На правах рукописи

ДЕГТЯРЕВ Михаил Юрьевич

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Специальность 05.13.12 – Системы автоматизации проектирования (промышленность)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2006

Работа выполнена на кафедре «Прикладная геометрия и дизайн» ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Научный руководитель: д.т.н., профессор Якунин Вячеслав Иванович.

Официальные оппоненты: д.т.н., профессор Сироткин Яков Аронович,
к.т.н., доцент Абросимов Сергей Николаевич.

Ведущая организация: ОАО «ОКБ Сокол», г. Казань.

Защита состоится «25» апреля 2006 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.21 при ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29, ГЗ, ауд. 118.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан «23» марта 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор ____________ Редько С. Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Развитие вычислительной техники и необходимость автоматизации производства требуют разработки современных программ геометрического моделирования и проектирования. Основным инструментом проектирования современной техники являются САПР и СГМ, базовым элементом которых являются методы геометрического моделирования и компьютерной графики. Методы и алгоритмы компьютерной графики, входящие в состав производственных технологий, напрямую определяют качество конечного продукта и существенно повышают конкурентоспособность. От наличия развитых средств моделирования и проектирования во многом зависит успешное выполнение проектов и дальнейшее их развитие. Существующие на сегодняшний день системы проектирования продолжают развиваться и совершенствоваться одновременно с разработкой новых алгоритмов вычислительной геометрии. Изменив аналитические преобразования, которые используются на базовом уровне и занимают большую часть времени, можно получить качественное повышение эффективности компьютерного моделирования. По этой причине верхний уровень графических библиотек часто является бесплатным и открытым, а нижний эффективный уровень платный или не распространяется.

Существует также деление CAD/CAM/CAE-систем на системы верхнего, среднего и нижнего уровня. Наибольшее распространение получили два типа твердотельных геометрических ядер: Parasolid от фирмы Unigraphics Solutions и ACIS от Spatial Technology. CAD-системы нижнего уровня (например, AutoCAD, КОМПАС, БАЗИС) применяются в основном при автоматизации чертежных работ.

Многие из перечисленных систем используют аппаратное ускорение с использованием графических акселераторов, широкое распространение которых повышает актуальность темы исследований.

Таким образом, для достижения высокой производительности систем геометрического моделирования и проектирования необходимо правильно выбрать базовый уровень и развивать имеющиеся теоретические и практические достижения. При этом становится актуальной разработка эффективных алгоритмов компьютерной графики, возможности которой исследованы недостаточно. Указанные обстоятельства подтверждают актуальность темы исследования, ориентируя его на системное решение проблемы выбора и оптимизации базового уровня СГМ при разработке графического ядра.

Объектом исследования является базовый уровень СГМ (графический «движок»), основанный на геометрических методах и алгоритмах описания и движения твердого тела около неподвижной точки.

Предметом исследования является геометрическое моделирование поверхностей, используемое при моделировании и проектировании объектов сложной структуры.

Цель работы. Повышение эффективности существующих методов и алгоритмов проектирования и моделирования поверхностей с использованием теории описания движения твердого тела около неподвижной точки.

Цель работы достигается с помощью проведения теоретических и экспериментальных исследований, результаты которых положены в основу разработанной программы.

Задачи исследования:

1. Исследовать и оптимизировать геометрические методы и алгоритмы движения твердого тела около неподвижной точки при реализации на ЭВМ.

2. Разработать базовый уровень СГМ на основе рассматриваемых методов и алгоритмов.

3. Применить разработанное графическое ядро для моделирования поверхностей.

Научная новизна. Научная новизна теоретических и практических результатов настоящего исследования состоит в следующем:

1. Исследованы методы и алгоритмы описания движения твердого тела около неподвижной точки с использованием ЭВМ.

2. Аналитически доказаны и экспериментально подтверждены преимущества использования различных алгоритмов описания и движения твердого тела около неподвижной точки. Применен алгоритм, основанный на использовании кватернионов, который позволяет производить моделирование поверхностей в обобщенном виде.

3. Разработана методика исследования и оценки эффективности алгоритмов. Для оценки и сравнения методов и алгоритмов использовалась координатная форма преобразований и абстрактная геометрическая машина.

4. Методы и алгоритмы разработаны и реализованы в виде методического и программного обеспечения. Разработана программа моделирования

поверхностей, в которой использованы рассматриваемые методы и алгоритмы.

Практическая ценность. В результате выполненного исследования:

1. Определены преимущества и недостатки методов и алгоритмов описания движения твердого тела около неподвижной точки и область их применения.

2. Разработана методика исследования и оценки эффективности алгоритмов на основе использования координатной формы преобразований и абстрактной геометрической машины.

3. Разработаны алгоритмы на языке программирования Си, которые были использованы в основе разработанной программы моделирования и проектирования поверхностей.

Личный вклад диссертанта. Основные научные положения, теоретические выводы и прикладные разработки, а также результаты компьютерных экспериментов, представленные в диссертационной работе, получены самостоятельно.

На защиту выносятся:

1. Базовый уровень реализации графического ядра систем геометрического моделирования и проектирования.

2. Способы оптимизации алгоритмов описания движения твердого тела при ортогональном проецировании. Способы повышения быстродействия обработки рассматриваемых алгоритмов.

3. Применение и реализация предложенных алгоритмов на языке программирования Си, текст которого может быть легко перенесен на большинство аппаратных платформ и программных сред.

Реализация результатов исследования. Результаты исследования реализованы в виде методического и программного обеспечения различных версий. Разработанные программы внедрены и используются в учебном процессе с 1999 учебного года и на одном из промышленных предприятий с 2005 г.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на каф. «Прикладная геометрия и дизайн» Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета; на каф. «Прикладная геометрия» Московского авиационного института; на каф. «Автоматика и управление» Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева.

Публикации. По результатам выполненной работы опубликовано 3 научные работы, две из которых в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 72 наименований и приложения, подтверждающего реализацию полученных результатов. Работа включает 114 страниц текста, 32 рисунка и 2 таблицы. Общий объем – 128 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ В ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Алгоритмы компьютерной графики основаны на выражениях аналитической геометрии и, в большинстве случаев, представляют собой совокупность логических выражений и математических действий, которые реализуются с помощью алгоритмических языков программирования. Для разработки и оптимизации алгоритмов необходимо рассмотреть аналитическое выражение преобразований, лежащих в основе базового уровня СГМ. Установить связь между алгоритмами компьютерной графики и виртуальным пространством поможет геометрическая интерпретация аналитических выражений. В первой главе приводятся основные сведения об алгебре кватернионов, представлении кватернионов на сфере и примеры моделирования поверхностей.

Расширение операций трехмерной векторной алгебры до умножения и деления привела к появлению алгебры для четырехмерных чисел. Произведение двух векторов является кватернионом. Правила умножения кватернионов позволяют объединить в алгебре кватернионов алгебру действительных и комплексных чисел и трехмерную векторную алгебру, но не являются коммутативными. Правила умножения гиперкомплексных единиц определяют числа, имеющие двойной смысл: с одной стороны, это некоторые геометрические образы (векторы в четырехмерном пространстве), с другой стороны, это операторы преобразований в трехмерном пространстве.

Моделирование и проектирование поверхностей и ориентация тела в виртуальном пространстве естественным образом приводит к использованию алгебры кватернионов. При реализации методов и алгоритмов на ЭВМ одним из преимуществ использования кватернионов является то, что произведение кватернионов также является кватернионом. Произведение векторов не является вектором, а обработка получившегося в результате умножения выражения затрудняет алгоритмизацию и усложняет вычисления, что делает использование векторов менее эффективным.

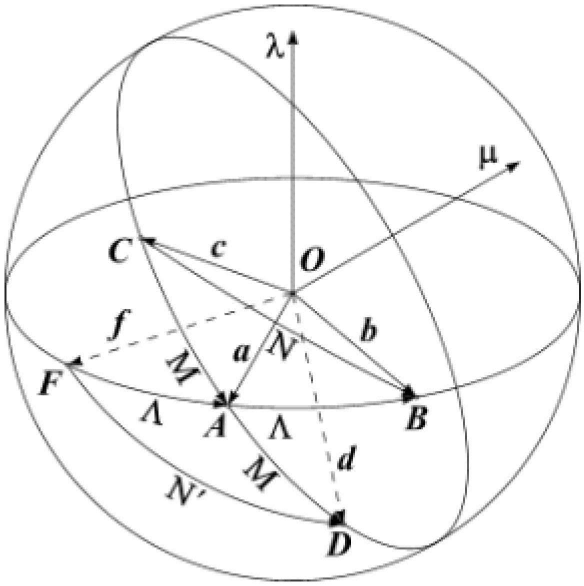

Рис. 1.1.

Рассмотрим операцию умножения кватернионов и ее представление на сфере. Пусть даны единичные кватернионы **Λ** и **M**. Оба эти кватерниона можно представить в виде дуг большого круга соответствующих длин. Дуга кватерниона arc **Λ** располагается на большом круге, перпендикулярном к вектору **λ**; дуга arc **M** – на большом круге, определяемом вектором **μ**. Конец дуги arc **Λ** и начало дуги arc **M** помещаются в точку ***A*** пересечения кругов (рис. 1.1).

Введя векторы ***a***, ***b***, ***c***, кватернионы можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}^{-1}, \qquad \mathbf{M} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}^{-1}.$$

Дуга большого круга, соединяющая точки ***C*** и ***B*** определяет некоторый кватернион $\mathbf{N} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}^{-1}$. Очевидно, что

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}^{-1} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}^{-1} \circ \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M},$$

т. е. произведению кватернионов соответствует операция геометрического сложения дуг на сфере: arc **M** + arc **Λ** = arc (**Λ** ∘ **M**).

Поскольку кватернион **Λ** – скользящая дуга на сфере, то **Λ** равняется также $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{f}^{-1}$ (углы ***FOA*** и ***AOB*** равны и определяются углом ϑ); аналогично кватерниону **M** соответствует $\boldsymbol{d} \circ \boldsymbol{a}^{-1}$; отсюда следует, что произведению $\mathbf{M} \circ \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{d} \circ \boldsymbol{a}^{-1} \circ \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{f}^{-1} = \boldsymbol{d} \circ \boldsymbol{f}^{-1}$ соответствует дуга ***FD***, представляющая кватернион $\mathbf{N}' = \mathbf{M} \circ \mathbf{\Lambda}$, т. е.

$$\mathrm{arc}\,\mathbf{\Lambda} + \mathrm{arc}\,\mathbf{M} = \mathrm{arc}\,(\mathbf{M} \circ \mathbf{\Lambda}).$$

Таким образом, векторная сумма нескольких дуг больших кругов, каждая из которых задается кватернионом, дает дугу большого круга, определяемую произведением этих кватернионов в обратном порядке.

Алгебра кватернионов позволяет представить конечный поворот (преобразование) в пространстве в простой и удобной форме. Пример использования преобразования вращения при моделировании и проектировании поверхности, в котором применены методы ориентации твердого тела в пространстве, приведен на рис 1.2. Преобразование вращения используется при моделировании аксонометрической проекции каркаса поверхности.

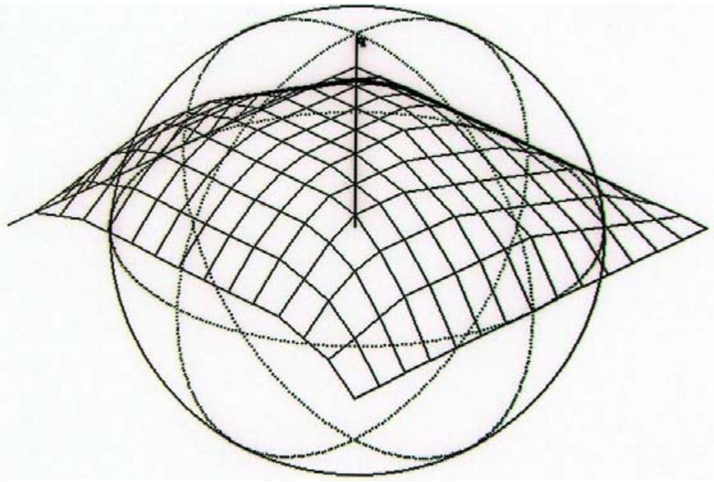

Рис 1.2.

2. ТЕОРИЯ КОНЕЧНОГО ПОВОРОТА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Произвольное конечное движение твердого тела может быть разложено на поступательное перемещение, связанное с некоторой произвольно выбранной точкой, и вращение относительно этой точки. Соответственно этому из шести независимых координат, описывающих движение твердого тела, три координаты задают перемещение некоторой фиксированной точки тела в пространстве, а три координаты характеризуют его вращение. Во второй главе рассматриваются ортогональные преобразования, которые являются математической формой описания вращательного движения твердого тела относительно фиксированной точки. Эта проблема является самостоятельной задачей механики и компьютерной графики; решение этой задачи требуется при исследовании любого движения тела, когда учитываются его конечные размеры. В большинстве практических случаев вращательное движение не зависит от поступательного перемещения твердого тела.

При решении любой динамической или кинематической задачи, где твердое тело не может быть представлено точкой, требуется рациональное описание кинематики вращательного движения. Существенную роль при этом играет выбор кинематических параметров, соответствующих трем вращательным степеням свободы движения твердого тела. Для описания движения твердого тела используются следующие кинематические параметры: направляющие косинусы, углы Эйлера и Крылова, параметры Кейли – Клейна, параметры Родрига – Гамильтона. Параметры Родрига – Гамильтона, представляющие собой компоненты кватерниона, имеют ряд преимуществ. В отличие от углов Эйлера, эти параметры не вырождаются при любом положении твердого тела, т. е. не обращаются в бесконечность ни сами параметры, ни скорости их изменения. Число параметров Родрига – Гамильтона равно четырем, т. е. имеется одно уравнение связи, в отличие от шести уравнений связи в случае направляющих косинусов. С другой стороны, эти параметры характеризуют наиболее естественный способ задания положения твердого тела с помощью плоского вращения.

Конечное вращение твердого тела (т. е. движение тела, имеющего неподвижную точку) имеет ту особенность, что оно всегда оставляет неподвижной в пространстве одну ось. Этот факт устанавливается известной теоремой Эйлера; в соответствии с ней любое вращательное движение твердого тела эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси и может быть задано конечным поворотом вокруг этой оси, или вектором конечного поворота, направленным по оси эйлерова вращения и имеющим длину, зависящую от угла вращения. Угол плоского вращения не зависит от центра вращения, а оси плоского вращения остаются параллельными друг другу. В этом смысле, вектор конечного поворота является инвариантом произвольного перемещения тела. В частности, произвольное перемещение можно разложить на два поступательных перемещения – вдоль оси вектора поворота и в плоскости вращения – и собственно вращение. Выбором оси (или центра) плоского вращения можно поступательное перемещение в плоскости вращения свести к нулю (т. е. объединить его с вращением; при этом ось вращения становится так называемым центром вращения); в этом случае произвольное перемещение твердого тела сводится к винтовому движению.

Вектор конечного поворота определяет параметры Родрига – Гамильтона (так же, как и параметры Кейли – Клейна). Применение такого рода кинематических параметров естественным образом приводит к использованию кватернионов. Кватернионы позволяют наиболее удобным образом записывать все операции, связанные с описанием и исследованием движения твердого тела.

Наиболее общим способом описания вращательного движения твердого тела является способ, при котором ориентация твердого тела определяется ориентацией ортогональной (декартовой) системы координат, связанной с телом. Матрица направляющих косинусов является наиболее общим способом задания движения твердого тела.

Рассмотрим представление ортогонального преобразования в форме умножения кватернионов. Пусть в пространстве **H** задана операция вращения, определяемая единичным кватернионом, которая вектору $\boldsymbol{r}$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{r}'$:

$$\boldsymbol{r}' = \Lambda \circ \boldsymbol{r} \circ \widetilde{\Lambda}.$$

Очевидно, что векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}$ определены своими компонентами в гиперкомплексном базисе **H**, при этом операция вращения задает преобразование вектора в вектор, выполняемое относительно фиксированного базиса. Координатная форма преобразования:

$$\left.\begin{aligned} r_1' &= \left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) r_1 + 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3\right) r_2 + 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\right) r_3, \\ r_2' &= 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right) r_1 + \left(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2\right) r_2 + 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right) r_3, \\ r_3' &= 2\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right) r_1 + 2\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right) r_2 + \left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) r_3. \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

Таким образом, преобразованиям базисов и координат неизменного вектора можно найти однозначно им соответствующие операции над кватернионами. Полученные в этой главе преобразования могут быть объединены для определения результирующего преобразования. Сложение поворотов с использованием кватернионов позволяет осуществлять плавный переход между осями вращения. Собственный кватернион преобразования имеет компоненты, которыми являются параметры Родрига – Гамильтона. Все известные результаты теории конечного поворота получаются в виде операций умножения кватернионов. Использование кватернионов позволяет получить ряд новых результатов: теорему сложения преобразований (поворотов) для параметров Родрига – Гамильтона, обобщение теоремы переставимости конечных поворотов.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для удобства совмещения осей координатной системы с экранными координатами и уменьшения количества дополнительных преобразований был выбран порядок осей левосторонней координатной системы. При этом задается поверхность проецирования. Затем определяется коэффициент масштабирования, который предназначен для размещения объекта в видимой области экрана. Поверхность, в рассматриваемом случае, состоит из вершин соединенных прямыми линиями. Если каждой вершине присвоить значение (высоту), то поверхность приобретает объем (рис. 3.1).

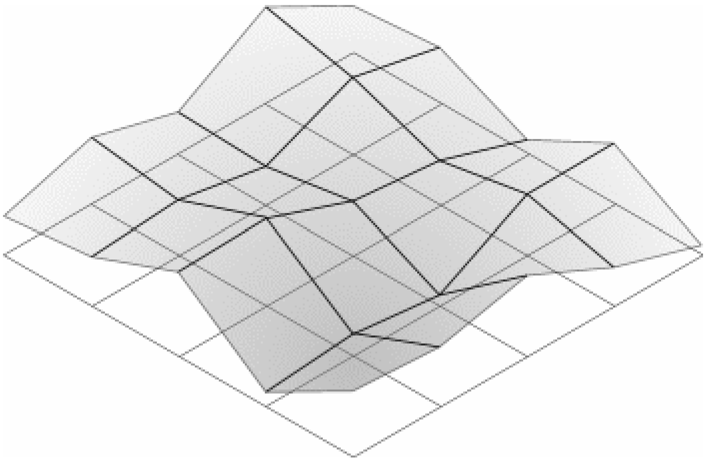

Рис. 3.1

Алгоритм хранения и вывода высот из таблицы легко реализуется на ЭВМ и представляет собой последовательный циклический вывод. При этом отпадает необходимость хранить координаты сетки, которые задаются параметрическим способом, а вместо трех координат вершины достаточно хранить одно значение высоты. Если хранить все три координаты вершины, то появляется возможность проектирования многоуровневых поверхностей и объектов сложной структуры.

Таким образом, задается ортогональная экранная проекция каркаса поверхности. Перемещение перпендикулярно плоскости экрана при ортогональном проецировании не изменит проекцию поверхности. Описание и движение массива точек (вершин), составляющих поверхность, могут быть произведены с использованием рассмотренных в теоретической части работы методов и алгоритмов, которые позволяют рассматривать поверхность под разными углами и с разных сторон.

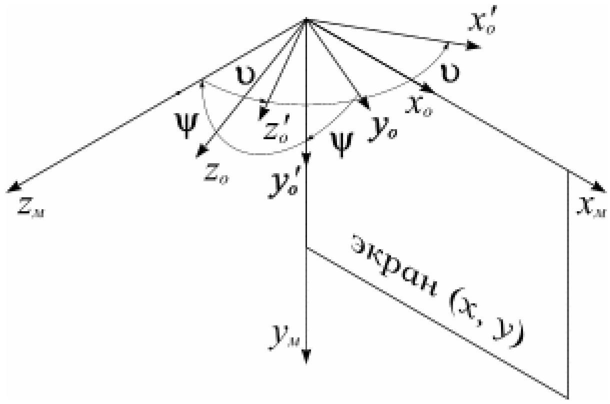

Рис 3.2.

I. Моделирование с использованием углов Крылова.

Для аналитического описания движения поверхности удобно использовать координатную форму матрицы преобразования вращения:

$$\left.\begin{aligned} x_м &= (\cos\varphi\cos\psi)x_o + (\cos\psi\sin\varphi)y_o - (\sin\psi)z_o,\\ y_м &= (\sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi)x_o + (\sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi)y_o + (\sin\vartheta\cos\psi)z_o,\\ z_м &= (\cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)x_o + (\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi)y_o + (\cos\vartheta\cos\psi)z_o.\end{aligned}\right\} (3.1)$$

При ортогональном проецировании на одну из координатных плоскостей достаточно выбрать любые две строки преобразования (3.1). Для проецирования на плоскость экрана $x_м y_м$ в соответствии с рис. 3.2 это первые две строки:

$$\left.\begin{aligned} x_м &= (\cos\varphi\cos\psi)x_o + (\cos\psi\sin\varphi)y_o - (\sin\psi)z_o,\\ y_м &= (\sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi)x_o + (\sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi)y_o + (\sin\vartheta\cos\psi)z_o.\end{aligned}\right\} (3.2)$$

Объединим преобразования сдвига, вращения и масштабирования для размещения моделируемого объекта на экране:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_c + kx_м,\\ y &= y_c + ky_м,\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

где x_c и y_c – координаты, задающие смещение на плоскости экрана; k – коэффициент масштабирования.

В рассматриваемом случае, проекция xy для преобразований с использованием углов Крылова проще преобразований с использованием углов Эйлера и не требует дополнительной обработки. При расчете экранной координаты x используются только два угла, что упрощает вычисления.

Частный случай. Для изучения поверхности на экране, в большинстве случаев, достаточно две степени свободы. Одна из степеней свободы позволяет менять угол обзора моделируемого объекта (угол тангажа или визирования). Другая степень свободы используется для вращения поверхности вокруг оси, которая обеспечивает поворот нужной стороны поверхности к наблюдателю (угол курса). Нет необходимости накренять поверхность для ее лучшего обзора. При моделировании поверхности с использованием двух степеней свободы преобразование (3.2) упрощается, т. к. используются матрицы вращения только вокруг двух осей, а ее координатная форма, в соответствии с рис. 3.2, выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_м &= (\cos\psi)x_o - (\sin\psi)z_o, \\ y_м &= (\sin\vartheta\sin\psi)x_o + (\cos\vartheta)y_o + (\sin\vartheta\cos\psi)z_o, \\ z_м &= (\cos\vartheta\sin\psi)x_o - (\sin\vartheta)y_o + (\cos\vartheta\cos\psi)z_o. \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

Ортогональная экранная проекция xy в соответствии с рис. 3.2 описывается двумя верхними строками преобразования (3.4):

$$\left.\begin{aligned} x_м &= (\cos\psi)x_o - (\sin\psi)z_o, \\ y_м &= (\sin\vartheta\sin\psi)x_o + (\cos\vartheta)y_o + (\sin\vartheta\cos\psi)z_o. \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

Объединение с преобразованиями сдвига и масштабирования записывается в виде (3.3). Горизонтальная экранная координата x зависит только от одного угла. При этом скорость обработки вершин и вывода поверхности (объектов) при проецировании на координатные плоскости $x_м y_м$ и $x_м z_м$ выше, чем на координатную плоскость $y_м z_м$.

II. Моделирование с использованием кватернионов.

Избавиться от вырождения параметров и происходящем при этом неудобстве в управлении можно с помощью использования кватернионов. Как и в случае с направляющими косинусами, для целей ортогонального проецирования на плоскость экрана и управления с помощью манипулятора, имеющего две степени свободы, достаточно выбрать любые две строки координатной записи вида (2.1):

$$\left.\begin{aligned} x_м &= \left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right)x_o + 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3\right)y_o + 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\right)z_o, \\ y_м &= 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right)x_o + \left(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)y_o + 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right)z_o, \\ z_м &= 2\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right)x_o + 2\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right)y_o + \left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)z_o. \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

Для экранной проекции xy в соответствии с рис. 3.2 это первые две строки:

$$\left.\begin{aligned} x_м &= \left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right)x_o + 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3\right)y_o + 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\right)z_o, \\ y_м &= 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3\right)x_o + \left(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)y_o + 2\left(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1\right)z_o. \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

Объединение сдвига, масштабирования и вращения записывается в виде преобразования (3.3).

Пример ориентации с использованием кватернионов:

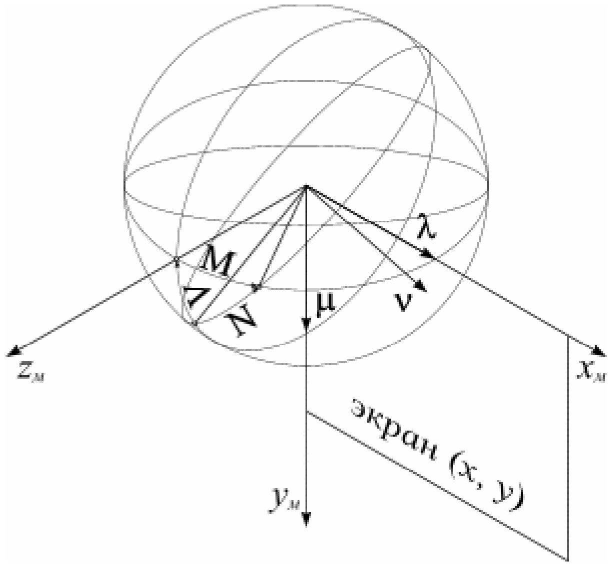

Рис 3.3.

На рис. 3.3 использовано сложение дуг на сфере с использованием кватернионов ($\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \mathbf{\Lambda}$). Таким образом, объединяются два вращения вокруг координатных осей $x_м$ и $y_м$.

Связь кинематических параметров и алгоритмов.

Рассмотрим связь кватерниона преобразования с другими кинематическими параметрами.

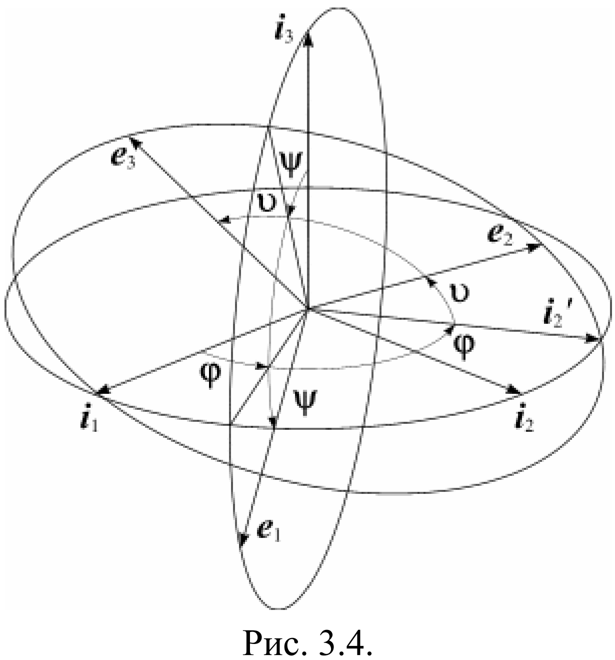

Рис. 3.4.

Рассмотрим последовательность трех поворотов на углы Крылова (рис. 3.4), совершаемых вокруг координатных осей преобразуемого базиса. Первый поворот выполняется вокруг оси $\boldsymbol{i}_3$ на угол курса φ, второй поворот происходит по оси $\boldsymbol{i}_2'$ на угол крена ψ и третий – вокруг оси $\boldsymbol{e}_1$ на угол тангажа ϑ. Матрица преобразования $\mathbf{A}$, задающая переход от системы координат $\boldsymbol{I}$ к системе $\boldsymbol{E}$, получается путем умножения трех матриц плоских вращений:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \\ \sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\psi \end{Vmatrix}.$$

Выполняя умножение трех кватернионов, получаем следующие значения компонент в функции углов Крылова:

$$\left.\begin{aligned} \nu_0^* &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}, \\ \nu_1^* &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}, \\ \nu_2^* &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}, \\ \nu_3^* &= \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Параметры Кейли – Клейна являются комплексными комбинациями компонент кватерниона. Они вводятся в кинематику вращения твердого тела либо посредством стереографического проецирования сферы на плоскость и задания дробно-линейного преобразования плоскости в себя, либо с помощью изоморфной операции линейного преобразования, задаваемой унитарной матрицей. Для установления связи кватерниона с параметрами Кейли – Клейна был использован второй путь.

Приведенное исследование связи параметров Родрига – Гамильтона с другими кинематическими параметрами может быть использовано при одновременном использовании различных кинематических параметров.

Сравнительный анализ алгоритмов.

Для оценки и сравнения рассмотренных алгоритмов удобно использовать универсальную абстрактную вычислительную машину (АМ), т. к. алгоритмы представляют собой аналитическое выражение геометрических преобразований и состоят из целых и действительных чисел, арифметических операций и элементарных функций. Чтобы снизить количество вычислений и повысить скорость обработки, часто используются таблицы с заранее вычисленными значениями. Например, тригонометрические таблицы с шагом в один градус. Поэтому тригонометрические функции в алгоритмах представляют собой действительные числа, что упрощает их сравнение, а стоимость такта АМ при их обработке равна стоимости такта при вычислениях с действительными числами.

Произведем оценку времени необходимого в общем случае вращения одной точки. Преобразование сдвига и масштабирования одинаковы для всех сравниваемых преобразований, и их можно исключить из сравнения, т. е. будет произведено сравнение только алгоритмов преобразования вращения в пространстве. Такие преобразования описываются с помощью алгоритмов (3.2), (3.5), (3.7), которые состоят из действительных чисел и арифметических операций, а именно сложений и умножений. Составим сводную таблицу необходимых для обработки одной точки арифметических действий (тактов) АМ:

Таблица 3.1.

Алгоритм	Умножения	Сложения
С тремя степенями свободы (3.2)	15	6
С двумя степенями свободы (3.5)	7	3
С использованием кватернионов (3.7)	26	14

Из таблицы 3.1 можно сделать вывод, что самым быстрым является алгоритм с двумя степенями свободы, а самым медленным – алгоритм с использованием кватернионов. Он примерно в 4 раза медленнее алгоритма (3.5) и примерно в 2 раза медленнее алгоритма (3.2). Такой результат не является неожиданным, поскольку алгоритм (3.7) является общей формой преобразования, а алгоритм (3.2) – частный упрощенный случай.

Рассмотрим свойства алгоритмов в совокупности и определим возможную область их применения.

Основным недостатком алгоритма 3.2 является вырождение параметров при значении углов π / 2, что затрудняет его использование для плавного перемещения вокруг объекта. Быстродействие алгоритма среднее. К его преимуществам можно отнести его широкую распространенность и простоту пространственного описания.

Ограничением алгоритма (3.5) является то, что он имеет только две степени свободы и может быть использован только для моделирования объектов и расчетов ориентации, где не требуется накренять объект при управлении. К его преимуществам можно отнести высокое быстродействие и простоту.

Алгоритм (3.7) позволяет моделировать и управлять ориентацией объекта в обобщенном виде и может быть использован практически для любых задач управления и ориентации твердого тела. К его недостаткам можно отнести низкое быстродействие. Но и этот его недостаток не является критическим, т. к. в реальных условиях время выполнения алгоритмов занимает лишь малую часть от общего времени преобразований и обработки. Это связано с тем, что мы производили сравнение с использованием АМ, которая пригодна только для оценки самих алгоритмов.

При сравнении алгоритмов на практике, в качестве единицы сравнения (показателя производительности), было выбрано количество обрабатываемых кадров в секунду. Этот показатель широко распространен на сегодняшний день и является основным показателем определения быстродействия при выполнении обработки в реальном времени. Несмотря на множество факторов, влияющих на результаты, теоретические исследования были подтверждены на практике. Отличия от теоретических результатов, полученные при моделировании на компьютере, вызваны аппаратными и программными особенностями платформы, на которой производилось моделирование.

Пример моделирования поверхности (рис. 3.5).

Рис 3.5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены следующие теоретические и практические результаты:

1. Рассмотрена связь геометрии на сфере и на плоскости. Установлена связь алгебры кватернионов с геометрическими преобразованиями в пространстве. Предложено рациональное описание кинематики вращательного движения. Проведен анализ преобразований объектов с использованием матричного аппарата и аппарата кватернионов. Выявлены их возможности и ограничения при реализации на ЭВМ.

2. Рассмотрены ортогональные преобразования, являющиеся в соответствии с теоремой Эйлера конечными поворотами. Установлено изоморфное

соответствие операции ортогонального преобразования и операции умножения кватернионов. Все известные результаты теории конечного поворота получены в виде операций умножения кватернионов.

3. Проведен сравнительный анализ алгоритмов описания и движения твердого тела. Оценка быстродействия алгоритмов на основе АМ в совокупности с рассмотренными преимуществами и недостатками методов и алгоритмов ориентации определила область применения преобразований. Предложена оптимизация алгоритмов преобразований при ортогональном проецировании. Приведенное исследование связи параметров Родрига – Гамильтона с другими кинематическими параметрами раскрывает универсальность преобразований с использованием кватернионов.

4. Разработана программа моделирования и проектирования поверхностей. На основе результатов произведенных исследований предлагается производить выбор методов и алгоритмов, лежащих в основе графического ядра программ геометрического моделирования и проектирования.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Дегтярев, М. Ю. Моделирование поверхностей с использованием тесселяции [Электронный ресурс] / М. Ю. Дегтярев // Электронный журнал «Прикладная геометрия». – 2005. – № 17.
– Режим доступа: http://www.mai.ru/~apg/volume7/v7_n17.htm.

2. Дегтярев, М. Ю. Моделирование поверхностей с использованием геометрических методов и алгоритмов описания движения твердого тела с неподвижной точкой [Текст] / М. Ю. Дегтярев // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2005. – № 4. С. 30-32.

3. Дегтярев, М. Ю. Быстродействие и возможности геометрических методов и алгоритмов описания движения твердого тела с неподвижной точкой при моделировании ортогональных проекций [Текст] / М. Ю. Дегтярев, В. Ф. Снигирев, В. И. Якунин // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2005. – № 4. С. 33–35.