

На правах рукописи

Ловцов Александр Дмитриевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И
ОДНОСТОРОННИХ СВЯЗЕЙ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург 2006

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Санкт–Петербургский государственный политехнический университет»

Научный консультант: Заслуженный деятель науки и техники РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Розин Леонид Александрович

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор Родионов Александр Александрович,

доктор технических наук,
профессор Сливкер Владимир Исаевич,

доктор технических наук,
профессор Харлаб Вячеслав Данилович

Ведущая организация: ОАО «Всероссийский научно–исследовательский институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева»

Защита состоится 16 мая 2006 г. в 16.00 часов
на заседании диссертационного совета Д 212.229.15 при ГОУ ВПО
«Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»
по адресу: 195251, Санкт–Петербург, Политехническая ул., 29, гидрокорпус–II,
ауд. 411.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке СПбГПУ

Автореферат разослан 11 апреля 2006 г.

И. о. ученого секретаря
диссертационного совета

Бухарцев В. Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Одной из важнейших задач, часто встречающейся при расчете конструкций в строительстве, машиностроении, приборостроении, робототехнике и других отраслях инженерной деятельности, является задача определения усилий контактного взаимодействия между деформируемыми телами или частями одного и того же тела с заранее неизвестной зоной контакта. Во многих случаях именно состояние контактной зоны является определяющим с точки зрения прочности и работоспособности сооружений и конструкций. Область строительной механики, относящаяся к задачам контактного взаимодействия деформируемых тел, одна из наиболее динамично развивающихся областей механики. Практика ставит множество новых проблем, требующих постановки новых задач и разработки методов их решения. Как правило, эффективными оказываются проблемно–ориентированные методы и алгоритмы, которые учитывают специфические особенности приложений. Несмотря на большое число работ, посвященных задачам с односторонними связями и трением Кулона, остается еще много нерешенных проблем, относящихся к строительной механике и представляющих большое значение для практики. Постановкам и разработкам методов решения некоторых из подобных задач посвящена настоящая диссертация.

Цели работы состоят в следующем: постановка задач строительной механики для продольной и изгибной деформаций балки, взаимодействующей посредством трения Кулона (при заданном предельном трении) с линейно и нелинейно-упругим винклеровским основанием; разработка методов, алгоритмов и их программная реализация для решения указанных задач; применение разработанных методов к расчету магистральных трубопроводов, трубопроводов, проходящих по дну шельфовой зоны морей или заглубленных в грунт с нелинейно-упругими характеристиками, и предназначенных для транспортировки нефти и газа; решение задач с идеальными односторонними связями на основе задачи дополненности, алгоритма Лемке и его модификаций и трактовка этих алгоритмов в духе методов строительной механики; применение линейной задачи дополненности и алгоритма Лемке к решению задач с заданными предельными силами трения; применение линейной задачи дополненности и

алгоритма Лемке к решению задач одностороннего контакта с трением Кулона с использованием известного метода итераций по предельным силам трения.

Научная новизна.

- Сформулированы вариационные постановки задач и разработаны методы их решения для продольной и изгибной деформации балки, взаимодействующей посредством трения Кулона с дискретными опорами (жесткими и/или упругими) или со сплошным упругим основанием винклеровского типа при заданном предельном трении;
- Разработаны методы и алгоритмы расчета балки–трубопровода, находящейся в нелинейно-упругой среде под действием заданных перемещений грунта, получены решения ряда конкретных задач и выполнен анализ как эффективности предложенных методов расчета, так и полученных результатов;
- Для задач идеального контакта упругих деформируемых тел на примере плоской задачи теории упругости показан способ дискретизации, приводящий к проблеме условной оптимизации квадратичного функционала, условия Куна–Таккера для которого приводят к линейной задаче дополненности; разработаны варианты алгоритма Лемке для решения линейной задачи дополненности и предложена их трактовка в форме классических методов строительной механики – метода сил, метода перемещений, смешанного метода – с привлечением понятий: «основная система», «единичные и грузовое состояния», «условие эквивалентности заданной и основной систем»;
- Для задач расчета продольной и изгибной деформации балки, взаимодействующей с упругим винклеровским основанием посредством трения Кулона, показан способ сведения проблемы безусловной минимизации выпуклого недифференцируемого функционала к проблеме условной минимизации выпуклого дифференцируемого функционала, условия Куна–Таккера которого приводят к линейной задаче дополненности стандартного вида. Разработаны соответствующие алгоритмы решения линейной задачи дополненности; выполнено сопоставление разработанного метода и метода поточечной релаксации;
- Разработан вариант метода блочной релаксации, объединяющий в себе сильные стороны методов поточечной релаксации и решения линейной задачи дополненности. Показано применение алгоритмов линейной задачи дополненности к решению задач с односторонними связями и трением.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием корректных математических методов, исследованием внутренней сходимости итерационных процессов и сопоставлением решений, полученных различными способами.

Практическая значимость. Разработки и рекомендации, полученные в диссертации, имеют теоретическое и практическое значение для развития и построения численных алгоритмов расчета систем с односторонними связями и трением Кулона. Проведена серия расчетов различных заглубленных в грунт шельфовой зоны моря трубопроводов на действие движущихся ледовых образований; рассмотрены различные типы оснований (глина, песок) и их жесткостные характеристики. Выполнен анализ полученных результатов.

Апробация работы. Основные положения и результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались на: Третьих чтениях памяти проф. М. П. Даниловского «Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса» (Хабаровск, 2000 г.); Восьмом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике. (Пермь, 2001); Региональной научно-практической конференции «Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса» (Хабаровск, 2003 г.); XX и XXI международных конференциях «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 2003, 2005 гг.); Третьей международной научной конференции «Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке» (Хабаровск, 2003); Международной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики» (Хабаровск, 2003); VI международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (Санкт-Петербург, 2005 г.); Кафедре «Строительная механика и теория упругости» СПбГПУ (2003, 2005); Международной научно-технической конференции «Вычислительная механика деформируемого твердого тела» (Москва, 2006); Международной научной конференции ИАС ТОГУ «Новые идеи нового века» (Хабаровск, 2001, 2002, 2006).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 204 наименований; изложена на 352 страницах, содержит 135 рисунков и 13 таблиц.

Автор выражает глубокую признательность заслуженному деятелю науки и техники РФ, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Розину за постоянное внимание к работе, ценные советы и консультации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении диссертации изложено обоснование актуальности темы, дан обзор состояния проблемы, сформулированы цели работы и приведено краткое изложение содержания по главам.

Состояние проблемы. Впервые задачу о контакте деформируемых тел как вариационную задачу с ограничениями в форме неравенств рассмотрел А. Синьорини. В дальнейшем этой проблеме было посвящено большое количество работ А. В. Вовкушевского, Р. Гловинского, Р. В. Гольдштейна, Ж. Дюво, Н. Кикужи, А. Кларбрина, А. С. Кравчука, Т. А. Ларсена, Ж.-Л. Лионса, Дж. Одена, П. Панагиотопулоса, Л. А. Розина, А. А. Спектора, Р. Тремольера, Р. П. Федоренко, Г. Фикера, А. М. Хлуднева, Б. А. Шойхета и многих др. Эти исследования служат основой построения численных методов.

При численном решении задачи контакта упругих тел сводятся к конечно-номерным задачам с дискретными односторонними связями. В этом смысле они приближаются к задачам строительной механики с односторонними связями. Методы решения указанных задач мало различаются, что открывает возможности их одновременного развития и переноса с одних задач на другие. В задачах строительной механики подобной проблемой занимались В. А. Баженов, В. Н. Гордеев, Е. А. Гоцуляк, О. С. Зенкевич, Т. С. Ким, Г. Н. Колесников, Г. С. Кондаков, Л. С. Ляхович, А. И. Оглобля, А. В. Перельмутер, И. М. Рабинович, В. И. Сливкер, А. Франкавилла, В. Д. Харлаб, В. Г. Яцура и многие др.

В силу разделения односторонних связей на идеальные связи и связи с трением контактные задачи условно можно разбить на два типа. К первому типу относятся задачи об идеальном контакте линейно упругих тел, допускающие переход к проблеме условной оптимизации некоторого функционала. В этом случае задача имеет решение и это решение единственно. Второй тип задач можно сформулировать в виде вариационного неравенства, но соответствующего принципа минимума нет. Исключение составляет случай известных предельных сил трения, для которого возможна постановка задачи в виде принци-

па минимума выпуклого функционала и, следовательно, построение методов решения с гарантированной сходимостью

Двойственные вариационные постановки и постановки задач в виде функционалов, аналогичных обобщенным функционалам Треффца, позволяют резко сократить количество неизвестных дискретизованной задачи. Неизвестными в этом случае являются силы контактного взаимодействия и взаимные перемещения точек зоны отрыва, что приводит к использованию контактных матриц жесткости и податливости. В случае использования квадратичных функционалов, записанных в терминах контактных усилий или перемещений условия оптимальности Куна – Таккера для задачи условной оптимизации представляют собой так называемую линейную задачу дополнителности (ЛЗД). Для стержневых систем с идеальными односторонними связями ЛЗД можно сформировать непосредственно, не рассматривая соответствующий функционал. Следовательно, решение контактной задачи можно получить либо путем решения задачи квадратичного программирования, либо путем непосредственного решения задачи дополнителности. В работах Дж. Данцига, Р. В. Коттла, К. Е. Лемке и др. разработаны эффективные алгоритмы решения ЛЗД, которые можно трактовать как некоторые модификации симплекс-метода. Наиболее эффективный из них – алгоритм Лемке – обладает рядом преимуществ по сравнению с большинством методов квадратичного программирования.

В настоящей диссертации разрабатываются методы решения задач строительной механики с заданными предельными силами трения, с идеальными и неидеальными односторонними связями.

В первой главе работы рассматривается цикл задач, относящихся к продольной деформации многопролетной балки на дискретных жестких или линейно-упругих опорах или на сплошном линейно-упругом основании.

В п. 1.2 рассматривается задача о многопролетной балке (возникающая при расчете магистральных трубопроводов), на которую в продольном направлении по оси x действует температура и реакции в виде сил трения на опорах. Номера пролетов соответствуют номерам правых опор. Последние пронумерованы от 0 до m . Балка жестко закреплена на опоре 0 и свободно лежит на других опорах, взаимодействуя с ними по схеме односторонних связей с трением Кулона. В качестве продольного внешнего воздействия принята температура,

что не отражается на характере решения задачи при любом другом подобном внешнем воздействии.

Обозначим через: T_i – температуру; E_i – продольную жесткость балки, постоянные в пределах пролета i ; l_i – длину пролета i ; $f_i \geq 0$ – коэффициент трения опоры i ; $F_{ni} \leq 0$ – поперечную реакцию этой опоры, найденную из расчета балки в поперечном направлении; α – коэффициент линейного расширения; F_{ii} – реакцию взаимодействия балки и опоры i (в дальнейшем F_{ii} будем называть реакцией трения на опоре i); N_i – продольную силу в пролете i .

Условия трения между балкой и опорой i при простом процессе загрузки запишутся в виде

$$1. |F_{ii}| \leq f_i |F_{ni}| = -f_i F_{ni}, F_{ni} \leq 0; \quad 2. (|F_{ii}| + f_i F_{ni}) \cdot u_i = 0; \quad 3. (F_{ii}) \cdot u_i \leq 0. \quad (1)$$

Получена вариационная постановка описанной задачи в форме вариационного неравенства

$$\sum_{k=1}^m \int_0^{l_k} E_k \varepsilon(u) \varepsilon(v-u) d\xi_k - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha (T_k E_k - T_{k+1} E_{k+1}) (v_k - u_k) - \alpha T_m E_m (v_m - u_m) + \sum_{k=1}^m f_k |F_{nk}| (|v_k| - |u_k|) \geq 0, \quad (2)$$

определенного на любых геометрически возможных перемещениях v и являющегося принципом возможных перемещений для рассматриваемой задачи с трением. Рассмотрим недифференцируемый функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_0^{l_k} E_k \varepsilon(v)^2 d\xi_k - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha (T_k E_k - T_{k+1} E_{k+1}) v_k - \alpha T_m E_m v_m + \sum_{k=1}^m f_k |F_{nk}| |v_k|, \quad v(0) = 0, \quad (3)$$

который является выпуклым. На основании известной теоремы Лионса вариационная постановка задачи в форме неравенства (2) при $u(0) = 0$ эквивалентна следующей вариационной задаче:

$$J(u_1, \dots, u_m) = \inf_{v_1, \dots, v_m} J(v_1, \dots, v_m). \quad (4)$$

Здесь учтено, что $dv/d\xi_i = \alpha T_i + N_i/E_i = (v_i - v_{i-1})/l_i$. Функционал J представляет собой полную потенциальную энергию системы, а (4) является обобщением обычного принципа минимума потенциальной энергии на случай задачи с трением. Функционал (3) недифференцируемый, поэтому для решения задачи (4) воспользуемся итерационным методом поточечной релаксации:

$$J(u_1^{r+1}, \dots, u_{i-1}^{r+1}, u_i^{r+1}, u_{i+1}^r, \dots, u_m^r) \leq J(u_1^{r+1}, \dots, u_{i-1}^{r+1}, v_i, u_{i+1}^r, \dots, u_m^r), \quad (5)$$

для которого в книге Р. Гловинского и др. доказана сходимость к решению задачи. Решение неравенства (5) для нахождения u_i^{r+1} сводится к решению исходной задачи для двухпролетной балки с пролетами i , $i+1$ с трением на средней опоре i , когда на крайних опорах $i-1$ и $i+1$ заданы перемещения u_{i-1}^{r+1} и u_{i+1}^r . Строится точное алгоритмическое решение подобной задачи.

Сходимость метода релаксации можно ускорить, если воспользоваться приемом построения верхней (нижней) релаксации. В этом случае после определения u_i в $(r+1)$ -м приближении, которое обозначим \underline{u}_i^{r+1} , окончательное его значение принимается по формуле

$$u_i^{r+1} = u_i^r + \omega(\underline{u}_i^{r+1} - u_i^r), \quad (6)$$

где $1 < \omega < 2$ ($0 < \omega < 1$) – параметр верхней (нижней) релаксации. В практических расчетах величину параметра, близкую к ω_{opt} , будем подбирать по результатам численных экспериментов.

В п. 1.3 кроме трения учитывается податливость опор в продольном направлении. Структура параграфа совпадает с таковой в п. 1.2. Закон податливости i -ой опоры принят по формуле

$$u_{ci} = F_{ii}/K_i = (N_i - N_{i+1})/K_i \quad (7)$$

где $K_i \geq 0$ – коэффициент жесткости опоры i . Взаимное смещение балки и опоры i , т. е. величина проскальзывания на контакте между балкой и опорой i будет

$$\Delta u_i = u_i + u_{ci} = u_i + F_{ii}/K_i, \quad (8)$$

где u_{ci} – перемещение опоры i . На контакте между опорой i и балкой, при простом процессе загрузки, должна выполняться группа условий трения Кулона типа (1) с заменой u_i на Δu_i .

Вариационное неравенство в данном случае будет

$$\sum_{k=1}^m \int_0^{l_k} E_k \varepsilon(u) \varepsilon(v-u) d\xi_k - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha (T_k E_k - T_{k+1} E_{k+1})(v_k - u_k) - \alpha T_m E_m (v_m - u_m) + \sum k_k u_{ck} (v_{ck} - u_{ck}) + \sum_{k=1}^m f_k |F_{nk}| (|v_k + v_{ck}| - |u_k + u_{ck}|) \geq 0. \quad (9)$$

Функционал

$$\begin{aligned}
J(v, v_{c1}, \dots, v_{cm}) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_0^{l_k} E_k \varepsilon(v)^2 d\xi_k - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha (T_k E_k - T_{k+1} E_{k+1}) v_k - \alpha T_m E_m v_m + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k_k v_{ck}^2 + \sum_{k=1}^m f_k |F_{nk}| |v_k + v_{ck}|, \quad v(0) = 0 \quad \forall (v, v_k, v_{ck})
\end{aligned} \tag{10}$$

является выпуклым и недифференцируемым. Вариационная постановка задачи в форме неравенства (9) эквивалентна следующей вариационной задаче для функционала (10)

$$J(u_1, \dots, u_m, u_{c1}, \dots, u_{cm}) = \inf_{v_1, \dots, v_m, v_{c1}, \dots, v_{cm}} J(v_1, \dots, v_m, v_{c1}, \dots, v_{cm}). \tag{11}$$

Здесь учтено, что функция u определяется своими значениями u_1, \dots, u_m . Для решения (11) используем метод поточечной релаксации

$$J(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_i^{r+1}, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \leq J(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_{i,v}, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \quad \forall \varpi_{i,v}, \tag{12}$$

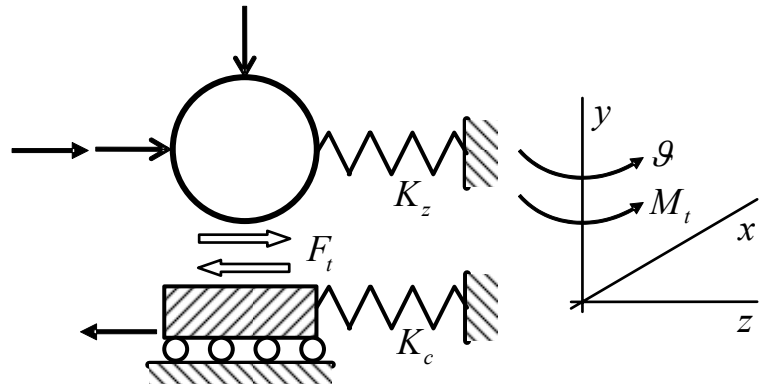
где переменные с номером i в функционале J расположены попарно и обозначены u_i, u_{ci} как ϖ_i и v_i, v_{ci} как $\varpi_{i,v}$. Точное решение неравенства (12) для нахождения ϖ_i^{r+1} осуществляется путем точного решения исходной задачи для двухпролетной балки с пролетами $i, i+1$ и трением на средней опоре, когда на крайних опорах $i-1$ и $i+1$ заданы ϖ_{i-1}^{r+1} и ϖ_{i+1}^r .

В п. 1.4 рассматривается продольная деформация балки, взаимодействующей со сплошным упругим основанием посредством трения Кулона. Решение строится в два этапа. На первом этапе выполняется дискретизация вариационных постановок задач путем разбиения балки на отдельные участки и применения квадратурных формул к соответствующим интегралам. В результате приходим к задаче о балке, взаимодействующей с дискретными упругоподатливыми опорами, расположенными на концах соответствующих участков. Используются методы и алгоритмы типа тех, которые предложены в п.п. 1.2, 1.3. Однако здесь приходится иметь дело с большим количеством опор и необходимостью выяснить погрешности, связанные с шагом дискретизации.

Во второй главе рассматриваются трубопроводы, проходящие в шельфовой зоне морей и предназначенные для транспортировки нефти и газа. При этом возникает задача об их изгибе от внешних воздействий таких, как движущиеся ледовые массы, тралы и тому подобное, что делает важной задачу изгиба балки–трубопровода, взаимодействующей с упругим основанием при наличии трения Кулона. В п. 2.1 рассматривается изгиб балки, взаимодействующей с двумя

линейно-упругими основаниями винклеровского типа, имеющими различные коэффициенты жесткости (рис. 1). С одним из них балка взаимодействует непосредственно по схеме двустороннего основания, а с другим – посредством трения Кулона. Предполагается, что балка–трубопровод расположена вдоль оси x . Изгиб балки происходит в плоскости xz . В перпендикулярной к ней плоскости xu действует заданная внешняя нагрузка $F_n \leq 0$, направленная вдоль оси u и прижимающая балку к основанию.

Обозначим: L – длина балки; EI – изгибная жесткость балки; w – перемещение оси балки по направлению z ; $p(x)$ – заданная внешняя нагрузка, действующая вдоль оси z . В направлении оси u основание предполагается жестким. В направ-



влении z балка опирается на упругоподатливое основание с коэффициентом жесткости $K_z \geq 0$. Реакция этого основания действует на балку вдоль оси z противоположно w и равна $-K_z w$. Кроме того, между балкой и той частью основания, к которой она прижимается силой F_n , возникают по оси z силы трения Кулона F_t с коэффициентом трения $f \geq 0$. Действие F_t на эту часть упруго податливого основания, коэффициент жесткости которого обозначим $K_c \geq 0$, вызывает его перемещение $w_c = F_t / K_c$.

На контакте между балкой и основанием при простом процессе загрузки должна выполняться группа условий трения Кулона подобная (1) с заменой F_{ni} на F_t , F_{ni} – на F_n и u_i – на Δw . Здесь Δw – взаимное смещение балки и основания:

$$\Delta w = w + w_c = w + F_t / K_c. \quad (13)$$

На концах $0, L$ в качестве граничных условий примем для определенности, например, $w(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ и $M(L) = 0$, $Q(L) = 0$, где M – изгибающий момент, а Q – перерезывающая сила в балке.

Вариационное неравенство для данной задачи имеет вид

$$\int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 (w^* - w)}{dx^2} dx - \int_0^L (p - K_z w)(w - w^*) dx + \int_0^L \left[K_c w_c (w_c^* - w_c) + f |F_n| (|w^* + w_c^*| - |w + w_c|) \right] dx \geq 0. \quad (14)$$

Рассмотрим недифференцируемый функционал

$$J(w^*, w_c^*) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w^*}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L (p w^* - \frac{1}{2} K_z w^{*2}) dx + \frac{1}{2} \int_0^L K_c w_c^{*2} dx + \int_0^L f |F_n| |w^* + w_c^*| dx, \quad (15)$$

$$\forall (w^*, w_c^*),$$

который является выпуклым. На основе известной теоремы Лионса можно заключить, что вариационная постановка задачи в виде неравенства (14) эквивалентна следующей вариационной задаче

$$w(0) = (dw/dx)|_{x=0} = 0, \quad J^l(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_m) = \inf_{\varpi_i^*} J^l(\varpi_1^*, \varpi_2^*, \dots, \varpi_m^*) \quad (16)$$

для выпуклого функционала (15), дискретизованного в терминах узловых величин w_i, ϑ_i, w_{ci} или $w_i^*, \vartheta_i^*, w_{ci}^*$ (обозначенных ϖ_i или ϖ_i^*) для каждой опоры $i = 1, \dots, m$.

Применим, итерационный метод поточечной релаксации

$$J^l(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_i^{r+1}, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \leq J^l(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_i^*, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \quad \forall \varpi_i^*. \quad (17)$$

Очевидно, что точное решение неравенства (17) для нахождения ϖ_i^{r+1} может быть осуществлено путем точного решения исходной задачи для двухпролетной балки с пролетами $i, i+1$ и трением на средней опоре, когда на крайних опорах заданы ϖ_{i-1}^{r+1} и ϖ_{i+1}^r .

В п. 2.2 рассматривается изгиб балки, взаимодействующей с нелинейно-упругим основанием при учете трения Кулона. Подобные задачи могут схематизировать работу заглубленных трубопроводов, находящихся в основании шельфовой зоны морей и предназначенных для транспортировки нефти и газа. Балка–трубопровод взаимодействует с тремя окружающими ее винклеровскими основаниями: слой 1 расположен над трубопроводом; слой z равен диаметру трубопровода и соответствует слою, в котором расположен трубопровод; слой 2 расположенный ниже трубопровода (рис. 2). Перемещения грунта в слоях 1, 2 становятся возможными только в результате их взаимодействия с

трубопроводом посредством соответствующих сил трения F_{1t} , F_{2t} с коэффициентами трения f_1 , f_2 . Со слоем z балка взаимодействует непосредственно. Балка-трубопровод расположена вдоль оси x и изгибается в плоскости xz вдоль оси z . Слой 1 грунта схематизируется нелинейно-упругой пружиной K_{1c} . Слой z грунта в пределах диаметра трубопровода схематизируется нелинейно-упругой пружиной K_z . На трубопровод действует нагрузка $p(x)$. Слой 2 схематизируется нелинейно-упругой пружиной K_{2c} .

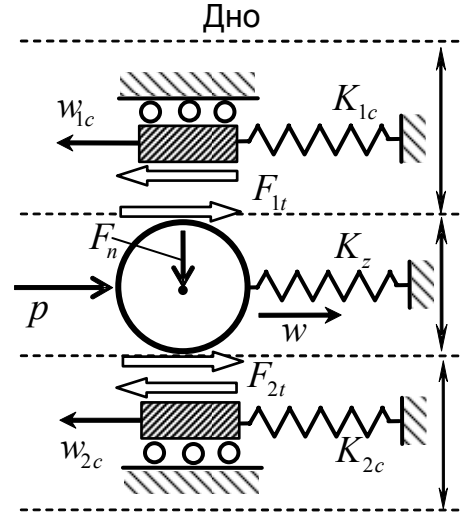


Рис. 2

Величины возможного взаимного проскальзывания между балкой – трубопроводом и соответственно слоями 1 и 2 будут $\Delta w_{1z} = w_{1c} + w$, $\Delta w_{2z} = w_{2c} + w$. Для каждого слоя условия трения запишутся в виде, подобном (1) с заменой u_i на Δw_{1z} или Δw_{2z} , F_{ti} – на F_{1t} , F_{2t} . Жесткостные характеристики слоев принимаются в виде вогнутых функций, обеспечивающих выпуклость функционалов энергии $J_z(w^*)$, $J_{1c}(w_{1c}^*)$, $J_{2c}(w_{2c}^*)$.

Пользуясь далее преобразованиями аналогичными выполненным в п. 2.1, получим следующее вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 (w^* - w)}{dx^2} dx - \int_0^L [p - q_z(w)] (w^* - w) dx + \\ & + \int_0^L \left[F_{1t} (w_{1c}^* - w_{1c}) + f_1 |F_n| (|w^* + w_{1c}^*| - |w + w_{1c}|) \right] dx + \\ & + \int_0^L \left[F_{2t} (w_{2c}^* - w_{2c}) + f_2 |F_n| (|w^* + w_{2c}^*| - |w + w_{2c}|) \right] dx \geq 0 \quad \forall (w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*). \end{aligned} \quad (18)$$

В данном случае соответствующий функционал

$$\begin{aligned} J(w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*) = & \frac{1}{2} \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 (w^* - w)}{dx^2} dx - \int_0^L p w^* dx + \int_0^L \left[J_z(w^*) + J_{1c}(w_{1c}^*) + J_{2c}(w_{2c}^*) \right] dx + \\ & + \int_0^L \left(f_1 |F_n| |w^* + w_{1c}^*| + f_2 |F_n| |w^* + w_{2c}^*| \right) dx \quad \forall (w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*), \end{aligned} \quad (19)$$

является выпуклым. Эквивалентная (18) вариационная задача для дискретизованного функционала (19) будет

$$w(0) = (dw/dx)_{x=0} = 0, \quad J^l(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_m) = \inf_{\varpi_i^*} J^l(\varpi_1^*, \varpi_2^*, \dots, \varpi_m^*), \quad (20)$$

где ϖ_i и ϖ_i^* обозначают четверки величин $w_i, \vartheta_i, w_{1ci}, w_{2ci}$ и $w_i^*, \vartheta_i^*, w_{1ci}^*, w_{2ci}^*$ для каждой опоры $i = 1, \dots, m$.

Применим для решения (20) итерационный метод поточечной релаксации

$$J^l(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_i^{r+1}, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \leq J^l(\varpi_1^{r+1}, \dots, \varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_i^*, \varpi_{i+1}^r, \dots, \varpi_m^r) \quad \forall \varpi_i^*, \quad (21)$$

для которого в нашем случае также можно построить точное решение.

Третья глава посвящена расчету заглубленных в грунт шельфовой зоны моря балок–трубопроводов на действие движущихся ледовых образований.

В п. 3.1 построены соответствующие трехслойные расчетные схемы (рис. 3). Отличие их от расчетной схемы, принятой в п. 2.2, состоит в том, что загрузка балки–трубопровода является кинематическим в виде заданных перемещений грунта.

Ошибка! Раздел не указан.

Обозначим ширину действия ледового образования на грунт вдоль оси x через L_w . Предположим, что только в пределах L_w происходит перемещение грунта $w_0(x)$, действующее на трубопровод – кинематическое нагружение. Осредненные положительные значения перемещений по слоям обозначим соответственно w_{01}, w_0, w_{02} . Возможна расчетная схема в предположении, что $w_{02} = 0$, а $w_{01} > w_0$; другими словами слой 1 грунта «обтекает» трубопровод, а слой 2 удерживает трубопровод за счет силы трения F_{2t} . Возможна также схема, когда $w_{01} > w$ и $w_{02} > w$, т. е. трубопровод сверху и снизу «обтекается» грунтом. В первом случае трубопровод дополнительно изгибает предельная сила трения $F_{1t} = f_1 |F_n|$, возникающая между трубопроводом и слоем 1. Во втором случае к ним присоединяется предельная сила трения $F_{2t} = f_2 |F_n|$ со стороны слоя 2. За пределами участка кинематического воздействия длиной L_w балка – трубопровод работает по схеме п. 2.2 при $p(x) = 0, w(x) = 0$. Выбор той или иной схемы «обтекания» трубопровода грунтом зависит от вида эпюры перемещения грунта и от априорно неизвестного перемещения трубопровода w . В связи с этим сле-

дует отметить, что схема с «обтеканием» трубопровода слоями 1, 2 мажорирует ситуацию с запасом. Кроме того, взаимодействие балки и части грунта, происходящее без посредства трения, носит односторонний характер – грунт работает только на сжатие. Это потребовало разработки двух подходов к решению задачи.

В п. 3.2 рассматривается первый из них, представляющий собой двойной итерационный процесс. Усилия в пружине K_z перед трубопроводом обозначим q_{2z} . Тогда для узла i , находящегося в пределах L_w имеем:

$$P_i^l = q_{2z}(w_{0i} - w_i) \text{ для } w_{0i} - w_i \geq 0; \quad P_i^l = 0 \text{ для } w_{0i} - w_i \leq 0; \quad w_{0i} \geq 0, w_i \geq 0. \quad (22)$$

Полные усилия, передающиеся на трубопровод в узле i на участке L_w , будут $-q_{1z}(w_i) + P_i^l$, где q_{1z} – усилие в пружине K_z за трубопроводом. Вне зоны L_w имеем:

$$-q_{1z}(w_i) \text{ при } w_i > 0 \text{ (сжатие);} \quad q_{1z}(w_i) \text{ при } w_i < 0 \text{ (растяжение).} \quad (23)$$

Определение нагрузки p или P_i^l основано на следующем итерационном процессе: в первом приближении полагаем $w = w^{(1)} = 0$ (абсолютно жесткий трубопровод); далее по формулам (22) определяем нагрузку $p^{(1)} = q_{2z}(w_0)$; методом поточечной верхней релаксации строим решение задачи $w^{(2)}$ от $p^{(1)}$; по $w^{(2)}$ с использованием (22), (23) находим $p^{(2)}$ (для случая $w_i < 0$ в усилии взаимодействия $q_{z1}(w_i)$ следует понимать как нагрузку p за пределами L_w); далее методом поточечной верхней релаксации строим решение задачи $w^{(3)}$, находим $p^{(3)}$ и т. д.

Заметим, что $p^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) можно определять по формуле $P_i^l = q_{2z}(w_{0i} - w_i)$ для $w_{0i} - w_i \geq 0$ на всем протяжении балки. Как показали численные эксперименты, итерации быстро сходятся по норме $\|p\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i^2}$ при $w \leq w_0$. Это имеет место когда $\max w^{(2)} \leq w_0$.

Для схемы с обтеканием трубопровода верхним слоем итерационный процесс несколько меняется путем добавления на каждом шаге, следующим за первым, силы трения $f_1|F_n|$. При этом $w^{(k)}$ определяется по нагрузке

$p^{(k-1)} + f_1|F_n|$ при $k = 2, 3, \dots$. Аналогичным образом для схемы с обтеканием слоев 1, 2 имеем $w^{(k)}$, которое определяется по нагрузке $p^{(k-1)} + f_1|F_n| + f_2|F_n|$.

В п. 3.3 рассматривается второй подход, основанный на методе поточечной верхней релаксации с включением в него непосредственно заданного кинематического воздействия. В большинстве случаев этот второй подход оказался более эффективным.

Будем считать, что связи между трубопроводом и грунтом по обе стороны от трубопровода являются односторонними. Такая схема физически представляется более естественной. Следует заметить, что в рассматриваемых задачах, когда отличное от нуля $w > 0$ имеет место только в пределах L_w , односторонний эффект между трубопроводом и пружиной, находящейся за ним, может проявляться на сравнительно малых участках вне L_w . Однако, учет этого фактора, во-первых, представляет принципиальный интерес и, во-вторых, позволяет разработать эффективный алгоритм расчета трубопровода на кинематическое воздействие $w_0(x)$. Итак, пусть в пределах L_w усилия, передающиеся от пружины на узел i , будут

$$-q_{1z}(w_i) + q_{2z}(w_{0i} - w_i) \text{ при } 0 \leq w_i \leq w_{0i}; \quad -q_{1z}(w_i), \quad q_{2z}(w_i) = 0, \text{ при } w_i > w_{0i}. \quad (24)$$

Вне L_w эти усилия примут вид

$$-q_{1z}(w_i), \quad -q_{2z}(w_i) = 0 \text{ при } w_i > 0; \quad q_{1z}(w_i) = 0, \quad q_{2z}(w_i) \text{ при } w_i < 0. \quad (25)$$

На основе формул (24), (25), предлагается алгоритм решения задачи, в котором сохраняется общая схема метода поточечной релаксации. На каждом шаге итерационного процесса определяются ϖ_i^{r+1} для двухпролетной балки с узлами $i-1, i, i+1$ и заданными $\varpi_{i-1}^{r+1}, \varpi_{i+1}^r$ из уравнения равновесия

$$F_{az,i}^l - q_{1ci}^l(w_i^{r+1}) - q_{2ci}^l(w_i^{r+1}) = F_{ii}^{l(r+1)} \Big|_{w_i=0},$$

$$F_{az,i}^l(w_i) = \begin{cases} a_{11}^i w_i + q_{1zi}^l(w_i) & \text{при } w_i > w_{0i}, \\ a_{11}^i w_i + q_{1zi}^l(w_i) - q_{2zi}^l(w_{0i} - w_i) & \text{при } 0 \leq w_i \leq w_{0i}, \\ a_{11}^i w_i - q_{2zi}^l(w_{0i} - w_i) & \text{при } w_i < 0. \end{cases}$$

Параграф 3.4 содержит результаты расчетов различных заглубленных в грунт шельфовой зоны моря трубопроводов на действие движущихся ледовых образований. Рассматриваются различные виды грунтов (глина, песок) и их не-

линейные жесткостные характеристики. Проведена серия расчетов различных трубопроводов и получены силы взаимодействия трубопровода с грунтом перед ним, прогибы трубопровода, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Выполнен анализ полученных результатов.

В четвертой главе работы рассматривается идеальный контакт деформируемых тел V' и V'' , имеющих почти параллельные границы L' и L'' малой кривизны, разнесенные одна от другой на величину заданного зазора $\eta_n(\xi)$, где ξ – длина дуги на L'' , L' (координата точки i'' (i') на кривой L'' (L')). Величина зазора соизмерима с перемещениями точек деформируемых тел. Нормали \mathbf{e}'_n , \mathbf{e}''_n к границам L' , L'' непараллельные, однако будем пренебрегать этим и считать их параллельными. В этом случае для предполагаемой области контакта классические граничные условия Синьорини не приводят к большим погрешностям. Примем на L'' правую систему ортов \mathbf{e}''_n , \mathbf{e}''_1 и орт \mathbf{e}''_n направим по внешней нормали к кривой L'' . Аналогичным образом введем систему ортов на L' . Условия идеального контакта на L' , L'' запишутся в виде:

$$\begin{aligned} 1. z(\xi) + \eta_n(\xi) \geq 0; \quad 2. \sigma_\tau(\xi) = \Phi^T \mathbf{A}_{LY}^T \mathbf{y}'' = 0; \quad 3. \mathbf{A}_{LY}^T \mathbf{y}'' = \mathbf{A}_{LY}^T \mathbf{y}'; \\ 4. \sigma_n(\xi) = \mathbf{n}^T \mathbf{A}_{LY}^T \mathbf{y}'' \leq 0; \quad 5. [z(\xi) + \eta_n(\xi)] \sigma_n = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где: $z(\xi) = -\mathbf{n}^T (\mathbf{u}'' - \mathbf{u}')$ – нормальная составляющая взаимных перемещений на L'' , L' ; \mathbf{y}'' , \mathbf{u}'' – векторы напряжений и перемещений на L'' , L' ; $\mathbf{n} = \mathbf{n}'' = -\mathbf{n}'$, $\Phi = \Phi'' = -\Phi'$ – векторы направляющих косинусов ортов $\mathbf{e}''_n = -\mathbf{e}'_n$ и $\mathbf{e}''_1 = -\mathbf{e}'_1$; $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_L'' = -\mathbf{A}_L'$ – матрица направляющих косинусов внешних нормалей n'' , n' для почти одинаковых кривых L'' , L' ; $\sigma_n(\xi)$, $\sigma_\tau(\xi)$ – нормальная и касательная составляющие сил контактного взаимодействия; символ $()''$ – означает соответственно $()'$ или $()''$; символы без индексов относятся ко всей области.

В п. 4.1 рассматривается метод сил решения задач с идеальными односторонними связями. Выпишем функционал Кастильяно, определенный на статически возможных напряжениях, удовлетворяющих уравнениям

$$1. \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{c} = 0, \quad \in V; \quad 2. \mathbf{A}_S^T \mathbf{y} = \mathbf{g}_S, \quad \in S_\sigma \quad (27)$$

и условиям 2, 3, 4 в (26):

$$\Pi_2(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{y} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y} dv + \int_{S_u} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S^T \mathbf{y} ds + \int_L \eta_n \mathbf{n}^T \mathbf{A}_S^T \mathbf{y} d\xi, \quad (28)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{A}_S – матрицы операций дифференцирования и направляющих косинусов n_x , n_y внешней нормали n к поверхности S ; \mathbf{D} – матрица упругости; \mathbf{c} – вектор объемных сил; \mathbf{g}_S – вектор заданных поверхностных сил.

Проведем аппроксимацию \mathbf{y} , исходя из следующего представления сил контактного взаимодействия

$$\sigma_n(\xi) \approx \sigma_{n_0}(\xi) + \sum_{i=1}^k \sigma_{n_i}(\xi) x_i, \quad (29)$$

где: $\sigma_{n_0}(\xi)$, $\sigma_{n_i}(\xi)$ – напряжения контактного взаимодействия, представляющие собой следы $\mathbf{n}^T \mathbf{A}_L^T \mathbf{y}_0$, $\mathbf{n}^T \mathbf{A}_L^T \mathbf{y}_i$ функций \mathbf{y}_0 , \mathbf{y}_i ($i = \overline{1, k}$) на L' ; \mathbf{y}_0 – функция, равновесная с заданной нагрузкой; \mathbf{y}_i – система самоуравновешенных функций, удовлетворяющих однородным уравнениям (27); x_i – компоненты вектора обобщенных сил взаимодействия. Тогда $\mathbf{y} \approx \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{y}_i x_i = \mathbf{y}_0 + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{x}$.

Подставим последнее выражение в (28) и получим задачу квадратичного программирования (КП)

$$-\Pi_2(\bar{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \geq 0} [-\Pi_2(\mathbf{x})], \quad (30)$$

где: $-\Pi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{L}_F + \mathbf{x}^T \mathbf{z} + C$, $\mathbf{L} = \int_V \mathbf{Y}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Y} dv$ – матрица податливости по направлениям x_i (контактная матрица податливости); $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_u = \int_{S_\sigma} \mathbf{Y}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}_0 dv - \int_{S_u} (\mathbf{A}_S^T \mathbf{Y})^T \mathbf{u}_S ds$ – вектор взаимных перемещений точек контактной поверхности от заданных статических и кинематических нагрузок;

$\mathbf{z} = -\int_L \eta_n (\mathbf{A}_L^T \mathbf{Y})^T \mathbf{n} d\eta$ – вектор обобщенных зазоров по направлению \mathbf{x} ;

$C = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{y}_0^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}_0 dv - \int_{S_u} \mathbf{u}_S^T \mathbf{A}_S^T \mathbf{y}_0 ds = const$ – потенциальная энергия системы в отсутствии контакта.

Условия Куна-Таккера для задачи КП (30) запишутся в виде:

$$1. \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{L} \mathbf{x} + \mathbf{L}_F + \mathbf{z}; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \tilde{\mathbf{z}} \geq 0; \quad 4. \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{z}} = 0, \quad (31)$$

где $\tilde{\mathbf{z}}$ есть взаимное обобщенное перемещение точек контактной поверхности по направлению \mathbf{x} . Условия 3, 4 в (31) представляют собой дискретный аналог

условий 1, 5 в (26). Таким образом, задача отыскания точки максимума функционала (28), аппроксимированного в терминах контактных сил взаимодействия, свелась к ЛЗД (31).

ЛЗД (31) записана для дискретизованной по области контакта конструкции, освобожденной от всех односторонних связей, действие которых заменено усилиями \mathbf{x} . Такую систему естественно назвать основной системой метода сил. Число k членов ряда в (29) можно понимать как степень контактной статической неопределенности дискретизованной системы.

Контактную матрицу податливости \mathbf{L} и вектор \mathbf{L}_F можно формировать непосредственно, без построения \mathbf{y}_i ($i = \overline{0, k}$). Столбец \mathbf{L}_i ($i = \overline{1, k}$) матрицы податливости представляет собой вектор взаимных перемещений \mathbf{z} , возникающих в основной системе от $x_i = 1$ при прочих $x_j = 0$ ($j = \overline{1, k}; j \neq i$). Вектор \mathbf{L}_F есть вектор \mathbf{z} в основной системе от заданной нагрузки. Ясно, что \mathbf{L} положительно определена, если каждое из контактирующих тел закреплено от жесткого смещения.

Для решения ЛЗД (31) можно воспользоваться алгоритмом Лемке:

$$1. \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{L}_F + \mathbf{z}; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \tilde{\mathbf{z}} \geq 0; \quad 4. \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{z}} = 0; \quad 5. \mathbf{p} \geq 0, \quad (32)$$

где \mathbf{p} имеет в данном случае смысл искусственно введенного зазора одинакового для всех контактных пар точек. На первом шаге алгоритма зазор \mathbf{p} вводится в базис так, чтобы осуществился «момент касания» для одной из контактных пар точек. Дальнейшее выполнение алгоритма можно интерпретировать как процесс сближения деформируемых тел, сопровождаемый на каждом шаге включением/выключением односторонних связей (сменой рабочих схем). Пошаговый процесс заканчивается, если \mathbf{p} вышел из базиса ($\mathbf{p} = 0$). Следовательно, искусственно введенный зазор выбран (исчерпан), и решение расширенной задачи соответствует заданной.

Предлагается следующая модификация алгоритма Лемке для задач с параметрическим изменением части внешнего воздействия: $\mathbf{L}_g + \mathbf{L}_u + \mathbf{z} = p\mathbf{L}_v + \mathbf{L}_c$, где: p – параметр изменения вектора \mathbf{L}_v , $0 \leq p \leq 1$; $\mathbf{L}_v, \mathbf{L}_c$ – векторы, представляющие собой любую возможную комбинацию $\mathbf{L}_g, \mathbf{L}_u, \mathbf{z}$ такую, что $\mathbf{L}_g + \mathbf{L}_u + \mathbf{z} = \mathbf{L}_v + \mathbf{L}_c$. Используем p как параметр расширения задачи (31):

$$1. \mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{x} + p\mathbf{L}_v + \mathbf{L}_c; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \tilde{\mathbf{z}} \geq 0; \quad 4. \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{z}} = 0; \quad 5. p \geq 0. \quad (33)$$

Расширенная задача (33) будет эквивалентна исходной (31) при $p = 1$. Значение параметра p определяется на первом шаге системой неравенств $\tilde{\mathbf{z}}_i = p\mathbf{L}_{vi} + \mathbf{L}_{ci} \geq 0$ ($i = \overline{1, k}$) непротиворечивой для случаев: 1) $\mathbf{L}_v > 0$, \mathbf{L}_c – произволен; 2) \mathbf{L}_v – произволен, $\mathbf{L}_c \geq 0$; 3) $\mathbf{L}_v < 0$, \mathbf{L}_c – произволен.

Случаи 1, 2 формально соответствует алгоритму Лемке. Отличие состоит в том, что параметр p возрастает (по крайней мере, не уменьшается) при переходе к очередному шагу алгоритма. Итерационный процесс заканчивается, если $p > 1$. Можно поставить задачу отследить процесс деформирования конструкции во всем диапазоне $0 \leq p \leq \infty$. Тогда итерационный процесс заканчивается по получению лучевого решения, что соответствует неизменности последней рабочей схемы при дальнейшем увеличении p .

В случае 3 на шаге $n = 1$ не удастся получить допустимое базисное решение: параметр $p < 0$ при прочих базисных переменных $X_i \geq 0$. Однако последующая стандартная процедура шагов $n \geq 2$, сопровождаемая ростом параметра p , позволяет получить допустимое базисное решение. Критерии окончания вычислительного процесса такие же, как и в случае 1.

На основе выше разобранного можно построить следующие алгоритмы. Алгоритмы с параметрическим ростом силовой нагрузки ($\mathbf{L}_v = \mathbf{L}_g$, $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_u + \mathbf{z}$) позволяют отследить изменение размеров и положения зон контакта/отрыва при простом загрузении. Алгоритмы с параметрическим ростом кинематической нагрузки ($\mathbf{L}_v = \mathbf{L}_u$, $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_g + \mathbf{z}$) дают возможность отследить изменение зоны контакта при пропорциональном росте внешнего кинематического воздействия и неизменных начальных зазорах и силовой нагрузке (в том числе и при отсутствии таковых или отсутствии одного из них). Алгоритмы с параметрическим изменением зазора ($\mathbf{L}_v = \mathbf{z}$, $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_g + \mathbf{L}_u$) и неизменных силовой и кинематической нагрузках (если они есть) полезны при рассмотрении перемещения одного из тел относительно другого. Такая ситуация возникает, например, при вспучивании ($\mathbf{z} \leq 0$) или оседании ($\mathbf{z} \geq 0$) основания, односто-

ронне взаимодействующего с конструкцией. Алгоритмы позволяют отследить или спрогнозировать развитие зон контакта/отрыва в этом случае.

В п. 4.2 на простых примерах показан физический смысл каждого шага предложенных алгоритмов, проведено тестирование алгоритмов на задачах, имеющих аналитическое решение, решен ряд модельных задач.

В п. 4.3 рассматривается метод перемещений решения задач с идеальными односторонними связями. Выпишем функционал Лагранжа, определенный на множестве кинематически возможных перемещений \mathbf{u} , удовлетворяющих граничным условиям

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \quad \in S_u \quad (34)$$

и условиям 1 в (26):

$$\Pi_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u}) dv - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{c} dv - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{g}_s ds. \quad (35)$$

Проведем аппроксимацию \mathbf{u} , исходя из следующего представления взаимных перемещений $z(\xi)$ в области возможного контакта

$$z(\xi) \approx z_{n0}(\xi) + \sum_{i=1}^k z_{ni}(\xi) \cdot z_i, \quad (36)$$

где: $z_{n0}(\xi)$, $z_{ni}(\xi)$ – взаимные перемещения точек на поверхности контакта, являющиеся следами $\mathbf{n}^T(\mathbf{u}_0'' - \mathbf{u}'_0)$, $\mathbf{n}^T(\mathbf{u}_i'' - \mathbf{u}'_i)$ функций $\mathbf{u}_0'' - \mathbf{u}'_0$, $\mathbf{u}_i'' - \mathbf{u}'_i$ ($i = \overline{1, k}$) на L'' ; $\mathbf{u}_0'' - \mathbf{u}'_0$ – функция, удовлетворяющая условию 1 в (26) и (34); $\mathbf{u}_i'' - \mathbf{u}'_i$ – система функций, удовлетворяющих условию 1 в (26) и однородным уравнениям (34); z_i – компоненты вектора обобщенных взаимных перемещений точек контактной поверхности. В общем случае удобно принимать перемещения $z_i > 0$, если они не ограничиваются односторонней связью. Обозначим $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0'' - \mathbf{u}'_0$,

$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i'' - \mathbf{u}'_i$ и представим искомое решение в виде: $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i z_i = \mathbf{u}_0 + \mathbf{Uz}$.

Подставим \mathbf{u} в (35) и получим задачу КП

$$\Pi_1(\bar{\mathbf{z}}) = \inf_{z_i \geq 0} \Pi_1(\mathbf{z}), \quad (37)$$

где: $\Pi_1(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Rz} + \mathbf{z}^T \mathbf{R}_F + C$; $\mathbf{R} = \int_V (\mathbf{AU})^T \mathbf{D}(\mathbf{AU}) dv$ – матрица жесткости конструкции по направлению \mathbf{z} (контактная МЖ); $\mathbf{R}_F = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_g =$

$$= \int_V (\mathbf{A}\mathbf{U})^T \mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u}_0) dv + \int_V \mathbf{U}^T \mathbf{c} dv + \int_{S_\sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{g}_S ds$$
 – вектор обобщенных усилий взаимодействия (по направлению \mathbf{z}) точек контактной поверхности от заданных кинематической на S_u и статических (в V и на S_σ) нагрузок;

$$C = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A}\mathbf{u}_0)^T \mathbf{D}(\mathbf{A}\mathbf{u}_0) dv - \int_V \mathbf{u}_0^T \rho dv - \int_{S_u} \mathbf{u}_0^T \mathbf{g}_S ds = const$$
 – потенциальная энергия системы в отсутствии контакта.

Условия Куна-Таккера для задачи (37):

$$1. \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{z} + \mathbf{R}_F; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \mathbf{z} + \mathbf{z} \geq 0; \quad 4. \mathbf{x}^T (\mathbf{z} + \mathbf{z}) = 0, \quad (38)$$

где \mathbf{x} – вектор обобщенных усилий взаимодействия точек контактной поверхности по направлению \mathbf{z} ; \mathbf{z} – вектор заданных обобщенных зазоров по направлению \mathbf{z} . Условия 2 – 4 в (38) представляют собой дискретный аналог условий 1 – 5 в (26). Введем обозначение $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \mathbf{z}$ и перепишем (38) в виде:

$$1. \mathbf{x} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{R}}_F; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \tilde{\mathbf{z}} \geq 0; \quad 4. \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{z}} = 0, \quad (39)$$

где $\tilde{\mathbf{z}}$ – вектор с компонентами $z_i + \eta_i$ – расстояниями между точками контактной поверхности после деформации, $\tilde{\mathbf{R}}_F = \mathbf{R}_F - \mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{R}_F + \mathbf{R}_\eta$.

Таким образом, задача отыскания стационарного значения функционала $\Pi_1(\mathbf{z})$ свелась к ЛЗД (39). Последняя записана для дискретизованной по области контакта конструкции, в которой все односторонние связи превращены в двусторонние и перемещения \mathbf{z} по направлению односторонних связей приняты за неизвестные. Такую систему естественно назвать основной системой метода перемещений, а число k членов ряда в (36) можно понимать как степень кинематической неопределимости дискретизованной системы.

Контактную матрицу жесткости \mathbf{R} и вектор $\tilde{\mathbf{R}}_F$ можно формировать непосредственно, без построения \mathbf{u}_i ($i = \overline{0, k}$). Столбец \mathbf{R}_i матрицы жесткости представляет собой вектор реакций \mathbf{x} во введенных связях основной системы, возникающих от единичной дислокации $z_i = 1$ при прочих $z_j = 0$ ($j = \overline{1, k}; j \neq i$). Вектор $\tilde{\mathbf{R}}_F$ есть вектор реакций \mathbf{x} в основной системе от заданной нагрузки.

Для решения ЛЗД (39) можно воспользоваться алгоритмом Лемке:

$$1. \mathbf{x} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{z}} + p\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{R}}_F; \quad 2. \mathbf{x} \geq 0; \quad 3. \tilde{\mathbf{z}} \geq 0; \quad \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{z}} = 0; \quad 4. p \geq 0, \quad (40)$$

где p имеет смысл искусственно введенного обжатия, приложенного в точках каждой контактной пары и сжимающего введенные связи основной системы. Величина этого обжатия одинакова для всех контактных пар. Расширенная ЛЗД (40) будет эквивалентна исходной (39) при $p = 0$. Последующий алгоритм минимизирует p . На первом шаге определяем величину обжатия p такую, чтобы обеспечить «момент отрыва» одного тела от другого в какой-либо контактной паре l (момент выключения связи: $x_l = 0$) при прочих связях, остающихся обжатыми. Дальнейшие шаги алгоритма можно интерпретировать как процесс снятия искусственно введенного обжатия односторонних связей, сопровождаемый на каждом шаге сменой рабочих схем. Пошаговый процесс заканчивается, если p вышел из базиса ($p = 0$). Следовательно, предварительное искусственное обжатие снято, и решение расширенной задачи соответствует заданной.

Для положительно полуопределенной матрицы \mathbf{R} возможно получение лучевого решения, которое свидетельствует о невозможности снять предварительное обжатие без получения неопределенных перемещений, что соответствует жесткому смещению одного из тел.

Предлагаются следующие алгоритмы с параметрическим изменением внешнего воздействия. Полагаем, что внешнее воздействие, характеризуемое вектором $\tilde{\mathbf{R}}_F = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_g + \mathbf{R}_\eta$, можно представить в виде $\tilde{\mathbf{R}}_F = p\mathbf{R}_v + \mathbf{R}_c$, где $\mathbf{R}_v, \mathbf{R}_c$ – векторы, представляющие собой любую возможную комбинацию $\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_\rho, \mathbf{R}_g, \mathbf{R}_\eta$ такую, что $\mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_g + \mathbf{R}_\eta = \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_c$; p – параметр изменения вектора \mathbf{R}_v . Как и в методе сил можно построить алгоритмы с параметрическим изменением: силовой нагрузки ($\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_g, \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_\eta$); кинематической нагрузки ($\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_u, \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_g + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_\eta$); зазора ($\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_\eta, \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_\rho + \mathbf{R}_g$) и т. п.

В п. 4.4 на простых примерах показан физический смысл каждого шага предложенных алгоритмов, проведено тестирование алгоритмов на задачах, имеющих аналитическое решение, решен ряд модельных задач;

В п. 4.5 для дискретизованной задачи показано применение смешанного метода решения задачи идеального контакта. Область возможного контакта деформируемых тел разбивается на зону предполагаемого контакта и зону пред-

полагаемого отрыва. В зоне предполагаемого контакта односторонние связи заменяются двусторонними. В качестве неизвестных принимаются перемещения по направлению введенных связей. В зоне предполагаемого отрыва отбрасываются односторонние связи и их действие заменяется неизвестными усилиями. В результате получается основная система смешанного метода. Уравнения равновесия и совместности деформаций для этой системы при ограничениях на знак взаимных перемещений и усилий взаимодействия и при условии дополняющей нежесткости приводят к ЛЗД. Для решения последней используются алгоритмы, аналогичные применяемым в методе сил и перемещений. Предложен вариант метода Лемке, трактуемый как алгоритм с введением либо искусственного зазора, либо искусственного обжатия. На простом примере показан физический смысл шагов этого алгоритма, решены модельные задачи.

Таким образом, последовательность расчета систем с идеальными односторонними связями совпадает с таковой при расчете статически неопределимых систем строительной механики. Сначала выбирается «основная система» метода сил (перемещений, смешанного). Затем формируется матрица податливости (жесткости, смешанных соотношений) и грузовой вектор. Далее решается система уравнений и неравенств ЛЗД. Значения параметров напряженно-деформированного состояния конструкции восстанавливаются по найденным из решения ЛЗД значениям взаимных перемещений и усилий взаимодействия односторонних связей.

В пятой главе работы рассматривается ЛЗД в применении к расчету линейно деформируемых систем с трением. При известных предельных силах трения показан способ сведения проблемы безусловной минимизации выпуклых недифференцируемых квадратичных функционалов (4), (11), (16) к задаче для выпуклых дифференцируемых функционалов, но с минимизацией при дополнительных условиях. Условия Куна–Таккера такого функционала приводят к линейной задаче дополненности стандартного вида.

В п. 5.1 рассмотрена продольная деформация многопролетных балок, взаимодействующих посредством трения Кулона с дискретными жесткими или линейно-упругими опорами или линейно-упругим сплошным основанием Винклера. Разберем случай жестких опор. Представим перемещения опорных сечений u_i ($i = \overline{1, m}$) в виде разности

$$u_i = u_i^+ - u_i^- \quad (41)$$

неотрицательных величин $u_i^+ \geq 0$, $u_i^- \geq 0$, таких, что

$$u_i^+ u_i^- = 0. \quad (42)$$

Тогда

$$|u_i| = u_i^+ + u_i^-. \quad (43)$$

Условия трения 1 в (1) можно записать в виде

$$1. F_{ii} + f_i F_{ni} - F_{ii}^+ = 0, \quad 2. F_{ii}^+ \geq 0; \quad 3. F_{ii} - f_i F_{ni} + F_{ii}^- = 0, \quad 4. F_{ii}^- \geq 0. \quad (44)$$

Из равенств 1, 3 в (44), получим зависимости:

$$F_{ii} = (F_{ii}^+ - F_{ii}^-) / 2; \quad F_{ii}^+ + F_{ii}^- = 2 f_i F_{ni}; \quad (45)$$

Для введенных переменных u_i^+ , u_i^- , F_{ii}^+ , F_{ii}^- можно показать, что условия

$$u_i^+ F_{ii}^+ = 0, \quad u_i^- F_{ii}^- = 0 \quad (46)$$

эквивалентны условиям трения (1).

Подставим (41), (43) в (3) и получим задачу условной минимизации

$$J(u_1^+, u_1^-, \dots, u_m^+, u_m^-) = \inf_{v_i^+ \geq 0, v_i^- \geq 0, v_i^+ v_i^- = 0 \ (i=1, m)} J(v_1^+, v_1^-, \dots, v_m^+, v_m^-), \quad (47)$$

эквивалентную (4). Условия Куна–Таккера для задачи (47) приводят к ЛЗД:

$$1. \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ii}^+ \\ \mathbf{F}_{ii}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_T \\ -\mathbf{r}_T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_f \end{Bmatrix}; \quad (48)$$

$$2. \mathbf{F}_{ii}^+ \geq 0, \mathbf{F}_{ii}^- \geq 0; \quad 3. \mathbf{u}^+ \geq 0, \mathbf{u}^- \geq 0; \quad 4. \mathbf{u}^{+T} \mathbf{F}_{ii}^+ = 0, \mathbf{u}^{-T} \mathbf{F}_{ii}^- = 0$$

при дополнительном ограничении (42). Показано, что для решения задачи (48) можно воспользоваться аналогом алгоритма с искусственно введенным обжатием метода перемещений, используя условие (42) наряду с условиями 4 в (48) для выбора ведущей строки.

Формирование системы уравнений 1 в (48) осуществляется следующим образом. Сначала выбирается «основная система» превращением связей трения в абсолютно жесткие связи. В качестве неизвестных принимаются перемещения по направлению введенных связей. Вектор \mathbf{r}_T имеет своими компонентами реакции во введенных связях основной системы от заданной температурной нагрузки. Матрица \mathbf{A} – контактная матрица жесткости основной системы по направлению введенных связей. Вектор \mathbf{r}_f имеет своими компонентами предель-

ные силы трения. После решения ЛЗД реакции трения и перемещения опорных сечений определяются по формулам (45), (41).

Для случаев упругих опор неизвестными являются реакции трения и взаимные перемещения. Условия Куна–Таккера приводят к ЛЗД, подобной (48). Столбец i матрицы \mathbf{A} определяется как вектор реакций во введенных связях основной системы от единичной дислокации в связи i .

Для дискретизованной задачи алгоритм с искусственно введенным обжатием приводит к точному решению, поскольку в пределах каждого шага система линейна и решение получается точным. Недостаток перехода от негладкой задачи к гладкой состоит в увеличении размерности задачи вдвое.

В п. 5.2 рассматривается изгиб балки, взаимодействующей посредством трения с линейно–упругим сплошным основанием Винклера. Структура п. 5.1 и 5.2 совпадают, за исключением того, что для получения ЛЗД стандартного вида в системе уравнений задачи Куна–Таккера проводится конденсация контактных степеней свободы – прогибов балки по концам участков. Отметим, что при малом количестве участков ($m < 100$) алгоритм Лемке оказался эффективнее метода поточечной верхней релаксации по расходу машинного времени.

В п. 5.3 для балок на жестких опорах и линейно деформируемых основаниях разработана комбинация методов поточечной верхней релаксации (ПВР) и алгоритма Лемке для ЛЗД (ЛЗД+АЛ) с целью использовать сильные стороны каждого из методов. А именно: эффективность ЛЗД+АЛ при малом количестве участков и малые требования к объему машинной памяти метода ПВР при практически любом количестве участков. Эта комбинация представляет собой вариант метода блочной верхней релаксации (БВР), когда на каждом шаге итерационного процесса минимизируется функционал не при одном значении i , а при нескольких значениях i :

$$J^l(u_1^{r+1}, \dots, u_{i-n-1}^{r+1}, u_{i-n}^{r+1}, \dots, u_{i+n}^{r+1}, u_{i+n+1}^r, \dots, u_m^r) \leq J^l(u_1^{r+1}, \dots, u_{i-n-1}^{r+1}, v_{i-n}, \dots, v_{i+n}, u_{i+n+1}^r, \dots, u_m^r). \quad (49)$$

Размер блока в (49) равен $2n + 1$ и принимается достаточно малым. Для решения задачи (49) на каждом шаге итерации $r + 1$ применяется ЛЗД+АЛ. Количество шагов на итерации теперь меньше m и определяется соотношением числа участков m и размерами блока $2n + 1$.

По результатам численных экспериментов можно сделать вывод об определенном преимуществе предлагаемого варианта БВР перед методом ПВР для большеразмерных задач, как по времени счета, так и по чувствительности скорости сходимости итерационного процесса к величине параметра релаксации. ЛЗД+АЛ для большеразмерных задач явно уступает в эффективности в сравнении с методами поточечной и блочной верхней релаксации.

В п. 5.4 рассматривается контактная задача с трением в случае плоской задачи теории упругости. Предполагается, что предельные силы трения неизвестны. Показано применение разработанных в п.п. 4.2, 5.1 алгоритмов ЛЗД для решения задач идеального контакта и контакта с трением.

Используется известный эвристический алгоритм итераций по предельным силам трения: на первом шаге предполагается, что $\sigma_{\tau}^{(1)} = 0$ на L' , L'' . Решая задачу (39) об идеальном одностороннем контакте, получаем на L' , L'' нормальные контактные напряжения $\sigma_n^{(1)}$; на втором шаге решаем задачу с трением (48) при известных предельных силах трения $f\sigma_n^{(1)}$ и получаем тангенциальные контактные напряжения $\sigma_{\tau}^{(2)}$; на третьем шаге снова решаем задачу об идеальном одностороннем контакте, добавляя к существующей нагрузке тангенциальные контактные напряжения $\sigma_{\tau}^{(2)}$, полученные на предыдущем шаге; в результате имеем нормальные контактные напряжения $\sigma_n^{(2)}$; итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разности $\sigma_n^{(j+1)} - \sigma_n^{(j)}$ и $\sigma_{\tau}^{(j+1)} - \sigma_{\tau}^{(j)}$ не станут достаточно малыми.

Таким образом, на нечетных шагах, где решается задача идеального одностороннего контакта, определяются размеры и положение зон контакта и отрыва; на четных шагах (где решается задача с известными предельными силами трения) для зоны контакта определяются размеры и положение зон сцепления и скольжения. С использованием данного алгоритма решен ряд модельных задач.

В заключении диссертации кратко сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

1. Сформулированы вариационные постановки задач для продольной деформации многопролетной балки, взаимодействующей посредством трения Кулона с жестким и упругими дискретными опорами при заданном предельном трении. Задача сводится к минимизации выпуклых и недифференцируемых функционалов энергии.

2. Разработана схема метода поточечной верхней релаксации для решения задач, указанных в п. 1. Итерационный процесс поточечной верхней релаксации на каждом шаге сводится к необходимости решения соответствующих вариационных неравенств. Методами строительной механики последовательно строится точное решение этих неравенств. Решен ряд модельных задач. Проведен анализ процесса решения, компьютерной реализации метода, точности результатов и т. п. Большое внимание уделяется выбору оптимального коэффициента верхней релаксации и зависимости его от параметров задачи.

3. Разработан метод расчета продольной деформации балки, взаимодействующей со сплошным основанием посредством трения Кулона при заданном предельном трении. Метод состоит из двух этапов. На первом этапе производится дискретизация задачи, которая приводит исходную задачу к балке на дискретных опорах, расположенных на концах участков дискретизации. Эдесь возникают дополнительные проблемы точности дискретизации и применения метода поточечной верхней релаксации при большом числе опор. Решен ряд модельных задач и выявлено влияние различных факторов на точность и эффективность применяемых подходов.

4. Разработан метод расчета изгиба балки, взаимодействующей с двумя сплошными упругими основаниями винклеровского типа. С одним основанием балка контактирует непосредственно, а с другим – посредством силы трения Кулона. Эти винклеровские основания предполагаются линейно упругими. Коэффициент жесткости основания может меняться вдоль оси балки. Предлагаемая схема может быть использована при расчете трубопроводов. Разработаны методы дискретизации и поточечной верхней релаксации для решения подобных задач. Решены примеры, позволяющие судить об эффективности метода и характере получаемых результатов.

5. Поставлена задача и разработан метод расчета балки–трубопровода, заглубленного в грунт с нелинейно-упругими характеристиками. Схема состоит

из трех сплошных нелинейно-упругих винклеровских оснований. С одним из них балка контактирует непосредственно, а с двумя другими – посредством трения Кулона. Разработана схема дискретизации метода верхней релаксации. Нелинейно-упругие характеристики оснований предполагаются вогнутыми функциями с тем, чтобы их упругие энергии были выпуклыми функционалами. Разработан алгоритм решения соответствующих нелинейных задач, составляющих этапы метода поточечной верхней релаксации. Решен ряд конкретных задач и выполнен анализ полученных результатов и схем их получения. Разработанные алгоритмы в общем случае могут служить для расчета балок на нелинейно-упругих винклеровских основаниях.

6. Поставлена задача расчета балок–трубопроводов, заглубленных в грунт и предназначенных для транспортировки нефти и газа. В качестве внешнего воздействия рассматриваются движущиеся ледовые образования, взаимодействующие с грунтом, в который заглублены трубопроводы. Здесь в качестве воздействия на балки–трубопроводы фигурирует заданное перемещение грунта. Предложены два метода решения подобной задачи. Первый из них состоит из внешних итераций и внутренних итераций. Внешние итерации позволяют определить нагрузку на грунт, отвечающую заданным смещениям грунта. При этом предполагается, что связь между трубопроводом и грунтом, находящимся перед ним, является односторонней. Внутренними итерациями является поточечная верхняя релаксация. Вторым методом основан только на методе поточечной релаксации с включением в него заданного перемещения грунта. В ряде случаев этот второй метод оказался более эффективным.

7. Выполнены расчеты трубопроводов, взаимодействующих с различными грунтами. Рассматривались различные исходные параметры задач о взаимодействии трубопровода с движущимся ледовым образованием. приводятся полученные результаты и выполнен их анализ.

8. Для задач идеального контакта упругих деформируемых тел на примере плоской задачи теории упругости показан способ дискретизации, приводящий к проблеме условной оптимизации квадратичного функционала, условия Куна–Таккера для которого приводят к линейной задаче дополненности.

9. Разработаны варианты алгоритма Лемке для решения линейной задачи дополненности и предложена их трактовка в форме классических методов

строительной механики – метода сил, метода перемещений, смешанного метода – с привлечением понятий: «основная система», «единичные и грузовое состояния», «условие эквивалентности заданной и основной систем».

10. На простых примерах показан физический смысл каждого шага предложенных алгоритмов, проведено тестирование алгоритмов на задачах, имеющих аналитическое решение, решен ряд модельных задач.

11. Для задач расчета продольной и изгибной деформации балки, взаимодействующей с жесткими и линейно упругими дискретными опорами или упругим винклеровским основанием посредством трения Кулона, показан способ сведения проблемы безусловной минимизации выпуклого недифференцируемого функционала к проблеме условной минимизации выпуклого дифференцируемого функционала, условия Куна–Таккера которого приводят к линейной задаче дополненности стандартного вида.

12. Разработаны соответствующие алгоритмы решения линейной задачи дополненности, показан их физический смысл в терминах метода перемещений строительной механики; проведено сравнение результатов решений указанными алгоритмами с результатами решений методом поточечной верхней релаксации, свидетельствующее о практически полном их совпадении.

13. Разработан вариант метода блочной релаксации, объединяющий в себе сильные стороны методов поточечной верхней релаксации и решения линейной задачи дополненности; проведен сравнительный анализ этих трех методов и определены области эффективного применения каждого из них.

14. Рассмотрено применение известного алгоритма итераций по предельным силам трения к решению контактных задач, когда предельные силы трения заранее неизвестны. Разработанные алгоритмы ЛЗД применяются последовательно для определения зон контакта/отрыва и зон проскальзывания/сцепления в зоне контакта.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. *Розин Л. А., Ловцов А. Д., Смирнов М. С.* Расчет магистральных трубопроводов при действии температуры и трения на опорах // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 11. – С. 15 – 20.

2. *Розин Л. А., Ловцов А. Д., Смирнов М. С.* Продольная деформация многопролетной балки с трением и податливостью опор // Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 8. – С. 17 – 22.
3. *Розин Л. А., Ловцов А. Д.* Изгиб балки, взаимодействующей с упругим основанием при наличии трения Кулона // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 7. – С. 22 – 31.
4. *Ловцов А. Д.* Алгоритмы расчета систем с односторонними связями методом сил // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. – № 3. – С. 186 – 192.
5. *Ловцов А. Д.* Алгоритмы метода перемещений для расчета систем с односторонними связями // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2004. – № 2. – С. 220 – 227.
6. *Розин Л. А., Ловцов А. Д., Смирнов М. С.* Продольная деформация балки, взаимодействующей с упругоподатливым основанием посредством трения // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2005. – № 1. – С. 145 – 153.
7. *Розин Л. А., Ловцов А. Д.* Изгиб балки-трубопровода, взаимодействующей с нелинейно-упругим основанием при действии трения Кулона // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2005. – № 3. – С. 132 – 142
8. *Ловцов А. Д.* Применение алгоритма Лемке к задаче изгиба балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 5. – С. 19 – 26.
9. *Леонов С. В., Авдеев А. И., Ловцов А. Д.* Способ определения в судебной медицине однократности травмирующего воздействия по перелому кости // Патент на изобретение №2194443. Зарегистрирован в Государственном реестре изобретений Российской Федерации г. Москва, 20 декабря 2002 г.
10. *Ловцов А. Д.* Метод перемещений расчета систем с односторонними связями как задача дополненности // Фундаментальные и прикладные вопросы механики: Сборник докладов международной конференции / Под ред. К. А. Чехонина. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – Т. 2. – С. 314 – 325.
11. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* Метод перемещений расчета пластин на одностороннем основании // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке: Труды Третьей Межд. научной конф. творч. молодежи. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2003. – С. 72-76.

12. *Ловцов А. Д.* Линейная задача дополнительности в применении к расчету многопролетных балок с трением на жестких опорах // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды VI Междунар. конф. – Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. – С. 282 – 291.
13. *Ловцов А. Д.* Модернизация метода блочной релаксации на основе алгоритма Лемке для расчета деформируемых систем с трением // Труды Междунар. научно-техн. конф «Вычислительная механика деформируемого твердого тела». – М.: МИИТ, 2006. – Т. 1. – С. 269 – 272.
14. *Ловцов А. Д.* Линейная задача дополнительности в применении к расчету многопролетных балок с трением на упругих опорах // Новые идеи нового века 2006 : материалы шестой международной научной конференции ИАС ТОГУ. The New Ideas Of The New Century 2006: The Sixth International Scientific Conference Proceedings of the IACE PNU. / Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун- та, 2006. – С. 110 – 114.
15. *Ловцов А. Д.* Частный случай продольной деформации балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона // Новые идеи нового века 2006 : материалы шестой международной научной конференции ИАС ТОГУ. The New Ideas Of The New Century 2006: The Sixth International Scientific Conference Proceedings of the IACE PNU. / Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун- та, 2006. – С. 115 – 119.
16. *Ловцов А. Д.* Алгоритмы расчета конструкций с переменными связями // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – С. 401-402.
17. *Ловцов А. Д.* Алгоритмы линейной задачи дополнительности в применении к расчету систем с односторонними связями // Тез. докл. XX Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов», 24 – 26 сент. 2003 г. Спб., С. 128 – 129.
18. *Розин Л. А., Ловцов А. Д.* Взаимодействие деформируемых систем с нелинейно-упругой средой при наличии трения Кулона // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов.

Тезисы докладов XXI международной конференции. 4 – 7 октября 2005 г. – СПб: ВВМ, 2005. С. 164 – 165.

19. *Ким Т. С., Ловцов А. Д.* Многослойные конструкции как системы с переменными связями // Сборник научных трудов «Современные проблемы машиностроительного комплекса». Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1998. с. 35-38.

20. *Ким Т. С., Ловцов А. Д.* Расчет многослойных конструкций с односторонним взаимодействием слоев как плоская задача теории упругости // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса: Третьи чтения памяти профессора М. П. Даниловского / Хабар. гос. техн. ун-т. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2000. Вып. 3. – С. 203 – 210.

21. *Ловцов А. Д., Медведева А. С.* Алгоритм смешанного метода расчета задач одностороннего контакта упругих тел // Новые идеи нового века: Международная научная конференция аспирантов и студентов ИАС ХГТУ. New Ideas of the New Century: The International Scientific Students of the IACE KSUT. / Хабар. гос. техн. ун-т. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2001. – С. 42-47.

22. *Ловцов А. Д.* Балка на одностороннем основании Винклера, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой // Сборник научных трудов «Строительная механика и механика материалов». Выпуск 2; Хаб. гос. техн. ун-т. – Хабаровск 2002. – С. 27-48. – Библ. 1 назв. (Рукопись деп. 30.09.2002 в ВИНТИ, № 1650-B2002)

23. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* К расчету пластин на одностороннем основании Винклера методом перемещений // Новые идеи нового века: Международная научная конференция аспирантов и студентов ИАС ХГТУ. New Ideas of the New Century: The International Scientific Students of the IACE KSUT. / Хабар. гос. техн. ун-т. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2002. – С. 16 – 19.

24. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* Расчет пластин на жестких односторонних опорах методом перемещений с введением искусственного предварительного напряжения нагрузкой // Сборник научных трудов «Строительная механика и механика материалов». Выпуск 2; Хаб. гос. техн. ун-т. – Хабаровск 2002. – С. 49-66. (Рукопись деп. 30.09.2002 в ВИНТИ, № 1650-B2002)

25. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* Расчет пластин на дискретных односторонних опорах // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного

- комплекса: Материалы региональной научно–практической конференции. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – С. 210-216.
26. *Ловцов А. Д.* Смешанный метод решения задач одностороннего контакта упругих тел // В сб.: «Строительная механика и механика материалов». Выпуск 3 / Хаб. гос. техн. ун-т. – Хабаровск, 2003. – С. 43 – 51: ил. – Библиогр.: 5 назв. – Рус. Деп. в ВИНТИ 29.07.04. №1325 – В2004.
27. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* Расчет пластин на одностороннем основании Винклера методом перемещений// Сборник научных трудов «Строительная механика и механика материалов». Выпуск 3; Хаб. гос. техн. ун-т. – Хабаровск 2003. – С. 52-59. (Рукопись деп. 29.07.2004 в ВИНТИ, № 1325 – В2004)
28. *Ловцов А. Д.* К продольной деформации балки, взаимодействующей с жестким основанием посредством трения Кулона // Совершенствование методов расчета строительных конструкций, зданий и сооружений: сб. науч. тр.– Хабаровск: Изд – во Хабар. гос. техн. ун – та, 2005. Вып. 4. С. 85 – 90.
29. *Дойхен Ю. М., Ким Т. С., Ловцов А. Д. Тен Ен Со.* Расчет конструкций, контактирующих с упругим основанием: Учеб. пособие. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2001. – 203 с.
30. *Ловцов А. Д., Долгачев М. В.* Расчет пластинчатых систем на дискретных односторонних опорах // Программный комплекс для IBM PC 486: Зарегистрирован ВНТИЦ 27.06.2003 г. – № А/113 №0203023180306.