

Фролов Максим Евгеньевич

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ
РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА

Специальность: 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2004



Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор С.И. Репин

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Руховец
кандидат физико-математических наук В.В. Тихомиров

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 1 сентября 2004 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете по адресу: 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, I корпус, аудитория N 41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Автореферат разослан 29 августа 2004 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.229.13

доктор биологических наук

А.В. Зинковский

Актуальность темы. Разработка метода надежного контроля точности приближенных решений различных прикладных задач необходима для того, чтобы гарантировать достоверность результатов, полученных в процессе математического моделирования. В настоящее время можно утверждать, что качественная аппроксимация решений краевых задач возможна только при использовании алгоритмов, которые объединяют эффективные численные методы с последовательной адаптацией сеток. Поэтому в современной вычислительной практике широко используются так называемые адаптивные алгоритмы. В этом случае новая дискретизация строится на основе информации, полученной после решения краевой задачи на предыдущей, как правило, более грубой сетке. Такая процедура требует надежного контроля погрешности, который основывается на анализе вычисленных аппроксимаций. С одной стороны, необходимо иметь гарантированные верхние оценки некоторой глобальной нормы отклонения от точного решения. Малость получаемой величины служит критерием достижения необходимой точности. С другой стороны, желательно иметь также информацию о локальном распределении погрешности, которая необходима для дальнейшего уточнения решения. Как следствие, возникает необходимость в оценках, отличающихся от известных априорных оценок скорости сходимости, поскольку последние указывают лишь на ее асимптотический порядок и часто требуют повышенной гладкости точного решения исходной задачи. Это вызывает большой интерес к исследованиям, направленным на построение для различных задач так называемых апостериорных оценок точности получаемых аппроксимаций.

За последние десятилетия большой вклад в формирование основных направлений развития теории апостериорного контроля точности внесли И. Бабушка, О. Зенкевич, Р. Верфюрс, М. Айвсворк, Дж.Т. Оди и многие другие авторы. Общее количество публикаций по данной теме очень велико. Тем не менее, важно отметить, что рассматриваемая теория до сих пор во многом ориентирована на метод конечных элементов. Почти все предлагаемые подходы основаны на том, что приближенные решения обладают специальными свойствами и являются так называемыми галеркинскими аппроксимациями. Более существенный недостаток этих подходов заключается в том, что зачастую они обеспечивают лишь индикацию тех элементов, на которых ошибки сравнительно велики, но не дают надежного представления об их абсолютной величине.

Более общий вариационный подход к построению апостериорных оценок погрешности был предложен С.Г. Михлиным. В течение последних лет идея автора получила развитие в работах С.И. Репина. В них был предложен и обобщен на широкий круг краевых задач универсальный подход к построению апостериорных оценок функционального типа. Предлагаемые оценки позволяют контролировать разность между точным

решением рассматриваемой задачи и любым приближенным решением из функционального класса вне зависимости от способа его получения. Подход, называемый методом двойственных мажорант, основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления. Получаемая мажоранта ошибки является функционалом, который зависит от приближенного решения исходной задачи и от дополнительных переменных, правильный выбор значения которых существенно повышает качество оценки погрешности. Универсальность такого рода функциональных подходов и необходимость теоретического и практического обоснования их эффективности делают актуальным углубленное исследование данного метода.

Цель работы. На примере известных краевых задач рассмотреть вычислительные свойства соответствующих двойственных мажорант. Получить новые апостериорные оценки функционального типа для вариационных задач, связанных с бигармоническим оператором и моделью изгиба пластин Рейсснера-Миндлина. Обосновать эффективность метода при оценке глобальной нормы погрешности приближенных решений и индикации ее локального распределения внутри рассматриваемой области. Подтвердить теоретические результаты серий численных экспериментов для уже существующих и для полученных в работе апостериорных оценок, возникающих в эллиптических краевых задачах второго и четвертого порядка, включая примеры адаптивного построения сеток на основе предлагаемого подхода.

Методика исследования. Рассматриваются вариационные постановки исследуемых краевых задач, т.е. постановки на поиск элемента u , который минимизирует соответствующий функционал энергии J . Доказывается справедливость представления энергетической нормы разности между точным решением u и любым приближенным решением v через разность $J(v) - J(u)$. Далее точная нижняя грань исходной задачи заменяется на точную верхнюю грань задачи, двойственной к ней. Привлечение теории двойственности позволяет получить параметризованную оценку сверху для квадрата нормы ошибки $e = v - u$. При выводе оценки используются исключительно методы вариационного исчисления и функционального анализа.

Научная новизна. В работе исследованы апостериорные оценки точности конформных аппроксимаций обобщенных решений классических эллиптических уравнений второго и четвертого порядка. Получены две новые оценки такого типа для бигармонического уравнения. Разработан один из подходов к обоснованию эффективности предлагаемого метода. Большое внимание в диссертации уделено численным экспериментам. В частности, проведено сравнение данной технологии контроля точности с несколькими стандартными подходами метода конечных элементов. В заключитель-

ной главе диссертации предложены двойственные мажоранты, позволяющие контролировать точность произвольных конформных аппроксимаций решения задачи об изгибе пластины Рейсснера-Миндлина, являющейся обобщением классической модели пластины Киргофа-Лива.

Практическая ценность. Разработанные в диссертации методы позволяют явно контролировать точность приближенных решений ряда практически важных краевых задач. Проведенные теоретические исследования и численные эксперименты указывают на высокую эффективность предлагаемого подхода и на его преимущества перед другими методами апостериорного контроля точности, разработанными исключительно в рамках метода конечных элементов.

Апробация работы. По результатам проведенных исследований была сделана доклад на следующих конференциях: Numerical Methods for Scientific Computing. Variational problems and applications (Ювасколла, Финляндия, 2002г); The European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Прага, Чехия, 2003г); International Workshop on Reliable Methods of Mathematical Modelling and Applications in Science and Technology (Ювасколла, Финляндия, 2003г); European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Ювасколла, Финляндия, 2004г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы.

Структура и объем диссертации. Работа включает в себя введение, четыре главы, разделен на параграфы, и заключение. Объем диссертации – 110 страниц, 21 рисунок и 12 таблиц. Список литературы содержит 74 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснован выбор темы диссертации, представлен обзор литературы по классическим методам апостериорного контроля точности. Далее кратко описана суть вариационного подхода и оценки погрешности, предложенного С.Г. Максимумом, и исследуемого метода двойственных мажорант, указаны их отличительные особенности. Введение завершается перечислением основных полученных результатов и изложением структуры диссертации.

Первая глава содержит более подробное описание тех подходов к построению апостериорных оценок и индикаторов погрешности, о которых идет речь во введении. Для простоты изложения методы рассматриваются на примере классической краевой задачи – задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω — ограниченная связная область с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$ и $f \in L_2(\Omega)$. Как известно, данная задача допускает следующую обобщенную формулировку: найти такой элемент $u \in V_0$, что

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V_0, \quad (2)$$

где $V_0 = W_2^1(\Omega)$ обозначает подпространство функций, принадлежащих пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$ и обращающихся в ноль на границе области. Легко видеть, что для приближенного решения задачи (2) — v , ошибка $e = u - v$ является решением аналогичной задачи

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f v - \nabla v \cdot \nabla u) \, dx, \quad \forall v \in V_0. \quad (3)$$

В первом параграфе показывается связь между нормой отклонения e и нормой невязки исходного дифференциального уравнения в пространстве $W_2^{-1}(\Omega)$

$$\|f + \Delta v\|_{(-1)} = \sup_{w \in V_0, \|w\|=1} \frac{\int_{\Omega} (f w - \nabla w \cdot \nabla u) \, dx}{\|\nabla w\|_0}. \quad (4)$$

Отметим, что для различных L_2 -норм в диссертации введено единое обозначение $\|\cdot\|_{L_2}$, в котором индекс ω конкретизирует область. Связывающее соотношение имеет вид

$$\|\nabla u - \nabla v\|_0 = \|f + \Delta v\|_{(-1)}, \quad \forall v \in V_0$$

На том факте, что так называемая вариационная норма невязки позволяет контролировать погрешность приближенных решений рассматриваемой задачи, основано целое направление в теории априорного контроля точности.

Во втором параграфе описывается так называемый явный метод невязок. Его суть заключается в построении явно вычисляемой оценки сверху для выражения (4). Это возможно сделать в случае, когда приближенное решение u_h совпадает с галеркинским аппроксимацией u_h , которая удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_h,$$

где V_h — некоторое конечномерное подпространство пространства V_0 . Итоговая оценка при помощи явного метода невязок имеет вид

$$\|\nabla(u_h - u)\|_0 \leq \hat{C}_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_T^2 \right)^{1/2} + \hat{C}_2 \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E |j(\nabla u_h \cdot n_E)|^2 \right)^{1/2}.$$

В данном неравенстве, \mathcal{T}_h есть совокупность элементов разбиения области, h_T — диаметр элемента T , \mathcal{E}_h — совокупность ребер (кроме лежащих на границе области Ω), h_E — длина ребра E . Величина $j(\nabla u_h \cdot n_E)$ обозначает скачок нормальной составляющей

вектора ∇u_h на соответствующей грани. Важной особенностью данного метода является то, что \hat{C}_1 и \hat{C}_2 — постоянные, существенно зависящие от структуры разбиения области Ω , что затрудняет их учет при непосредственном применении метода.

В третьем параграфе описана группа методов, основанных на решении локальных задач. Ключевая идея данной группы методов заключается в решении последовательности локальных задач вида (3), включающих в себя невязку дифференциального уравнения на заданном приближенном решении в качестве правой части. Нормы приближенных решений таких задач на каждом элементе можно рассматривать как индикатор точности исходного приближенного решения u_h .

Другая идея, связанная с использованием усреднения градиента приближенного решения, лежит в основе метода, описанного в четвертом параграфе. Его суть заключается в том, что при выборе метода, уточняющего поле градиента приближенного решения u_h , разность между исходным и уточненным полем может быть использована в качестве индикатора ошибки. Другими словами, если у нас есть оператор G , обеспечивающий выполнение неравенства

$$\|\nabla u - G \nabla u_h\| \leq \delta \|\nabla u - \nabla u_h\| \quad (5)$$

при $\delta < 1$, то справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{1}{1+\delta} \|\nabla u_h - G \nabla u_h\| \leq \|\nabla u - \nabla u_h\| \leq \frac{1}{1-\delta} \|\nabla u_h - G \nabla u_h\|.$$

Таким образом, если неравенство (5) выполняется при достаточно малом значении δ , то норма разности $\nabla u_h - G \nabla u_h$ дает хорошее представление об истинной величине ошибки. Очевидным преимуществом такого подхода является его исключительная простота. Однако, его строгое математическое обоснование возможно получить лишь при существенных дополнительных предположениях о гладкости точного решения исходной задачи.

Пятый параграф посвящен методу построения априорных оценок погрешности, предложенному С.Г. Михлиным. В нем рассмотрена вариационная формулировка задачи (1), называемая далее задачей \mathcal{P} или прямой задачей.

Задача \mathcal{P} . Найти такой элемент $u \in V_0$, что

$$J(u) = \inf \mathcal{P} = \inf_{u \in V_0} J(u), \quad \text{где } J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx.$$

Идея С.Г. Михлина заключается в представлении квадрата нормы ошибки через разность значений функционала

$$\|\nabla v - \nabla u\|_0^2 = 2(J(v) - \inf \mathcal{P})$$

и получении сколь угодно точной оценки величины $(-\inf P)$ сверху. Она строится при помощи элементов $q^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, принадлежащих множеству

$$Q_1^* = \left\{ q^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \int_{\Omega} q^* \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0 \right\}.$$

Эта априорная оценка имеет вид

$$\|\nabla v - \nabla u\|_{\Omega} \leq \|\nabla v - q^*\|_{\Omega}, \quad \forall q^* \in Q_1^*.$$

Правая часть данного неравенства содержит свободную переменную, подчиненную сильным ограничениям. Чтобы получить даже грубую нижнюю оценку погрешности, необходимо построить элемент q^* , удовлетворяющий условию $\operatorname{div} q^* + f = 0$ в обобщенном смысле. Для правой части f произвольного вида такое построение требует вычислительных затрат, что делает подход не столь эффективным с практической точки зрения.

В заключительном шестом параграфе показан один из наиболее простых способов получения двойственной мажоранты для задачи (1). Он основан на использовании ортогонального разложения Гельмгольца для элементов пространства $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Итоговая оценка выглядит следующим образом

$$\|\nabla v - \nabla u\|^2 \leq M(v, \beta, y^*) = (1 + \beta) \|\nabla v - y^*\|_{\Omega}^2 + (1 + \beta^{-1}) C_{10}^2 \|\operatorname{div} y^* + f\|_{\Omega}^2, \quad (6)$$

где $v \in V_0$ — произвольное приближенное решение, $y^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ — свободная векторная переменная, такая, что $\operatorname{div} y^* \in L_2(\Omega)$, β — свободный положительный параметр. Постоянная C_{10} есть константа в неравенстве Фридриха $\|u\|_{\Omega} \leq C_{10} \|\nabla u\|_{\Omega}$.

Во второй главе метод двойственных мажорант иллюстрируется на примере двух классических краевых задач четвертого порядка. Особое внимание уделяется теоретическому обоснованию эффективности подхода. Для случая бигармонической задачи в главе получены две новые априорные оценки погрешности. При этом доказывается, что метод обеспечивает не только получение параконтролируемых верхних оценок норм ошибки, но и локально воспроизводит ее распределение в области.

В первом параграфе рассмотрена вариационная формулировка бигармонической задачи, которая имеет приведенный ниже вид.

Задача \mathcal{P} . Найти такой элемент $u \in V_0$, что

$$J(u) = \inf_{w \in V_0} P = \inf_{w \in V_0} J(w), \quad \text{где } J(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f w \right) dx \quad \text{и } V_0 = W_2^2(\Omega).$$

Известно, что точное решение u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0.$$

Используя это соотношение для произвольного приближенного решения $v \in V_0$, показывается, что

$$\frac{1}{2} \|e\|_{\Omega}^2 = J(v) - \inf P, \quad (7)$$

где

$$\|e\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\Delta e)^2 \, dx.$$

Таким образом, знание точной нижней грани прямой задачи позволяет оценить точность любой конформной аппроксимации. Несмотря на то, что в общем случае эта грань неизвестна, она может быть заменена на точную верхнюю грань так называемой двойственной задачи \mathcal{P}^* , которая возникает из формулировки исходной задачи в терминах Лагранжиана L

$$J(u) = \inf_{w \in V_0} \left\{ \sup_{n^* \in L_2(\Omega)} L(w, n^*) \right\}, \quad \text{где } L(w, n^*) = \int_{\Omega} \left(n^* \Delta w - \frac{1}{2} (n^*)^2 - f w \right) dx.$$

Она имеет следующий вид.

Задача \mathcal{P}^* . Найти такой элемент $n^* \in N_1^*$, что

$$J^*(n^*) = \sup \mathcal{P}^* = \sup_{n^* \in N_1^*} J^*(n^*), \quad \text{где } J^*(n^*) = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (n^*)^2 \, dx$$

и

$$N_1^* = \left\{ n^* \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} n^* \Delta w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0 \right\}.$$

Далее показано выполнение важного соотношения.

Утверждение 1. Точная нижняя грань прямой задачи и точная верхняя грань двойственной к ней совпадают, а именно, $\inf P = \sup \mathcal{P}^*$.

Подставив связывающее прямую и двойственную задачи соотношение в равенство (7), мы приходим к оценке

$$\|e\|_{\Omega}^2 \leq \|\Delta v - n^*\|_{\Omega}^2, \quad \forall n^* \in N_1^* \quad (8)$$

К сожалению, формула (8) в основном имеет теоретическое значение. Построение аппроксимаций n^* , принадлежащих множеству N_1^* для произвольных краевых частей f сопряжено с существенными трудностями.

Во втором параграфе, следуя схеме метода двойственных мажорант, из неравенства (8) получены два типа оценок погрешности для бигармонической задачи. Первая из них имеет вид

$$\|e\|_{\Omega}^2 \leq M(v, \beta, n^*) = (1 + \beta) \|\Delta v - n^*\|_{\Omega}^2 + (1 + \beta^{-1}) C_{20}^2 \|\Delta n^* - f\|_{\Omega}^2, \quad (9)$$

— вычислим оптимальное значение β_k для данного элемента m_k^*

$$M(v, \beta, m_k^*) = \inf_{\beta \geq 0} M(v, \beta, m_k^*).$$

Таким образом, мы определили последовательность величин $M_k(v) = M(v, \beta_k, m_k^*)$.

Далее доказывается ряд утверждений о вычислительных свойствах рассмотренной двойственной мажоранты.

Утверждение 2. Если последовательность пространств $\{N_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ предельно плотна в N_Δ^* , то для сколь угодно малого значения параметра δ найдется такой номер k_δ , что при $k > k_\delta$ имеют место двусторонние оценки: $0 \leq M_k(v) - \|\delta\|^2 \leq \delta C(\epsilon, \delta, C_{21})$.

Введем индекс эффективности априорной оценки

$$I_{eff} = \frac{\sqrt{M_k(v)}}{\|\epsilon\|},$$

который дает представление о том, насколько точно метод позволяет оценить истинное значение нормы ошибки. Из утверждения следует, что для двойственной мажоранты величина индекса эффективности стремится в процессе минимизации к оптимальному значению, которое равно единице.

Утверждение 3. Если последовательность оптимальных значений β_k , получаемая в процессе минимизации двойственной мажоранты, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то последовательность элементов m_k^* сходится к точному решению двойственной задачи m^* в N_Δ^* .

Утверждение 3 используется для обоснования эффективности подхода при нахождении локального распределения погрешности по области Ω . Отметим, что предлагаемые использовать в качестве локального индикатора распределения ошибок не полную двойственную мажоранту (9), а только ее первое слагаемое.

Утверждение 4. В условиях утверждения 3, имеет

$$\int_{\Omega} |d_k(x) - \epsilon(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{где } d_k(x) = |\Delta v(x) - m_k^*(x)|^2, \quad \epsilon(x) = |\Delta v(x) - \Delta u(x)|^2.$$

Четвертый параграф главы посвящен задаче более общего вида — задаче о пластине Кирсгоффа-Лева, вариационная постановка которой приведена ниже.

Задача P. Найти такой элемент $u \in V_0$, что

$$J(u) = \inf_{w \in V_0} J(w), \quad \text{где } J(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} B \nabla \nabla w : \nabla \nabla w - f w \right) dx.$$

Она получается в предположении, что свободная переменная m^* принадлежит множеству $N_\Delta^* = \{m^* \in L_2(\Omega) \mid \Delta m^* \in L_2(\Omega)\}$. Постоянная C_{21} в данной оценке — константа в неравенстве $\|v\|_{\Omega} \leq C_{21} \|\Delta v\|_{\Omega}$, связанная с минимальным собственным значением биэрмитического оператора. Функционал M в правой части определен при любых $\beta > 0$ и $m^* \in N_\Delta^*$. При $\beta = 0$ он может быть определен следующим образом

$$\begin{cases} M(v, 0, m^*) = +\infty & \text{для } m^* \notin N_\Delta^*, \\ M(v, 0, m^*) = \|\Delta v - m^*\|_{\Omega}^2 & \text{для } m^* \in N_\Delta^*. \end{cases}$$

Недостатком данной оценки можно считать то, что при вычислении мажорант погрешности нельзя использовать простые аппроксимации двойственной переменной m^* , поскольку они не обеспечивают необходимого условия $\Delta m^* \in L_2(\Omega)$.

Далее показано как, ослабив ограничение на класс допустимых элементов, можно получить другую оценку. Предположим, что $m^* \in N_0^* = \{m^* \in L_2(\Omega) \mid \nabla m^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$. Введем вторую двойственную переменную $y^* \in Q_{\Delta}^* = \{y^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} y^* \in L_2(\Omega)\}$. Тогда

$$\|\epsilon\|^2 \leq M(v, \beta_1, \beta_2, m^*, y^*) = (1 + \beta_1) \|\Delta v - m^*\|_{\Omega}^2 + (1 + \beta_1^{-1}) C_{10}^2 \times \\ \times ((1 + \beta_2) \|\nabla m^* - y^*\|_{\Omega}^2 + (1 + \beta_2^{-1}) C_{10}^2 \|\operatorname{div} y^* - f\|_{\Omega}^2). \quad (10)$$

Данная оценка включает два свободных положительных параметра β_1 и β_2 .

В третьем параграфе на примере двойственной мажоранты (9) рассмотрим вычислительные свойства предлагаемой априорной оценки. Из доказательства утверждения 1 вытекает, что точное решение двойственной задачи m^* удовлетворяет соотношению $m^* = \Delta u$ и $\Delta m^* = f$ почти всюду в Ω . Отсюда следует, что оптимальное значение мажоранты, которое достигается на паре $(0, m^*)$, совпадает со значением квадратичной нормы ошибки. При этом любая допустимая пара элементов (β, m^*) дает гарантированную оценку сверху для этой величины. Построив элемент m^* , достаточно близкий к m^* , мы получим качественную оценку погрешности. Так мы приходим к задаче минимизации значения $M(v, \beta, m^*)$ по паре (β, m^*) при заданном приближенном решении v . Естественно репалить данную задачу при помощи аппроксимации двойственной переменной на некотором конечномерном подпространстве.

Рассмотрим последовательность конечномерных подпространств $\{N_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ пространства N_Δ^* . Построим последовательность соответствующих пар (β_k, m_k^*) следующим образом:

- фиксируем значение параметра β , положив его равным некоторому δ ;
- найдем элемент m_k^* из условия

$$M(v, \delta, m_k^*) = \inf_{m^* \in N_k^*} M(v, \delta, m^*);$$

Предположим, что тензор четвертого ранга B симметричен и существуют такие положительные постоянные α_1 и α_2 , что

$$\alpha_1 |M|^2 \leq B \kappa : \kappa \leq \alpha_2 |M|^2, \quad \forall \kappa \in M_0^{2 \times 2}, \quad |\kappa|^2 = \kappa : \kappa,$$

где $M_0^{2 \times 2}$ обозначает пространство симметричных 2×2 матриц.

Несмотря на более сложную структуру, двойственная мажоранта для задачи о пластине Кирхгофа-Лавы обладает теми же вычислительными свойствами, что и мажоранта (9), полученная для бигармонического уравнения.

Третья глава целиком посвящена численным экспериментам, в которых эффективность функционального подхода подтверждается на примере эллиптических краевых задач второго и четвертого порядка. При этом рассматриваются области полигональной формы, в том числе такие, которые содержат выпуклые углы. В примерах проведено детальное сравнение данной технологии контроля точности с несколькими стандартными подходами.

В первом параграфе обсуждаются три алгоритма вычисления мажорант погрешности. Первый из них позволяет получить наиболее качественные оценки точности, однако, требует слишком больших вычислительных затрат. Второй, наоборот, отличается исключительной простотой, но может достаточно сильно переоценивать истинную величину ошибок. Последний из рассмотренных алгоритмов является наиболее эффективным и представляет собой нечто среднее между первыми двумя подходами.

Три следующих параграфа содержат описание серии примеров. К сожалению, объем автореферата не позволяет осветить их полностью, поэтому мы останавливаемся только на двух. Часть примеров посвящена более общей задаче, чем задача (1) — задаче диффузии

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial \Omega, \end{cases} \quad (11)$$

в которой коэффициенты матрицы A могут терпеть разрыв. Мы предполагаем, что она симметрична и удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_1 |\xi|^2 \leq A \xi \cdot \xi \leq \alpha_2 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

при некоторых положительных α_1, α_2 . Аналог оценки (6) для данного случая имеет вид

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2}^2 \leq M(v, y^*) &= (1 + \beta) \int_{\Omega} (A \nabla v - y^*) \cdot (\nabla v - A^{-1} y^*) dx + \\ &+ (1 + \beta^{-1}) \frac{C_{\text{ш}}^2}{\alpha_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} y^* + f)^2 dx, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\|e\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} A \nabla v \cdot \nabla v dx.$$

Второй параграф содержит четыре примера, рассмотренных на фиксированных сетках без адаптации. В них двойственная мажоранта (12) сравнивается с рядом классических индикаторов погрешности метода конечных элементов.

В третьем параграфе главы описаны два примера, результаты которых указывают на эффективность совмещения возможностей функциональных апостериорных оценок и пакета MATLAB. При этом метод двойственных мажорант сравнивается уже в процессе адаптации сетки со стандартным индикатором, используемым в пакете.

В примерах предложено ввести в качестве ориентира своего рода эталонный индикатор, основанный на точном знании распределения погрешности по области Ω . Его значение на элементе T обозначается

$$\eta_T^* = \left(\int_T A \nabla v \cdot \nabla v dx \right)^{1/2}.$$

С этим индикатором мы сравниваем, соответственно, локальный индикатор, основанный на двойственной мажоранте (12), и стандартный индикатор MATLAB PDE Toolbox

$$\eta_T^{\text{MATLAB}} = |h_T f|_T + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} h_E^2 |(\nabla v_n \cdot n_E)|^2 \right\}^{1/2},$$

где \mathcal{E}_T — совокупность ребер элемента T (остальные обозначения были введены на с. 5). Алгоритм получения результатов, на которые мы ориентируемся при сравнении, выглядит так:

- выбирается начальное разбиение области;
- вычисляется настоящее распределение погрешности (индикатор η_T^*);
- согласно этому распределению производится отбор элементов, которые дают наибольший локальный вклад в глобальную погрешность;
- сетка адаптируется в выделенных зонах.

Аналогично мы поступим, заменив индикатор η_T^* на остальные. В результате получаются три последовательности оценок и соответствующих им приближенных решений. Первая последовательность считается эталоном, поскольку адаптация для нее получена из условия знания точного распределения локальных ошибок. Далее мы можем выбрать из всех трех последовательностей близкие по количеству узлов сетки и сравнить относительную точность приближенных решений. Имея каждый раз в качестве ориентира эталонную сетку, можно определить, обеспечивает тот или иной метод адаптации разбиения к особенностям данной задачи или нет. Отметим, что во всех случаях

используется один и тот же принцип адаптивного построения более мелкой сетки на основе информации, полученной после решения задачи на более грубой. Таким образом, различия в итоговом результате возникают только по причине разной степени эффективности метода двойственных мажорант и стандартного подхода пакета MATLAB.

Пример 1.

В данном примере рассматривается задача (11), в которой правая часть и коэффициенты матрицы A кусочно-постоянны и имеют следующие значения (см. рис 1):

$$\begin{cases} a_{11} = 10, & f = 1 & \text{в области 1,} \\ a_{21} = 1, & f = 0 & \text{в области 2,} \\ a_{11} = 10, & f = 1 & \text{в области 3,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$ и $a_{22} = 1$ во всей области Ω . Начиная с одного и того же начального разбиения области Ω , производится дальнейшая адаптация сетки на основе приближенного решения исходной задачи, индикация погрешности и разбиения тех элементов, на которых локальные ошибки велики.

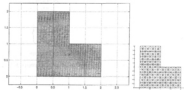


Рис. 1. Область Ω для примера 1 и ее начальное разбиение (шаг 0).

Результаты нескольких шагов адаптации представлены в таблице 1, в которой за N обозначено число узлов генерируемых сеток, а величина ϵ_k представляет собой процент относительной точности соответствующих приближенных решений. Сравнявая результаты адаптации, можно прийти к выводу, что использование индикатора, основывающегося на двойственной мажоранте, практически равносильно знанию точного распределения погрешности. Стандартный индикатор пакета требует меньшего числа шагов адаптации, но существенно уступает двойственной мажоранте по ее качеству. Как следует из приведенных результатов, итоговую точность порядка 2.4% стандартный индикатор пакета MATLAB обеспечивает при почти в два раза большем количестве степеней свободы.

			мажоранта			MATLAB			
Шаг	N	ϵ_k	Шаг	N	ϵ_k	I_{eff}	Шаг	N	ϵ_k
0	225	19.02	0	225	19.02	1.09	0	225	19.02
5	862	6.99	7	876	7.12	1.07	4	1022	7.79
7	1422	5.42	9	1428	5.50	1.07	5	1929	5.70
11	3268	3.45	13	3376	3.50	1.06	7	3989	4.01
13	5552	2.70	15	5698	2.74	1.06	9	7417	3.01
			16	7142	2.38	1.06	11	13560	2.37

Табл. 1. Шаги адаптации сетки для сравнимых индикаторов.

В четвертом параграфе исследуются две новые апостериорные оценки погрешности, полученные для битармонической задачи во второй главе. Параграф содержит пять примеров, основная цель которых заключается в том, чтобы показать дополнительные возможности предлагаемого подхода при выборе методов построения приближенного решения исходной задачи и аппроксимации действительной переменной. Ниже приведены один из примеров.

Пример 2.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

в которой Ω — квадрат с единичной стороной, а правая часть f соответствует точному решению вида

$$u = \frac{1}{\pi^4} e^{-\pi(x_1 - 1/2)^2} \sin^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2),$$

где $a = 10$ и $b = 0.8$. В таблице 2 отражены результаты адаптации и качество соответствующих гарантированных верхних оценок нормы ошибки, вычисленных при помощи мажоранты (10). Последний столбец содержит время, затраченное на вычисление аппроксимаций действительных переменных — пары элементов $\{u_k^+, u_k^-\}$. Из результатов можно сделать вывод, что метод двойственных мажорант позволяет оценить погрешность приближенных решений с индексом эффективности $I_{eff} \approx 3$.

Основным выводом из всей совокупности приведенных в главе численных экспериментов является вывод о том, что метод двойственных мажорант позволяет получать в случае задач второго и четвертого порядка эффективные оценки энергетической нормы погрешности для разных типов равномерных аппроксимаций точных решений. Метод

N	ϵ_h	$\ e\ $	$M(v, \beta_1, \beta_2, \kappa_1^*, \kappa_2^*)$	I_{eff}	время (сек.)
289	22.8	0.0439	0.1731	3.94	
342	17.1	0.0330	0.1224	3.70	
476	13.8	0.0266	0.0755	2.84	
621	11.4	0.0220	0.0608	2.77	
850	9.1	0.0175	0.0481	2.74	
1152	7.8	0.0150	0.0417	2.78	0.39
1768	6.4	0.0123	0.0338	2.73	0.61
2479	5.2	0.0099	0.0281	2.83	0.88
3414	4.3	0.0082	0.0233	2.84	1.30
4924	3.7	0.0071	0.0200	2.84	2.35

Табл. 2. Шаги адаптации сетки на основе предлагаемого индикатора.

превосходит по степени эффективности и надежности те стандартные подходы, с которыми он сравнивался в процессе исследования.

Четвертая глава посвящена выводу оценки точности приближенных решений задачи о пластине Рейсснера-Мандлина. Теория пластины Рейсснера-Мандлина является обобщением классической теории тонких пластин Кирхгофа-Лива. В рамках этой теории деформация пластины толщиной t , срединная плоскость которой занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, описывается при помощи двух переменных скалярной функции $w(x)$ (прогиб срединной плоскости в точке x) и векторной функции $\varphi(x)$ (поворот нормали к срединной плоскости в точке x). Функционал энергии для этой задачи имеет вид

$$J(w, \varphi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \text{Be}(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \frac{1}{2\alpha} |\nabla w - \varphi|^2 - f w \right) dx,$$

где B — положительно определенный тензор четвертого ранга, $\varepsilon(\varphi) = \frac{\text{Grad}(\text{Grad} \varphi)}{2}$, α — положительный параметр, пропорциональный t^3 , а величина f^3 соответствует распределенной нагрузке, действующей на пластину. В первом параграфе дается краткое описание классической и вариационной формулировок этой задачи и приводится дополнительный обзор литературы.

Во втором параграфе для произвольного приближенного решения (u, ψ) , дающего конформную аппроксимацию точного решения (u, ϕ) в пространстве $S = \mathbf{W}_2^1(\Omega) \times \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ получена вычисляемая оценка нормы ошибки. Для этого в рассмотрение вводится зависящий от исходных переменных задачи вектор $\gamma = \frac{\nabla w - \varphi}{\alpha}$, который аппроксимируется в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ вектором $y = \frac{\nabla u - \psi}{\alpha}$. Далее рассмотрены соответствующие

этим величинам отклонения от точных значений $\epsilon_u = u - u$, $\epsilon_\varphi = \psi - \phi$ и $\epsilon_y = y - \gamma$ и доказано утверждение.

Утверждение 5. Для любой аппроксимации $(u, \psi) \in S$ верно соотношение

$$\|e_u\|_{\Omega}^2 + \alpha \|e_\varphi\|_{\Omega}^2 = 2(J(u, \psi) - J(u, \phi)).$$

где

$$\|e_u\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} |e_y|^2 dx \quad \text{и} \quad \|e_\varphi\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} \text{Be}(\epsilon_\varphi) : \varepsilon(\epsilon_\varphi) dx.$$

На основе этого утверждения и ряда промежуточных неравенств для задачи получена двоякая оценка максимума, позволяющая вычислять гарантированные верхние оценки погрешности в терминах отклонений e_u и e_φ , а именно

$$\|e_u\|_{\Omega}^2 + \alpha \|e_\varphi\|_{\Omega}^2 \leq M(u, \psi, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \kappa_1^*, \kappa_2^*) = M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad (13)$$

$$M_1 = (1 + \beta_1) \int_{\Omega} (\text{Be}(\psi) - \kappa^*) : (\varepsilon(\psi) - B^{-1} \kappa^*) dx,$$

$$M_2 = \alpha(1 + \beta_2) \|y - y^*\|_{\Omega}^2, \quad M_3 = (1 + \beta_1^{-1}) (1 + \beta_3) C_{\Omega 0}^2 \|y^* + \text{div} \kappa^*\|_{\Omega}^2,$$

$$M_4 = \left\{ (1 + \beta_1^{-1}) (1 + \beta_3^{-1}) C_{\Omega 0}^2 + \alpha (1 + \beta_1^{-1}) \right\} C_{\Omega 0}^2 \|\text{div} y^* + f\|_{\Omega}^2,$$

где постоянная $C_{\Omega 0}$ определена в первой главе, а $C_{\Omega 0}$ — постоянная, удовлетворяющая неравенству $|F|_{\Omega} \leq C_{\Omega 0} \|F\|_{\Omega}$ для произвольного элемента $F \in \mathbf{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Поясним смысл данной оценки. С одной стороны, в правую часть (13) входят заданные аппроксимации ψ и y , точность которых мы контролируем. С другой стороны, она содержит пару свободных функций (y^*, κ^*) и положительных параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, выбор которых определяет качество получаемых оценок, которые могут быть сделаны сколь угодно точно. Действительно, для пары $y^* = \gamma$ и $\kappa^* = \text{Be}(\phi)$ близкие M_2 и M_4 обращаются в ноль. Можно положить $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ равными нулю, тогда неравенство (13) переходит в равенство. В заключение параграфа показано, как на основе этой оценки можно контролировать также норму отклонения e_y .

Заключение. В диссертации проведено исследование подхода, который позволяет получать надежные верхние оценки, контролируемые точность приближенных решений класса практических важных вариационных задач. Особенности предлагаемого подхода исследуются на примере известных задач математической физики и механики: задачи Дирихле для уравнения Пуассона, задачи диффузии, биармонической задачи. В работе также рассмотрены задачи, возникающие в теории изгиба пластин

Киргорова-Лева и Ребасиера-Макдлина. Большое внимание уделено теоретическому и численному обоснованию эффективности функционального подхода к построению апостериорных оценок погрешности. Основным выводом из приведенных численных экспериментов является вывод о том, что метод двойственных мажорант позволяет получать качественные оценки энергетической нормы погрешности для разных типов конформных аппроксимирующей решения исходной задачи. Вычислительные затраты, которые влечет за собой метод, компенсируются за счет его универсальности и других преимуществ перед классическими подходами метода конечных элементов. Таким образом, можно рекомендовать его к применению при оценке точности приближенных решений различных краевых задач.

Список работ, опубликованных по теме диссертации.

1. Репин С.И., Фролов М.Е. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. // Журн. выч. мат. и матем. физика, 2002.–Т.42, N12.–С.1774–1787.
2. Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S. On the reliability, effectivity and robustness of a posteriori error estimation methods.// Numerical Methods for Scientific Computing. Variational problems and applications. Barcelona: CIMNE, 2003.–С.153–175.
3. Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S. On computational properties of a posteriori error estimates based upon the method of duality error majorants.// Numerical Mathematics and Advanced Applications (ENUMATH, 2003). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.–С.346–357.
4. Frolov M.E. On efficiency of the dual majorant method for the quality estimation of approximate solutions of fourth-order elliptic boundary value problems.// Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2004.–Т.19, N5.–С.407–418.

Лицензия ЛР №020593 от 07.08.97

Подписано в печать 25.10.2004. Формат 60x84/16. Печать офсетная.
Уч. печ. л. 10 Тираж 100. Заказ 495.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в типографии Издательства Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.