

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1 - k_C^2)} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - k_C^2)\omega_1^2\omega_2^2} \right]. \quad (\text{VI.16})$$

Как показывает анализ этой формулы, при k_C отличном от нуля любая из парциальных частот ω_1, ω_2 меньше, чем Ω_1 , и больше, чем Ω_2 , которым в (VI.16) отвечают соответственно верхний и нижний знаки перед радикалом:

$$\omega_1, \omega_2 < \Omega_1; \quad \omega_1, \omega_2 > \Omega_2. \quad (\text{VI.17})$$

Из (VI.16) также следует, что

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (1 - k_C^2)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2). \quad (\text{VI.18})$$

Если α_1 и α_2 не равны нулю, но малы ($\alpha_1 \ll \omega_1, \alpha_2 \ll \omega_2$), то при отыскании корней уравнения (VI.14) в первом приближении можно принять, что $p = p^{(0)} + \varepsilon$, где ε – малая (порядка α_1 или α_2) поправка [12]. Подставляя это выражение для p в (VI.14), учтем после разложения по степеням ε , что $p^{(0)}$ удовлетворяет уравнению (VI.15). Удерживая в получившемся разложении только члены первого порядка малости и, сокращая на $2p^{(0)}$, придем к соотношению

$$\left[2(1 - k_C^2)(p^{(0)})^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right] \varepsilon + (\alpha_1 + \alpha_2)(p^{(0)})^2 + \alpha_1\omega_2^2 + \alpha_2\omega_1^2 = 0.$$

Подставляя сюда сначала $(p^{(0)})^2 = -\Omega_1^2$, а затем $(p^{(0)})^2 = -\Omega_2^2$, получим, принимая во внимание (VI.18), два значения поправки

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1\omega_2^2 + \alpha_2\omega_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\Omega_1^2}{2(1 - k_C^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\Omega_2^2 - \alpha_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2}{2(1 - k_C^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}, \quad (\text{VI.19})$$

которые представляют собой малые (по модулю) вещественные и, как следует из (VI.17), отрицательные числа. В рассматриваемом случае корни уравнения (VI.14) образуют две пары комплексно сопряженных величин. Имея в виду результаты, полученные в первом приближении, положим

$$p_1 = -\delta_1 + j\Omega_1, \quad p_2 = -\delta_2 + j\Omega_2, \quad (\text{VI.20})$$

где
$$\delta_1 = -\varepsilon_1, \quad \delta_2 = -\varepsilon_2, \quad (\text{VI.21})$$

так что
$$p_3 = p_1^* = -\delta_1 - j\Omega_1, \quad p_4 = p_2^* = -\delta_2 - j\Omega_2. \quad (\text{VI.22})$$

Здесь звездочкой обозначена операция перехода к комплексно сопряженной величине.

Как видно из (VI.11), корни полинома $V(p)$ являются полюсами функции $\bar{i}_{L2}(p) \exp(pt)$. Обозначим через $(c_{-1})_s$ вычет этой функции в полюсе p_s ($s = 1, 2, 3, 4$). Зависимость тока i_{L2} от времени t в данном случае в соответствии с теорией выражается суммой вычетов функции $\bar{i}_{L2}(p) \exp(pt)$:

$$i_{L2}(t) = \sum_{s=1}^4 (c_{-1})_s. \quad (\text{VI.23})$$

Здесь

$$(c_{-1})_s = -\omega_1^2 \omega_2^2 L_1 C I \frac{p_s}{V'(p_s)} \exp(p_s t), \quad (\text{VI.24})$$

где согласно (VI.13) $V'(p_s) = (1 - k_C^2) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^4 (p_s - p_r)$.

Если при расчете коэффициентов, стоящих в (VI.24) перед экспоненциальными функциями, считать вещественные части корней p_1, p_2, p_3, p_4 пренебрежимо малыми, то (VI.23) преобразуется в сравнительно простую приближенную формулу

$$i_{L2}(t) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 L_1 C I}{(1 - k_C^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} [\exp(-\delta_1 t) \cos \Omega_1 t - \exp(-\delta_2 t) \cos \Omega_2 t]. \quad (\text{VI.25})$$

На основании приведенных данных можно сделать следующие выводы. В отсутствие диссипации $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и собственные колебания двухконтурной системы в общем случае складываются из двух гармонических компонент с частотами связи Ω_1 и Ω_2 . Сами компоненты могут быть названы типами колебаний или модами. При малой диссипации собственные колебания согласно (VI.25) можно также считать состоящими из двух мод, представляющих собой колебания, амплитуды которых медленно убывают с течением времени.

Полученные выше результаты, в соответствии с которыми малая диссипация в первом приближении приводит только к затуханию собственных

колебаний и не сказывается на их частотах, могут расходиться с действительностью в случае слабо связанных контуров с близкими парциальными частотами. Рассмотрение этого специального случая приведено в [12].

VII. Метод Крылова – Боголюбова – Митропольского

Среди самых известных приближенных методов анализа колебаний в квазилинейных системах метод Крылова – Боголюбова – Митропольского (КБМ) отличается наибольшей общностью [4, 6, 22].

Его основные особенности могут быть прослежены на примере нахождения нестационарных решений уравнения

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z = \mu f\left(z, \frac{dz}{d\tau}\right). \quad (\text{VII.1})$$

Согласно методу КБМ функция z , определяемая этим уравнением, ищется в виде следующего разложения по степеням μ :

$$z = \rho \cos \psi + \mu z_1(\rho, \psi) + \mu^2 z_2(\rho, \psi) + \dots, \quad (\text{VII.2})$$

где ρ и ψ – зависящие от τ амплитуда и фаза первой гармоники, которые вводятся вместо z , $\frac{dz}{d\tau}$ и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu R_1(\rho) + \mu^2 R_2(\rho) + \dots, \quad (\text{VII.3})$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \mu \Psi_1(\rho) + \mu^2 \Psi_2(\rho) + \dots, \quad (\text{VII.4})$$

с неизвестными функциями $R_k(\rho)$ и $\Psi_k(\rho)$.

Задача состоит в отыскании такого числа первых членов в рядах (VII.2 – VII.4), чтобы уравнение (VII.1) удовлетворялось с требуемой погрешностью порядка μ^n . Входящие в разложение (VII.2) $z_1, z_2 \dots$ считаются периодическими функциями ψ периода 2π , не содержащими $\cos \psi$.

В последующем производные по τ преобразуются в соответствии с равенствами

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{VII.5})$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + 2 \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \psi} + \left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (\text{VII.6})$$

где согласно (VII.3, VII.4)

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right) = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right) = \left(\mu \frac{dR_1}{d\rho} + \mu^2 \frac{dR_2}{d\rho} + \dots\right) \frac{d\rho}{d\tau}, \quad (\text{VII.9})$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right) = \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right) = \left(\mu \frac{d\Psi_1}{d\rho} + \mu^2 \frac{d\Psi_2}{d\rho} + \dots \right) \frac{d\rho}{d\tau}. \quad (\text{VII.10})$$

Далее эта техника иллюстрируется ее применением к уравнению Рэ-лея

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z = \mu \left[\frac{dz}{d\tau} - \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^3 \right]. \quad (\text{VII.11})$$

Подставляя (VII.2 – VII.10) в (VII.11) и приравнявая коэффициенты при равных степенях μ до μ^2 включительно, получим

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} + z_1 = 2\rho\Psi_1 \cos \psi + 2R_1 \sin \psi + \left(\frac{3}{4}\rho^2 - 1 \right) \rho \sin \psi - \frac{1}{4}\rho^3 \sin 3\psi, \quad (\text{VII.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2 = & \left[(2\Psi_2 + \Psi_1^2)\rho - R_1 \frac{dR_1}{d\rho} \right] \cos \psi + \left[2(R_2 + R_1\Psi_1) + \rho R_1 \frac{d\Psi_1}{d\rho} \right] \sin \psi - \\ & - 2\Psi_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} - 2R_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \rho \partial \psi} + \left(1 - 3\rho^2 \sin^2 \psi \right) \left(R_1 \cos \psi - \rho\Psi_1 \sin \psi + \frac{\partial z_1}{\partial \psi} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.13})$$

Вековые члены будут исключены, если на правую часть в (VII.12) наложить условия

$$\Psi_1 = 0, \quad R_1 = \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2 \right). \quad (\text{VII.14})$$

Следовательно,

$$z_1 = \frac{1}{32}\rho^3 \sin 3\psi.$$

Имея это решение, можем переписать (VII.13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2 = & \left[2\rho\Psi_2 - R_1 \frac{dR_1}{d\rho} + \left(1 - \frac{3}{4}\rho^2 \right) R_1 + \frac{9}{128}\rho^5 \right] \cos \psi + \\ & + 2R_2 \sin \psi + \frac{9}{16} \left(1 - \frac{3}{8}\rho^2 \right) \rho^3 \cos 3\psi + \frac{9}{128}\rho^5 \cos 5\psi. \end{aligned}$$

Чтобы в z_2 не было вековых членов, положим

$$R_2 = 0, \quad \Psi_2 = \frac{R_1}{2\rho} \left(\frac{dR_1}{d\rho} - 1 + \frac{3}{4}\rho^2 \right) - \frac{9}{256}\rho^4.$$

Тогда

$$z_2 = \frac{9}{128} \left(\frac{3}{8}\rho^2 - 1 \right) \rho^3 \cos 3\psi - \frac{9}{3072}\rho^5 \cos 5\psi.$$

Поэтому с точностью до величин второго порядка малости решение уравнения (VII.11) имеет вид

$$z = \rho \cos \psi + \frac{\mu}{32}\rho^3 \sin 3\psi + \frac{9}{128}\mu^2 \left[\rho^3 \left(\frac{3}{8}\rho^2 - 1 \right) \cos 3\psi - \frac{1}{24}\rho^2 \cos 5\psi \right] + \dots,$$

причем

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \mu^2 \left[\frac{R_1}{2\rho} \left(\frac{dR_1}{d\rho} - 1 + \frac{3}{4} \rho^2 \right) - \frac{9}{256} \rho^4 \right], \quad (\text{VII.15})$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\mu\rho}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \rho^2 \right), \quad \rho(\tau) = \left\{ \frac{3}{4} + \left[\frac{1}{\rho^2(0)} - \frac{3}{4} \right] \exp(-\mu\tau) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{VII.16})$$

Последнее равенство совпадает с тем, что получено выше для автономного LC-генератора при помощи метода ММА.

Используя (VII.14), можно преобразовать (VII.15) к виду

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \frac{1}{16} \mu^2 \left[\frac{9}{16} \rho^4(\tau) - 2 \right]. \quad (\text{VII.17})$$

Производная $\frac{d\psi}{d\tau}$ представляет собой

мгновенную частоту колебаний осциллятора Рэлея. Ее изменение во времени в соответствии с (VII.17, VII.16) называют выбегом частоты при включении. На рис.19 приведена зависимость разности $\frac{d\psi}{d\tau} - 1$ от $\mu\tau$

при начальном значении амплитуды колебаний $\rho(0) = 0,5$.

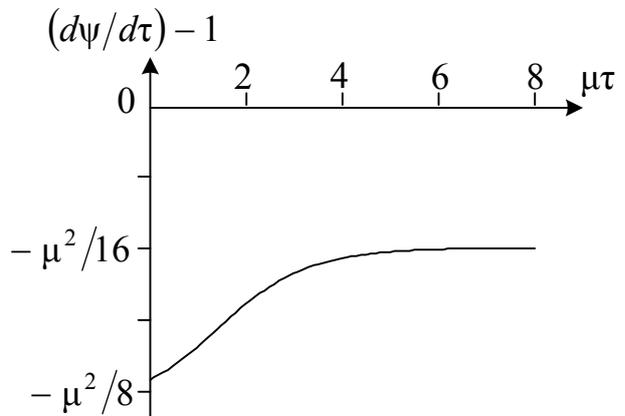


Рис.19

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамовиц М.и др. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами М.: Наука, 1979.—830 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.; Наука, 1981. 568 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974. 504 с.
5. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
6. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
7. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962. 456 с.
8. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
9. Капчинский И.М. Методы теории колебаний в радиотехнике. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1954.— 352 с.
10. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001. 496 с.
11. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1973.— 320 с.
12. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов.радио, 1975. 320 с.
13. Курокава К. Колебательные системы твердотельных СВЧ-генераторов. // Полупроводниковые приборы в схемах СВЧ // Под ред. М.Хауэса, Д Моргана. М. Мир, 1979. С 241–299.
14. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1988. 192 с.
15. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 416 с.
16. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М. Мир, 1982. 304 с.
17. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.
18. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Автоколебательные системы резонансного типа. СПб.: СПбГПУ, 2003. 66 с.
19. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. – СПб.: СПбГПУ, 2002. 63.с.
20. Мартынов Б.А., Молотков В.И. Резонансные явления в электрических цепях с нелинейными элементами. – Л.: ЛПИ, 1981. – 68 с.
21. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 392 с.
22. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
23. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
24. Пуанкаре А. Избранные труды: В трех томах / т I: Новые методы небесной механики. М: Наука, 1971. 771 с.
25. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
26. Стретт Д.В. (Рэлей) Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 456 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА	4
1.1. Идея метода гармонического баланса	4
1.2. Установившиеся колебания квазилинейного осциллятора Рэлея	5
1.3. Главный резонанс при гармоническом воздействии на осциллятор Дуффинга	7
2. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА	9
2.1. Понятие о методе малого параметра	9
2.1. Установившийся режим в автономном LC – генераторе.....	12
2.3. Резонанс второго рода в LC - генераторе	16
3. МЕТОД ВАН ДЕР ПОЛЯ.....	20
3.1 Общие черты процедуры метода Ван дер Поля для квазилинейной системы 2-го порядка.....	20
3.2 Условия устойчивости установившегося режима при главном резонансе в осцилляторе Дуффинга	21
3.3 Условия устойчивости резонанса второго рода в LC -генераторе	24
4. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД	25
4.1. Приведение дифференциального уравнения к системе уравнений первого порядка (переход к вспомогательным переменным).....	25
4.2. Составление укороченных уравнений.....	28
4.3. Процессы установления и устойчивость установившихся колебаний автономного LC –генератора.....	29
4.4. Резонансное воздействие источника гармонических колебаний на LC – генератор (главный резонанс).....	31
4.5. Двухконтурный генератор.....	34
ПРИЛОЖЕНИЯ	40
I. Дифференциальные уравнения схем с LC –контуром и безынерционным нелинейным элементом.....	40
II. Уравнение Дуффинга	44
III. Собственные колебания консервативного осциллятора Дуффинга.....	46
IV. Условия (признаки) асимптотической устойчивости стационарных решений нелинейной системы второго порядка	49
V. К зависимости формы резонансной кривой неавтономного осциллятора Дуффинга от амплитуды внешней силы.....	50
VI. Собственные колебания в системе двух связанных LC – контуров при малой диссипации.....	51
VII. Метод Крылова – Боголюбова – Митропольского	55
ЛИТЕРАТУРА.....	58

Мартынов Борис Александрович

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
Приближенные методы анализа нелинейных систем
Учебное пособие

Лицензия ЛР №020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т.2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 27. 04.2004.

Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 3,75.

Уч.-изд. л 3,75

Тираж 100 экз.

Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в типографии Издательства СПбГПУ.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул. ,29.

Отпечатано на ризографе RN-2000FP
Поставщик оборудования – фирма «Р-ПРИНТ»
Телефон: (812) 110-65-09
Факс: (812) 315-23-04